التكامل غير المحدد

ثالثاً: حساب التكامل بطريقة تغيير المتحول:

نبين فيما يلي جدولاً لبعض التحويلات المهمة و الأكثر استخداماً:

نتيجة التحويل	التحويل المقترح	المقدار المراد تكامله
$\sqrt{a^2-b^2x^2}=a\cdot cost$	$bx=a\cdot sint$	$\sqrt{a^2-b^2x^2}$
$\sqrt{b^2x^2-a^2}=a\cdot sinht$	$bx=a\cdot cosht$	$\sqrt{b^2x^2-a^2}$
$\sqrt{b^2x^2+a^2}=a\cdot cosht$	$bx=a\cdot sinht$	$\sqrt{b^2x^2+a^2}$

فيما يلي تذكير ببعض قوانين الدوال الزائدية القطعية و القطعية العكسية :

$$cosh^2x-sinh^2x=1$$
$$sinh2x=2\cdot sinhx\cdot coshx$$
$$cosh2x=cosh^2x+sinh^2x$$
$$cosh^2x=\frac{cosh2x+1}{2}$$
$$sinh^2x=\frac{cosh2x-1}{2}$$
$$sinh^{-1}x=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) : x\in\,]-\infty,+\infty[$$
$$cosh^{-1}x=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \ : x\in[+1,+\infty[$$
$$tanh^{-1}x=ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ :\ \ x\in\,]-1,+1[$$

احسب التكامل: $I = \int \sqrt{1+x^2} \cdot dx$

$$Let : x = sinht \rightarrow dx = cosht \cdot dt$$

$$I = \int \sqrt{1 + (sinht)^2} cosht \cdot dt$$

$$I = \int \sqrt{(cosht)^2} cosht \cdot dt$$

$$I = \int cosh^2 t \cdot dt = \int \frac{cosh2t+1}{2} dt$$

$$I = \frac{1}{2} \int (cosh2t + 1) \cdot dt$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} sinh2t + t \right] + C$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \times 2 \cdot sinht \cdot cosht + t \right] + C$$

$$I = \frac{1}{2} [sinht \cdot cosht + t] + C \cdots \cdots (*)$$

للعودة للمتغير الأصلي x نتبع ما يأتي:

$$x = sinht \rightarrow t = sinh^{-1} x$$

$$cosh^2 t - sinh^2 t = 1$$

$$cosh^2 t - x^2 = 1 \rightarrow cosh^2 t = 1 + x^2$$

$$cosht = \sqrt{1 + x^2}$$

نعوض ما سبق نذكره في العلاقة $(*)$:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \left[x \cdot \sqrt{1 + x^2} + sinh^{-1} x \right] + C}$$

رابعاً: نماذج تكاملية شهيرة:

❶ النموذج الأول : $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

فكرة التكامل : نتمم المقام إلى مربع كامل و ذلك بعد إخراج (a) ، فنحصل على أحد الشكلين التاليين :

$$\int \frac{dt}{k^2+t^2} = \frac{1}{k} arctan\left(\frac{t}{k}\right) = -\frac{1}{k} arccot\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\int \frac{dt}{k^2-t^2} = \frac{1}{k} tanh^{-1}\left(\frac{t}{k}\right) = +\frac{1}{k} coth^{-1}\left(\frac{t}{k}\right)$$

تطبيق عددي : احسب التكامل : $I = \int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$

$$I = \int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+6} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$

$$Let: t = x+2 \rightarrow dt = dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}} arctan\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right] + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C}$$

❷ النموذج الثاني : $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$

فكرة التكامل : نظهر في البسط مشتق المقام ، ثم نجزئ الكسر الناتج إلى كسرين ، الأول فيه البسط مشتق المقام و تكامله هو لوغاريتم المقام ، أما الثاني فهو نموذج أول " يُكامل كما في الفقرة السابق "

تطبيق عددي : احسب التكامل : $I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-8} dx$

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x-8} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-8} + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-8}$$

$$I = \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x - 8| + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x+1-9}$$

$$I = \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x - 8| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-9}$$

$$I = \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x - 8| - 4 \int \frac{dx}{(3)^2-(x-1)^2}$$

$$I = \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x - 8| - 4 \left[\frac{1}{3} tanh^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{I = ln\sqrt{|x^2 - 2x - 8|} - \frac{4}{3} tanh^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C}$$

❸ النموذج الثالث : $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

فكرة التكامل : نتمم ما تحت الجذر إلى مربع كامل و ذلك بعد إخراج (a) ، فنحصل على أحد الأشكال التالية :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = +sinh^{-1}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}} = +cosh^{-1}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = +arcsin\left(\frac{t}{k}\right) = -arccos\left(\frac{t}{k}\right)$$

❹ النموذج الرابع : $I_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

فكرة التكامل : نظهر في البسط مشتق ما تحت الجذر ، ثم نجزئ الكسر الناتج إلى كسرين ، الأول فيه البسط مشتق ما تحت الجذر و تكامله هو ضعفي الجذر المقام ، أما الثاني فهو نموذج ثالث " يُكامل كما في الفقرة السابق "

تطبيق عددي : احسب التكامل : $I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$

$$I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}$$

$$I = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}}_{I_3}$$

$$I = \frac{5}{2}\left[2\sqrt{x^2+4x+10}\right] - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4+6}}$$

$$I = \frac{5}{2}\left[2\sqrt{x^2+4x+10}\right] - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$I = \frac{5}{2}\left[2\sqrt{x^2+4x+10}\right] - 7\left[sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)\right] + C$$

$$\boxed{I = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C}$$

هناك بعض أشكال التكاملات التي يمكن أن تُرد إلى أحد النماذج التكاملية الشهيرة:

◉ $\boxed{*\,1\,*}$ $I = \int \sqrt{\frac{Ax+B}{\alpha x+\beta}}\,dx$

$$I = \int \frac{\sqrt{Ax+B}}{\sqrt{\alpha x+\beta}}\,dx = \int \frac{\sqrt{Ax+B}\times\sqrt{Ax+B}}{\sqrt{\alpha x+\beta}\times\sqrt{Ax+B}}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = I_4$$

$$I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = I_4$$

◉ $\boxed{*\,2\,*}$ $I = \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

التحويل المناسب هو $u = \frac{1}{(\alpha x+\beta)}$ حيث يرد هذا التكامل إلى أحد النموذجين الشهيرين I_3 أو I_4

توضيح التكامل الأخير: $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+4x+1}}$

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2+4x+1}}$$

$$Let: u = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{u} \to dx = -\frac{du}{u^2}$$

$$I=\int\frac{(u)\left(-\frac{du}{u^2}\right)}{\sqrt{5\left(\frac{1}{u}\right)^2+4\left(\frac{1}{u}\right)+1}}=-\int\frac{\frac{du}{u}}{\sqrt{\underbrace{\frac{5}{u^2}}_{1}+\underbrace{\frac{4}{u}}_{u}+\underbrace{\frac{1}{1}}_{u^2}}}$$

$$I=-\int\frac{\frac{du}{u}}{\sqrt{\frac{5+4u+u^2}{u^2}}}=-\int\frac{\frac{du}{u}}{\frac{\sqrt{5+4u+u^2}}{u}}$$

$$I=-\int\frac{du}{\sqrt{5+4u+u^2}}=I_3\cdots$$

بالاستفادة مما سبق يمكن حساب التكاملين التاليين بنفس الأسلوب المذكور بالتمرين أعلاه.

◉ $\boxed{*\,1\,*}$ $I=\int\frac{cosx\cdot dx}{sin^2x-6sinx+12}$

$$Let:y=sinx\rightarrow dy=cosx\cdot dx$$

$$I=\int\frac{dy}{y^2-6u+12}=I_1\ \cdots$$

◉ $\boxed{*\,2\,*}$ $I=\int\frac{e^x\cdot dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

$$Let:y=e^x\rightarrow dy=e^x\cdot dx$$

$$I=\int\frac{dy}{\sqrt{1+y+y^2}}=I_3\ \cdots$$

◉ $\boxed{*\,3\,*}$ $I=\int\frac{lnx\cdot dx}{x\sqrt{1-4lnx-ln^2x}}$

$$Let:y=lnx\rightarrow dy=\frac{dx}{x}$$

$$I=\int\frac{y\cdot dy}{\sqrt{1-4y-y^2}}=I_4\ \cdots$$