

التكامل غير المحدد

خامساً: التكامل باستخدام الكسور الجزئية (تفريق الكسور):

① الكسور النظامية :

وتأخذ الشكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود وبحيث درجة $P(x)$ أصغر من درجة $Q(x)$

② الكسور غير النظامية :

وتأخذ الشكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود وبحيث درجة $P(x)$ أكبر من درجة $Q(x)$

❶ مكاملة الكسور النظامية :

❶-❶ الحالة الأولى : المقام يحوي على عوامل من الدرجة الأولى غير مكررة:

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \dots\dots (*)$$

• للحصول على A نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x + 2)$ ونجعل $(x = -2)$ فنجد قيمة

$$[A = -1/3]$$

• للحصول على B نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x - 1)$ ونجعل $(x = +1)$ فنجد قيمة

$$[B = +1/3]$$

$$I = \int \left(-\frac{1/3}{(x+2)} + \frac{1/3}{(x-1)} \right) dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{3} (\ln|x-1| - \ln|x+2|) + C$$

$$I = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \rightarrow \boxed{I = \ln^3 \sqrt{\ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|} + C}$$

❶-❷ الحالة الثانية : المقام يحوي على عوامل من الدرجة الأولى مكررة:

$$I = \int \frac{(2x+4)}{x^3-2x^2} dx = \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx$$

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \dots\dots (*)$$

• للحصول على C نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x-2)$ ونجعل

$$[C = +2] \text{ فنجد قيمة } (x = +2)$$

• للحصول على B نضرب طرفي العلاقة (*) بـ (x^2) ونجعل $(x = 0)$

$$[B = -2] \text{ فنجد قيمة}$$

• للحصول على A نضرب طرفي العلاقة (*) بـ (x) ونجعل

$$[A = -2] \text{ فنجد قيمة } (x \rightarrow +\infty)$$

$$I = \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -2 \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$I = 2 \left(\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+2| \right) + C$$

$$I = 2 \left(\ln|x| - \ln|x+2| - \frac{1}{x} \right) + C$$

$$I = I = 2 \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{2}{x} + C$$

$$\boxed{I = \ln \left(\frac{x}{x-2} \right)^2 - \frac{2}{x} + C}$$

❶-❸ الحالة الثانية : المقام يحوي على عوامل من الدرجة الثانية غير مكررة:

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$1 = (A + B)x^2 + (B + C)x + (A + C)$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left(A = +\frac{1}{2} \right), \left(B = -\frac{1}{2} \right), \left(C = +\frac{1}{2} \right)$$

$$I = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2x+1/2}{x^2+1} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \arctan x \right) + C$$

$$I = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$I = \ln\sqrt{|x+1|} - \ln\sqrt[4]{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$I = \ln \frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt[4]{x^2+1}} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

② مكاملة الكسور غير النظامية :

في هذه المكاملة نسعى دوماً لإيجاد حاصل قسمة البسط على المقام ، فنحصل على كثير حدود و كسر نظامي نكامله بالطرق المدروسة سابقاً

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$I = \int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \arctan x + C$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \arctan x + C$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x \\ \hline x^2 + 1 \overline{) x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 1} \\ \underline{x^4 + x^2} \\ 3x^3 + 3x + 1 \\ \underline{3x^3 + 3x + 1} \\ +1 \end{array}$$