رابعاً: قاعدة أوبيتال :

إذا انتهى التابعان $f(x)$ و $g(x)$ إلى الصفر (0) أو إلى اللانهاية (∞) معاً عندما $x \to x_0$ فإن

$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ بشرط أن تكون النهاية في الطرف الثاني موجودة.

تمارين :

❶ $A = \lim_{x \to 0} \left[\frac{ln(cosx)}{x^2}\right] = \frac{0}{0}$

$$A = \lim_{x \to 0} \left[\frac{sinx/cosx}{2x}\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{tanx}{2x}\right] = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left[\frac{tanx}{x}\right] = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

❷ $A = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^4 - x^2}{e^x + 1}\right] = \frac{\infty}{\infty}$

$$A = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4x^3 - 2x}{e^x}\right] = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{أوبيتال من جديد}} A = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{12x^2 - 2}{e^x}\right] = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{أوبيتال}}$$

$$A = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{24x}{e^x}\right] = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{أوبيتال}} A = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{24}{e^x}\right] = 0$$

❸ $A = \lim_{x \to 0^+} [sinx \cdot ln(x)] = 0 \cdot \infty$

$$A = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{ln(x)}{1/sinx}\right] = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{أوبيتال}} A = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1/x}{-cosx/(sinx)^2}\right]$$

$$A = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{(sinx)^2}{-x \cdot cosx}\right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{-1}{cosx} \times \frac{sinx}{x} \times \frac{sinx}{1}\right]$$

$$A=\left(\lim_{x\to0^+}\left[\frac{-1}{cosx}\right]\right)\left(\lim_{x\to0^+}\left[\frac{sinx}{x}\right]\right)\left(\lim_{x\to0^+}\left[\frac{sinx}{1}\right]\right)=\left(\frac{-1}{+1}\right)(1)(0)=0$$

❹ $A=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sinx}\right)=\infty-\infty$

$$A=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{sinx-x}{x.sinx}\right)=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}A=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{cosx-1}{sinx+x.cosx}\right)=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}$$

$$A=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-sinx}{cosx+cosx-x.sinx}\right)=\frac{0}{2}=0$$

❺ $A=\lim_{x\to0^+}\left[(x)^{\sqrt{x}}\right]=0^0$

$$lnA=\lim_{x\to0^+}\left[ln(x)^{\sqrt{x}}\right]\to lnA=\lim_{x\to0^+}\left[\sqrt{x}lnx\right]=0.\infty$$

$$lnA=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{lnx}{\sqrt{x}}\right]=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}lnA=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1/2\sqrt{x}}{x}}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}.x}}\right]$$

$$lnA=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{-x}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[-2\sqrt{x}\right]=0\to\boxed{lnA=0\Longrightarrow A=1}$$

❻ $A=\lim_{x\to+\infty}\left[(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}\right]=\infty^0$

$$ln\,A=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}ln(e^{3x}-5x)\right]=0.\infty$$

$$lnA=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ln(e^{3x}-5x)}{x}\right]=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}lnA=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3e^{3x}-5}{(e^{3x}-5x)}\right]=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}$$

$$lnA=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{9e^{3x}}{(3e^{3x}-5)}\right]=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{آوبيتال}}lnA=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{27e^{3x}}{(9e^{3x})}\right]=\frac{27}{9}=3$$

$$\boxed{lnA = 3 \rightarrow A = e^3}$$

❼ $A = \lim_{x \to 0} \left[(e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}} \right] = 1^{\infty}$

$$ln\ A = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} ln(e^{3x} - 5x) \right] = 0.\infty$$

$$lnA = \lim_{x \to 0} \left[\frac{ln(e^{3x} - 5x)}{x} \right] = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{أوبيتال}}$$

$$lnA = \lim_{x \to 0} \left[\frac{3e^{3x} - 5}{(e^{3x} - 5x)} \right] = \frac{3(1) - 5}{1 - 0} = \frac{-2}{+1} = -2$$

$$\boxed{lnA = -2 \rightarrow A = e^{-2} \rightarrow A = 1/e^2}$$

ملاحظة أساسية :

إن الشرط الأساسي لتطبيق قاعدة أوبيتال هو وجود النهاية $\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$ ، و إلا فإن تطبيقها يعطي نتائج غير صحيحة.

تمرين : احسب النهاية $A = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x + sinx}{x} \right]$

الحل : نلاحظ أن حالة عدم التعيين في هذا التمرين هي من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و بالتالي هذا يسمح لنا بتطبيق قاعدة أوبيتال على النهاية المعطاة :

$$A = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{1 + cosx}{1} \right] = \lim_{x \to \infty} [1 + cosx] = \boxed{?\,!}$$

يمكن الوصول لقيمة النهاية A بالإحاطة أو بالمناقشة و بالحالتين نجد أن $A \in [0,2]$ و بعبارة أخرى نقول " A تتأرجح بين الصفر و 2 " و بالتالي النهاية ليست وحيدة ، و لابد من إتباع أسلوب أخر في حساب النهاية.

$$A = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x + \sin x}{x}\right] = \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x}\right] = 1 + 0 = 1$$