المحاضرة ⑨ الطرائق التقريبية في حل المعادلات الجبرية و المعادلات المتسامية

طريقة التقسيم النصفي :

مسألة دورة : إذا علمت أن للمعادلة : $f(x) = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 0$ جذراً واحداً ضمن المجال $[1,1.2]$ و المطلوب

1) إيجاد الجذر الناتج عن التقريب الرابع بطريقة التقسيم النصفي . ((تُجرى الحسابات بدقة أربعة أرقام عشرية))

2) اوجد عدد الخطوات اللازم للحصول على جذر للمعادلة السابقة لا يتجاوز الخطأ فيه $\varepsilon = 10^{-3}$

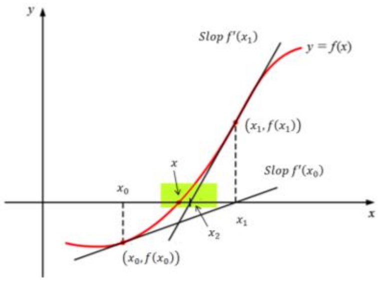
الحل :

اشارة $f(b)$	قيمة(b)	اشارة $f(c)$	قيمة(c)	اشارة $f(a)$	قيمة(a)	الجذر
موجب	1.2000	موجب	1.1000	سالب	1.0000	الأول
موجب	1.1000	سالب	1.0500	سالب	1.0000	الثاني
موجب	1.1000	سالب	1.0750	سالب	1.0500	الثالث
موجب	1.1000	موجب	1.0875	سالب	1.0750	الرابع

- $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \rightarrow \frac{1.2-1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \rightarrow \frac{0.2}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{1000}$
- $200 \leq 2^{n+1} \rightarrow ln(200) \leq ln(2^{n+1}) \rightarrow ln(200) \leq (n+1)ln(2)$
- $\frac{ln(200)}{ln(2)} \leq n+1 \rightarrow n \geq \frac{ln(200)}{ln(2)} - 1 \rightarrow n \geq 6.64 \rightarrow \boxed{n = 7}$

طريقة نيوتن – رافسون (طريقة المماسات) :

تعتمد هذه الطريقة على استبدال مخطط التابع بأجزاءٍ من قطعٍ مستقيمةٍ ، و بفرض أننا استطعنا فصل جذر واحد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$, و بفرض أن التابع $y = f(x)$ مستمر في المجال$[a, b]$



- نرسم المنحنى البياني للتابع $y = f(x)$ ثم نأخذ نقطة ما x_0 منه ضمن المجال $[a, b]$
- نوجد صورة التابع عند النقطة $x = x_0$ فتكون $f(x_0)$ و بذلك نحصل على الثنائية $(x_0, f(x_0))$.
- نرسم المماس للتابع عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ و الذي معادلته

$$\boxed{\Delta \equiv y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

- نوجد النقطة x_1 نقطة تقاطع المماس Δ مع محور الفواصل و ذلك بإن نجعل قيمة $y = 0$ في معادلة Δ
- $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ و بالتالي $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- نكرر الخطوات السابقة من أجل النقطة x_1 .
- نوجد صورة التابع عند النقطة $x = x_1$ فتكون $f(x_1)$ و بذلك نحصل على الثنائية $(x_1, f(x_1))$.
- نرسم المماس للتابع عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ و الذي معادلته

$$\boxed{\Delta^* \equiv y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)}$$

- نوجد النقطة x_2 نقطة تقاطع المماس Δ^* مع محور الفواصل و ذلك بإن نجعل قيمة $y = 0$ في معادلة Δ^*
- $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ و بالتالي $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
- و بتكرار العمل يمكننا الحصول على المتتالية $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ و بالتالي استنتاج العلاقة الآتية :

$$\star \quad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad \text{حيث} \quad n = 0, 1, 2, \cdots, n$$

- يمكن اعتبار النقطة x_{n+1} جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ إذا تحقق الشرط: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ حيث ε عدد صغير جداً

نظرية (شرط التقارب)

إذا كان $f(a)f(b) < 0$ و كان $f''(x), f'(x)$ لا يساويان الصفر و يحافظان على إشارتيهما ضمن المجال $[a, b]$ فإن التقريب الأول $x_0 \in [a, b]$ الذي يحقق المتباينة $f(x_0), f''(x_0) > 0$ يمكننا بطريقة نيوتن من الاقتراب من الجذر المضبوط للمعادلة $f(x) = 0$ و بالدقة المطلوبة .

مثال عددي : إذا علمت أن للمعادلة : $f(x) = e^x - 4x$ جذراً واحداً ضمن المجال $[0,0.5]$ و أن $x_0 = 0.25$ تقريب أول للجذر و المطلوب أوجد التقريب الثالث بطريقة المماسات (نيوتن - رافسون).(الحسابات بدقة خمسة أرقام عشرية)

الحل :

- $$\left.\begin{array}{l} [f(a) = e^a - 4a] \xrightarrow{a=0} f(0) = e^0 - 4(0) = +1 \\ [f(b) = e^b - 4b] \xrightarrow{b=0.5} f(0.5) = e^{0.5} - 4(0.5) = -0.3513 \end{array}\right\} \to f(a)f(b) < 0$$
- $$\boxed{f(x) = e^x - 4x} \to \boxed{f'(x) = e^x - 4} \to \boxed{f''(x) = e^x}$$
- $$(x_0 = 0.25) \to \begin{cases} f(0.25) = e^{0.25} - 4(0.25) = 0.28403 \\ f'(0.25) = e^{0.25} - 4 = -2.71597 \\ f''(0.25) = e^{0.25} = 1.28403 \end{cases}$$

و بملاحظة أن :

- $f''(x), f'(x)$ لا يساويان الصفر و يحافظان على إشارتيهما ضمن المجال $[0,0.5]$
- $f(x_0), f''(x_0) > 0$

إذاً التقريب الأول المعطى $x_0 = 0.25$ يحقق شرط التقارب و يمكننا حساب الجذر التالي باستخدام العلاقة :

$$\star \quad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \text{ حيث } n = 0, 1, 2, 3$$

n	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)/f'(x)$
0	0.25000	0.28403	-2.71597	-0.10458
1	0.35458	0.00727	-2.57442	-0.00282
2	0.35740	0.00001	-2.57039	0.00000

و بالتالي الجذر المطلوب هو $x = 0.35740$