أولاً: أشكال (حالات) عدم التعيين :

حالات عدم التعيين سبع وهي :

❶ $\frac{\infty}{\infty}$ ❷ $\frac{0}{0}$ ❸ $0 \cdot \infty$ ❹ $\infty - \infty$ ❺ 0^0 ❻ ∞^0 ❼ 1^∞

ثانياً: النهاية النموذجية الأولى :

من الشكل : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ و يمكن الاستفادة من هذه النهاية في الحصول على النتائج التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{tanx} = 1$$

تمارين : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

❶ قيمة النهاية $A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot tanx\right]$ هي :

Ⓐ $A = +1$	Ⓑ $A = -1$	Ⓒ $A = 0$

الحل :

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot tanx\right] = 0 \cdot \infty$$

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{sinx}{cosx}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot sinx}{cosx}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot sinx}{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$$

$$A = (-1) \cdot \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]\right) \cdot \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [sinx]\right)$$

$$A = (-1)(+1)(+1) = -1 \Rightarrow \left(\text{الخيار الصحيح هو } B\right)$$

❷ قيمة النهاية $A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\right]$ هي :

Ⓐ $A=+\frac{\sqrt{2}}{2}$	Ⓑ $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	Ⓒ كل ما ذكر خطأ

الحل :

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}\right]=\frac{0}{0}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{x}\right]$$

$$\begin{Bmatrix} A_1=+\frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]}_{1}=+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ A_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]}_{1}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}\Longrightarrow A_1\neq A_2\Longrightarrow$$ لا يوجد نهاية عند الصفر

(الخيار الصحيح هو C)

❸ قيمة النهاية $A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}\right]$ هي :

Ⓐ $A=-8$	Ⓑ $A=+8$	Ⓒ كل ما ذكر خطأ

الحل :

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}\right]=\frac{0}{0}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\cdot\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\cdot\sin 4x\cdot\sin x}{x^2}\right]$$

$$A = -2 \times \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin 4x}{x}\right] \times \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$A = -2 \times \lim_{x\to 0} \left(4 \times \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\right) \times \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$A = -8 \times \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \times \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = -8 \times 1 \times 1 = -8$$

ثالثاً: النهاية النموذجية الثانية :

من الشكل : $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$ و يمكن الاستفادة من هذه النهاية في الحصول على النتيجة التالية: $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

تمارين : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

❶ قيمة النهاية $A = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}\right]$ هي :

Ⓐ $A = -1/e$	Ⓑ $A = +1/e$	Ⓒ كل ما ذكر خطأ

الحل :

$$A = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}\right] = 1^{\infty}$$

$$Let: y = \frac{-1}{x} \Rightarrow x = \frac{-1}{y} \quad , \quad (x \to +\infty) \Rightarrow (y \to 0)$$

$$A = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{-1}{y}}\right] = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(الخيار الصحيح هو B)

❷ قيمة النهاية $A = \lim\limits_{x \to 1} \left[(x)^{\frac{1}{x-1}} \right]$ هي :

Ⓐ $A = -1/e$	Ⓑ $A = +1/e$	Ⓒ كل ما ذكر خطأ

الحل :

$$A = \lim_{x \to 1} \left[(x)^{\frac{1}{x-1}} \right] = 1^{\infty}$$

$$Let: y = x - 1 \Longrightarrow x = y + 1 \quad , \quad (x \to +1) \Longrightarrow (y \to 0)$$

$$A = \lim_{x \to 1} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right] = e \Longrightarrow \left(C \text{ الخيار الصحيح هو } \right)$$

❸ قيمة النهاية $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x} \right]$ هي :

Ⓐ $A = e^2$	Ⓑ $A = 2e$	Ⓒ كل ما ذكر خطأ

الحل :

$$A = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x} \right] = 1^{\infty}$$

$$A = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{(x-1)+2}{(x-1)} \right)^{x} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{(x-1)} \right)^{x} \right]$$

$$Let: y = \frac{2}{x-1} \Longrightarrow x = \frac{2}{y} + 1 \quad , \quad (x \to +\infty) \Longrightarrow (y \to 0)$$

$$A = \lim_{y \to 0} \left[(1+y)^{\frac{2}{y}+1} \right] = \lim_{y \to 0} \left[\left((1+y)^{\frac{2}{y}} \right) (1+y)^{1} \right]$$

$$A = \left[\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{2} \left[\lim_{y \to 0} (1+y) \right] = (e)^2 (+1) = e^2$$