التكامل غير المحدد

ثانياً: حساب التكامل بالتجزئة: بفرض $u = f(x)$ و $v = g(x)$ تابعين عددين قابلين للاشتقاق على نفس المجال فإن : $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

نستخدم التكامل بالتجزئة في العديد من الحالات و أشهرها :

الحالة الأولى: $P(x)$ كثير حدود من المرتبة (n)

$$I = P(x) \cdot \begin{bmatrix} e^{\alpha x+\beta} \\ a^{\alpha x+\beta} \\ sin(\alpha x+\beta) \\ cos(\alpha x+\beta) \\ sinh(\alpha x+\beta) \\ cosh(\alpha x+\beta) \end{bmatrix} dx$$

في هذه الحالة نفرض $u = P(x)$ و الباقي هو dv

الحالة الثانية: $P(x)$ كثير حدود من المرتبة (n)

$$I = P(x) \cdot \begin{bmatrix} ln^n(\alpha x+\beta) \\ arcsin(\alpha x+\beta) \\ arccos(\alpha x+\beta) \\ arctan(\alpha x+\beta) \\ arccot(\alpha x+\beta) \\ sinh^{-1}(\alpha x+\beta) \\ cosh^{-1}(\alpha x+\beta) \\ tanh^{-1}(\alpha x+\beta) \\ coth^{-1}(\alpha x+\beta) \end{bmatrix} dx$$

في هذه الحالة نفرض $dv = P(x)dx$ و الباقي هو u

كما نستخدم التكامل بالتجزئة في بعض الحالات المعقدة التي يمكن تجزئتها .

احسب كل مما يأتي :

❶ $I = \int e^x \cdot cosx \cdot dx$

$$Let : [u = e^x \to du = e^x dx]$$

$$: [dv = cosx \cdot dx \to v = sinx]$$

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$I = e^x \cdot sinx - \int sinx \cdot e^x \cdot dx$$

$$I = e^x \cdot sinx - \underbrace{\int e^x \cdot sinx \cdot dx}_{J}$$

$$\boxed{I = e^x \cdot sinx - J} \cdots\cdots (1)$$

$$J = \int e^x \cdot sinx \cdot dx$$

$$Let : [\bar{u} = e^x \to d\bar{u} = e^x dx]$$

$$: [d\bar{v} = sinx \cdot dx \to \bar{v} = -cosx]$$

$$J = \bar{u} \cdot \bar{v} - \int \bar{v} \cdot d\bar{u}$$

$$J = -e^x \cdot cosx + \int cosx \cdot e^x \cdot dx$$

$$J = -e^x \cdot cosx + \underbrace{\int e^x \cdot sinx \cdot du}_{I}$$

$$\boxed{J = -e^x \cdot cosx + I} \cdots\cdots (2)$$

نعوض العلاقة (2) في العلاقة (1) فنجد :

$$I = e^x \cdot sinx - (-e^x \cdot cosx + I)$$

$$I = e^x \cdot sinx + e^x \cdot cosx - I$$

$$2I = e^x(sinx + cosx)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}e^x(sinx + cosx) + C}$$

أمثلة على التكاملات الدوّارة :

◉ $\boxed{*\,1\,*}$ $I = \int sin(lnx)dx$

$$Let : t = lnx \to x = e^t \to dx = e^t dt$$

$$I = \int sint \cdot e^t \cdot dt$$

◉ $\boxed{*\,2\,*}$ $I = \int sinx \cdot sinhx \cdot dx$

◉ $\boxed{*\,3\,*}$ $I = \int 3^x \cdot e^x \cdot dx$

❷ $I = \int \frac{x \cdot arctanx \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$Let : \begin{cases} u = arctanx \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow v = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$I = \sqrt{1+x^2} \cdot arctanx - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I = \sqrt{1+x^2} \cdot arctanx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{I = \sqrt{1+x^2} \cdot arctanx - sinh^{-1}x + C}$$

❸ $I = \int sinh^{-1}x \cdot dx$

$$Let : \begin{cases} u = sinh^{-1}x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = uv - \int vdu$$

$$I = x \cdot sinh^{-1}x - \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$I = x \cdot sinh^{-1}x - \int \frac{2x \cdot dx}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{I = x \cdot sinh^{-1}x - \sqrt{1+x^2} + C}$$

❹ $I = \int \frac{lnx \cdot dx}{\sqrt{x}}$

$$Let : \begin{cases} u = lnx \ \to du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \to v = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$I = uv - \int vdu$$

$$I = 2\sqrt{x} \cdot lnx - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$I = 2\sqrt{x} \cdot lnx - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{I = 2\sqrt{x} \cdot lnx - 4\sqrt{x} + C}$$

أمثلة على التكاملات بالتجزئة :

◉ $\boxed{*\ 1\ *}$ $I = \int x \cdot sinx \cdot cosx \cdot dx$

$$I = \int x \cdot \frac{1}{2} sin2x \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{Let:u} \cdot \underbrace{sin2x \cdot dx}_{Let:dv}$$

◉ $\boxed{*\ 2\ *}$ $I = \int e^{x} \cdot cos7x \cdot cos5x \cdot dx$

$$I = \int e^{x} \cdot \underbrace{cos7x \cdot cos5x}_{\frac{1}{2}[cos12x + cos2x]} \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int [e^{x} \cdot cos12x + e^{x} \cdot cos2x] \cdot dx$$

$$I = \underbrace{\frac{1}{2}\int e^{x} \cdot cos12x \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int e^{x} \cdot cos2x \cdot dx}_{I_2}$$

ثالثاً: حساب التكامل بطريقة تغيير المتحول:

نبين فيما يلي جدولاً لبعض التحويلات المهمة و الأكثر استخداماً:

نتيجة التحويل	التحويل المقترح	المقدار المراد تكامله
$\sqrt{a^2-b^2x^2}=a\cdot cost$	$bx=a\cdot sint$	$\sqrt{a^2-b^2x^2}$
$\sqrt{b^2x^2-a^2}=a\cdot sinht$	$bx=a\cdot cosht$	$\sqrt{b^2x^2-a^2}$
$\sqrt{b^2x^2+a^2}=a\cdot cosht$	$bx=a\cdot sinht$	$\sqrt{b^2x^2+a^2}$

فيما يلي تذكير ببعض قوانين الدوال الزائدية القطعية و القطعية العكسية :

$$cosh^2x-sinh^2x=1$$

$$sinh2x=2\cdot sinhx\cdot coshx$$

$$cosh2x=cosh^2x+sinh^2x$$

$$cosh^2x=\frac{cosh2x+1}{2}$$

$$sinh^2x=\frac{cosh2x-1}{2}$$

$$sinh^{-1}x=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ :\ x\in\ ]-\infty,+\infty[$$

$$cosh^{-1}x=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ :\in[+1,+\infty[$$

$$tanh^{-1}x=ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ :\ x\in\ ]-1,+1[$$