



تابع الإيرادات الإجمالي

سنتحدث في هذه المحاضرة المفاهيم والأفكار الآتية:

- الإيرادات والتكلفة (الكلية والثابتة والمتغيرة).
- الربح والخسارة ونقطة التعادل.
- مجموعة مسائل.

الإيرادات TR : تمثل كل العائدات من المشروع أي الربح مع رأس المال وتعطى بالعلاقة:

$$TR = \text{الطلب (الكمية)} * \text{سعر}$$
$$TR = P * D$$

التكلفة الكلية TC : Total Cost وهي مجموع التكلفة الثابتة بالإضافة إلى التكلفة المتغيرة.

$$TC = CF + CV$$

التكلفة الثابتة CF : Fixed Cost وهي التكلفة التي لا ترتبط بحجم الانتاج مثل (أجار المحل - أجار الآلات - يومية العامل ...).

التكلفة المتغيرة CV : Variable Cost وهي التكاليف التي ترتبط بحجم الانتاج (كلفة المواد الأولية - عدد العمال - عدد الآليات ...).

$$\Rightarrow TC = CF + CV * D$$

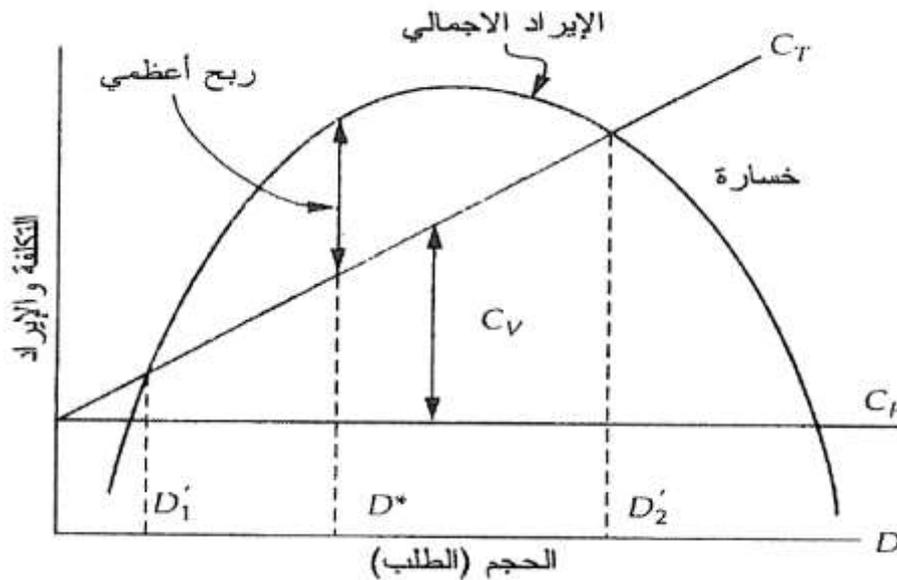
للقطعة الواحدة

نميز حالتين لتابع الإيراد:

الحالة الأولى: السعر تابع للطلب

$$P = a * D + b \Rightarrow TR = (a * D + b) * D \Rightarrow TR = a * D^2 + b * D$$

أي أن تابع الإيراد من الدرجة الثانية بالنسبة للكمية المطلوبة.



**الربح Profit:**

هو أهم مؤشر لأي مشروع وهو عبارة عن الإيرادات TR مطروحاً منها الكلفة الكلية للمشروع TC حيث:

$$Profit = TR - TC$$

$$Profit = TR - TC = (P * D) - (CV + CF)$$

لإيجاد الكمية الحدية D^* التي تعطي أعلى ربح نشق تابع الربح بالنسبة لـ D ونعدم المشتق فنحصل على قيمة D^* :

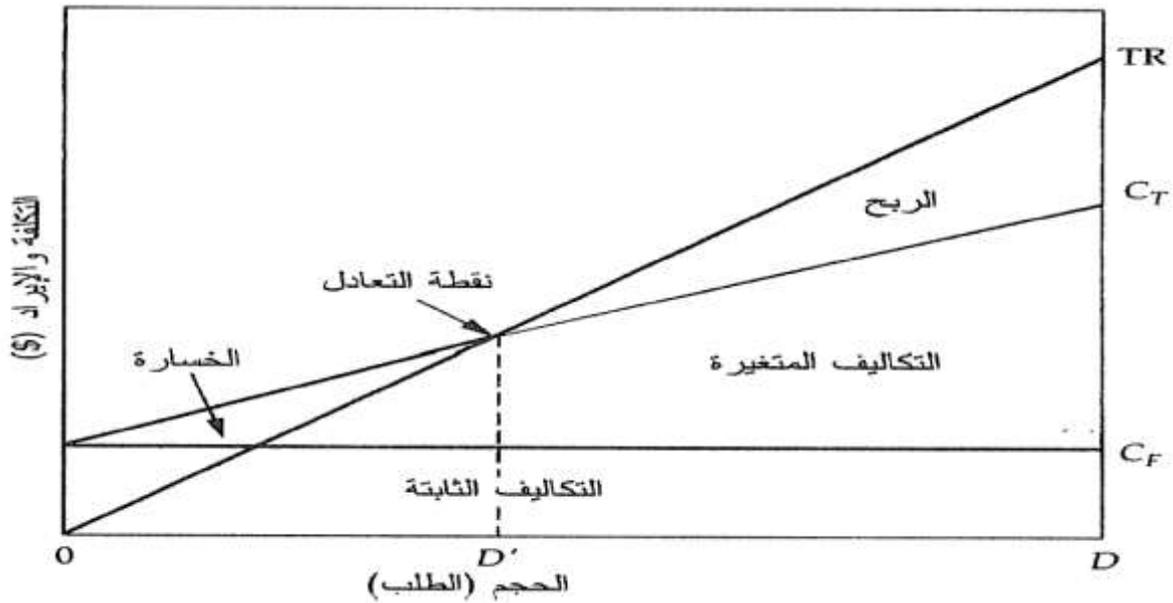
ملاحظة: قد يكون التابع السابق تابع خسارة وذلك عندما يكون الإيراد أقل من التكلفة الكلية ($TR < TC$).

نقطة التعادل:

هي النقطة التي ينعدم فيها الربح أي عندما تكون الإيرادات تساوي للتكاليف الكلية أي:

$$TR = TC \Leftrightarrow Profit = 0$$

الحالة الثانية: السعر ليس تابع للطلب:



في هذه الحالة يكون تابع الإيراد بشكل مستقيم ولدينا نقطة تعادل واحدة (قبلها خسارة وبعدها ربح).

مسألة (1):

تنتج إحدى الشركات لوحات دارات تستخدم في تحديث تجهيزات الحاسوب المتقدمة. تبلغ التكلفة الثابتة شهرياً

$42,000\$$ وتبلغ التكلفة المتغيرة $53\$$ لكل لوحة دارة. ويبلغ سعر المبيع للقطعة الواحدة $P = 150 - 0.02 * D$

والحد الأقصى لإنتاج المصنع 40,000 قطعة / الشهر. والمطلوب:



- 1- عين الحد الأمثل للطلب لهذا المنتج.
- 2- ما هو الحد الأقصى للربح في الشهر.
- 3- عند أي حجوم يقع التعادل.
- 4- ما هو مجال الطلب المربح للشركة.

الحل:

الحد الأمثل للطلب:

$$Profit = TR - TC = (P * D) - (CV + CF)$$

$$\Rightarrow Profit = (P * D) - \left(CF + CV_{\text{للقطعة الواحدة}} * D \right)$$

$$Profit = ((150 - 0.02 * D) * D) - (42,000 + 53 * D)$$

$$\Rightarrow Profit = -0.02 * D^2 + 97 * D - 42,000$$

نشتق التابع ومن ثم نعدم المشتق:

$$\frac{d \text{ profit}}{dD} = -0.04 * D^* + 97 \Rightarrow \frac{d \text{ profit}}{dD} = 0 \Rightarrow D^* = 2,425 \text{ Unit/month}$$

وللتأكد من أن هذه القيمة أعظمية نوجد المشتق الثاني لتابع الربح وإذا كانت القيمة سالبة فإنها تمثل ربح أعظمي.

$$\frac{d^2 \text{ profit}}{d^2 D} = -0.04 < 0 \text{ فهي قيمة أعظمية}$$

الحد الأقصى للربح: نعوض (D^*) في تابع الربح:

$$\Rightarrow Profit = -0.02 * (2,425)^2 + 97 * 2,425 - 42,000 = 75,612.5 \$$$

حساب نقطتي التعادل:

$$TR = TC \Leftrightarrow Profit = 0$$

$$\Rightarrow Profit = -0.02 * D^2 + 97 * D - 42,000 = 0$$

$$D_1 = 4369 \quad , \quad D_2 = 481$$

لدينا حلين

ومنه يكون مجال الطلب المربح هو المحصور بين [481 - 4,369] قطعة.



مسألة (2):

قدرت إحدى الشركات تقريباً العلاقة بين سعر بيع أحد منتجاتها والكمية المباعة شهرياً كما يلي: $D = 780 - 10P$ حيث D الطلب أو الكمية المباعة شهرياً، P السعر بالدولار. تبلغ التكلفة الثابتة \$800 في الشهر، وتبلغ التكلفة المتغيرة \$30 للوحدة المنتجة. ما عدد الوحدات D^* اللازم انتاجها في الشهر وبيعها لزيادة الربح إلى الحد الأقصى؟ وما هو الحد الأقصى للربح العائد لهذا المنتج في الشهر؟ حدد كذلك D_1, D_2 .

الحل:

الحد الأمثل للطلب:

$$D = 780 - 10 * P \Rightarrow P = -0.1 * D + 78$$

$$Profit = TR - TC = (P * D) - (CV + CF)$$

$$\Rightarrow Profit = (P * D) - \left(CF + CV_{\text{للقطعة الواحدة}} * D \right)$$

$$Profit = ((78 - 0.1 * D) * D) - (800 + 30 * D)$$

$$\Rightarrow Profit = -0.1 * D^2 + 48 * D - 800$$

نشتق التابع ومن ثم نعدم المشتق:

$$\frac{d \text{ profit}}{dD} = -0.2 * D^* + 48 \Rightarrow \frac{d \text{ profit}}{dD} = 0 \Rightarrow D^* = 240 \text{ Unit/month}$$

وللتأكد من أن هذه القيمة أعظمية نوجد المشتق الثاني لتابع الربح وإذا كانت القيمة سالبة فإنها تمثل ربح أعظمي.

$$\frac{d^2 \text{ profit}}{d^2 D} = -0.2 < 0 \text{ فهي قيمة أعظمية}$$

الحد الأقصى للربح: نعوض (D^*) في تابع الربح:

$$\Rightarrow Profit = -0.1 * (240)^2 + 48 * 240 - 800 = 4,960 \$$$

حساب نقطتي التعادل:

$$TR = TC \Leftrightarrow Profit = 0 \Rightarrow Profit = -0.1 * D^2 + 48 * D - 800 = 0$$

$$D_1 = 462.7 \quad , \quad D_2 = 17.3$$

لدينا حلين



مسألة (3):

تنتج إحدى الشركات وتبيع منتجاً استهلاكياً وقد تمكنت حتى الآن من ضبط حجم المنتج بتغيير سعر المبيع. تسعى الشركة لزيادة ربحها الصافي إلى الحد الأقصى، وقد استنتجت أن العلاقة التقريبية بين السعر والطلب في الشهر هي $D = 500 - 5 * P$ ، حيث P هي سعر الوحدة بالدولار. تبلغ التكلفة الثابتة \$1,000 في الشهر، والتكلفة المتغيرة \$20 للوحدة، أجب على الاسئلة الآتية رياضياً وبيانياً

1- ماهو العدد الأمثل للوحدات التي يجب أن تنتج وتباع في الشهر؟

2- ماهو الحد الأقصى للربح في الشهر؟

3- ماهي كميات المبيعات الموافقة لنقاط التعادل (مجال حجم الطلب المربح)؟

الحل:

الحد الأمثل للطلب:

$$D = 500 - 5 * P \Rightarrow P = -0.2 * D + 100$$

$$Profit = TR - TC = (P * D) - (CV + CF)$$

$$\Rightarrow Profit = (P * D) - \left(CF + CV_{\text{للقطعة الواحدة}} * D \right)$$

$$Profit = ((100 - 0.2 * D) * D) - (1,000 + 20 * D)$$

$$\Rightarrow Profit = -0.2 * D^2 + 80 * D - 1,000$$

نشتق التابع ومن ثم نعدم المشتق:

$$\frac{d \text{ profit}}{dD} = -0.4 * D^* + 80 \Rightarrow \frac{d \text{ profit}}{dD} = 0 \Rightarrow D^* = 200 \text{ Unit/month}$$

وللتأكد من أن هذه القيمة أعظمية نوجد المشتق الثاني لتابع الربح وإذا كانت القيمة سالبة فإنها تمثل ربح أعظمي.

$$\frac{d^2 \text{ profit}}{d^2 D} = -0.4 < 0 \text{ فهي قيمة أعظمية}$$

الحد الأقصى للربح: نعوض (D^*) في تابع الربح:

$$\Rightarrow Profit = -0.2 * (200)^2 + 80 * 200 - 1,000 = 7,000 \$$$



حساب نقطتي التعادل:

$$TR = TC \Leftrightarrow Profit = 0 \Rightarrow Profit = -0.2 * D^2 + 80 * D - 1,000 = 0$$

$$D_1 = 387 \quad , \quad D_2 = 13$$
 لدينا حلين

ومنه يكون مجال الطلب المربح هو المحصور بين [13 - 378] قطعة.

مسألة (4):

اعتبرت إحدى الشركات أن السعر والطلب الشهري لإحدى منتجاتها يرتبطان بالمعادلة $D = \sqrt{400 - P}$ حيث: P سعر الوحدة بالدولار، D الطلب الشهري وتبلغ التكاليف الثابتة \$1,125 شهرياً أما التكاليف المتغيرة \$100 للوحدة. والمطلوب:

- 1- كم وحدة يجب أن تنتج وتباع كل شهر لزيادة الربح للحد الأقصى.
- 2- كيف تعلم أن الإجابة على الطلب السابق تزيد الربح للحد الأقصى.
- 3- أي من القيم الآتية لـ D تمثل نقطة التعادل ولماذا (15 وحدة - 20 وحدة - 25 وحدة).

الحل:

الحد الأمثل للطلب:

$$D = \sqrt{400 - P} \Rightarrow P = -D^2 + 400$$

$$Profit = TR - TC = (P * D) - (CV + CF)$$

$$\Rightarrow Profit = (P * D) - \left(CF + CV_{\text{للقطعة الواحدة}} * D \right)$$

$$Profit = ((400 - D^2) * D) - (1,125 + 100 * D)$$

$$\Rightarrow Profit = -D^3 + 300 * D - 1,125$$

نشتق التابع ومن ثم نعدم المشتق:

$$\frac{d \text{ profit}}{dD} = -3D^2 + 300 \Rightarrow \frac{d \text{ profit}}{dD} = 0 \Rightarrow D^* = 10 \text{ Unit/month}$$

وللتأكد من أن هذه القيمة أعظمية نوجد المشتق الثاني لتابع الربح وإذا كانت القيمة سالبة فإنها تمثل ربح أعظمي.



$$\frac{d^2 profit}{d^2 D} = -6D \xrightarrow{D=10} -60 < 0 \text{ فهي قيمة أعظمية}$$

الحد الأقصى للربح: نعوض (D^*) في تابع الربح:

$$\Rightarrow Profit = -(10)^3 + 30 * 10 - 1,125 = 875 \$$$

حساب قيمة D التي تمثل نقطة التعادل:

$$TR = TC \Leftrightarrow Profit = 0 \Rightarrow Profit = -D^3 + 300 * D - 1,125 = 0$$

$$D_1 = -18.95 \quad , \quad D_2 = 15 \quad , \quad D_3 = 3.9 \quad \text{لدينا 3 حلول}$$

يمكن تعويض القيم المعطاة في نص السؤال في قيمة تابع الربح (القيمة التي تعدم التابع تمثل نقطة تعادل).

مسألة (5):

تبلغ الطاقة الانتاجية لأحد المعامل 4100 مضخة هيدروليكية في الشهر، التكاليف الثابتة (\$ 504,000) والتكاليف المتغيرة (\$ 166) للمضخة الواحدة وسعر بيع المضخة الواحدة (\$ 328) افترض أن المبيعات تساوي حجم الانتاج والمطلوب: ماهي نقطة التعادل مقدرة بعدد المضخات في الشهر، ماهي نسبة التخفيض التي ستحدث بالنسبة لنقطة التعادل إذا خفضت التكاليف الثابتة بنسبة 18% والتكاليف المتغيرة 6%.

الحل:

إيجاد نقطة التعادل:

$$Profit = 0 \Leftrightarrow TR = TC \Rightarrow 328 * D = 504,000 + 166 * D$$

$$\Rightarrow 162 * D = 504,000 \Rightarrow D = 3,111 \text{ Pump/month}$$

حساب نسبة التخفيض:

$$TR = TC_{new} \Rightarrow 328 * D' = 504,000 * (0.82) + 166 * (0.94) * D'$$

$$\Rightarrow 328 * D' = 413,280 + 156.04 * D'$$

$$\Rightarrow 171.96 * D' = 413,280 \Rightarrow D = 2,403 \text{ Pump/month}$$

$$\text{نسبة التخفيض} = \frac{D - D'}{D} = \frac{3,111 - 2,403}{3,111} = 22.76\%$$



16.2 تنتج إحدى الشركات وتبيع سلعة استهلاكية وهي قادرة على ضبط الطلب الشهري على المنتج عن طريق تعديل سعر البيع. العلاقة التقريبية بين السعر والطلب هي كالتالي:

$$p = \$38 + \frac{2,700}{D} - \frac{5,000}{D^2}, \text{ for } D > 1$$

حيث p سعر الوحدة بالدولار، و D الطلب الشهري. تسعى الشركة لزيادة ربحها إلى الحد الأقصى. تبلغ التكلفة الثابتة \$1,000 في الشهر، والتكلفة المتغيرة (c_v) \$40 للوحدة. (3.2)
آ. ما عدد الوحدات التي يجب أن تنتج وتباع شهرياً لزيادة الربح إلى الحد الأقصى؟
ب. بين كيف أن جوابك على السؤال (أ) يزيد الربح إلى الحد الأقصى.

الحل:

$$TR = P * D = \left(38 + \frac{2700}{D} - \frac{5000}{D^2} \right) * D$$

$$TC = CP + CV \Rightarrow 1000 + 40 * D$$

$$\Rightarrow Profit = (P * D) - (CV + CF)$$

$$\Rightarrow Profit = \left(38 + \frac{2700}{D} - \frac{5000}{D^2} \right) * D - (1000 + 40 * D)$$

$$Profit = \left(38D + 2700 - \frac{5000}{D} \right) - (1000 + 40 * D)$$

$$\Rightarrow Profit = -2 * D - \frac{5000}{D} - 1,700$$

نشتق التابع ومن ثم نعدم المشتق:

$$\frac{d \text{ profit}}{dD} = -2 * D + \frac{5000}{D^2} \Rightarrow \frac{d \text{ profit}}{dD} = 0 \Rightarrow D^* = 50 \text{ Unit/month}$$

ولمعرفة إذا كانت القيمة السابقة تعطي ربحاً أعظماً

نشتق تابع الربح مرة ثانية:

$$\frac{d^2 \text{ profit}}{d^2 D} = -\frac{2D * 5000}{D^4} \Big|_{D=50} \Rightarrow \text{فهي قيمة أعظمية } < 0 \text{ سالب}$$



18.2 تبلغ التكاليف الثابتة لتشغيل أحد المصانع \$2,000,000 في العام، وتبلغ طاقته الإنتاجية 100,000 أداة كهربائية منزلية في العام. تبلغ التكلفة المتغيرة \$40 للوحدة، ويبيع المنتج بمبلغ \$90 للوحدة. أ. أنشئ مخطط التعادل الاقتصادي.

ب. قارن الربح السنوي عند تشغيل المعمل بمعدل 90% من طاقته مع الربح السنوي عند تشغيله بمعدل 100% من طاقته. افترض أن الإنتاج بطاقة 90% يباع بسعر \$90 للوحدة، وأن الـ 10% المتبقية من الإنتاج تباع بسعر \$70 للوحدة. (3.2)

الحل:

أ. عند نقطة التوازن نستطيع أن نكتب:

التكاليف = الإيرادات

$$TR = TC \Rightarrow (P * D) = (CV + CF)$$

$$90 * D = 2,000,000 + 40 * D$$

$$\Rightarrow D = 40,000 \text{ Unit/Year}$$

ب. المقارنة:

الربح عند إنتاج 90% من طاقته الإجمالية

$$Profit = TR - TC$$

$$Profit = 90 * 0.9 * 100,000 - (2,000,000 + 40 * 0.9 * 100,000)$$

$$\Rightarrow Profit = 2,500,000 \$$$

الربح عند إنتاج 100% من طاقته الإجمالية

$$Profit = TR - TC$$

$$Profit = 90 * 0.9 * 100,000 + 70 * 0.1 * 100,000 - (2,000,000 + 40 * 100,000)$$

$$\Rightarrow Profit = 2,800,000 \$$$

نهاية المحاضرة



مسائل وظيفية

مسألة (1):

9.2 قدرت إحدى الشركات أن العلاقة بين سعر الوحدة والطلب في الشهر لمنح جديد محتمل هو تقريباً: $p = \$100.00 - \$0.10D$ باستطاعة الشركة إنتاج المادة عن طريق زيادة التكاليف الثابتة $\$17,500$ في الشهر، وتبلغ التكلفة المتغيرة المتوقعة $\$40.00$ للوحدة. ما هو الطلب الأمثل D^* ؟ واستناداً إلى هذا الطلب، هل يجب على الشركة إنتاج المادة الجديدة؟ لماذا؟ (3.2)

آ. اعمل على إيجاد الحل كاملاً باستخدام حساب التفاضل، بدءاً بصيغة الربح أو الخسارة شهرياً.
ب. حل بيانياً للتوصل إلى جواب تقريبي.

مسألة (2):

13.2 يجب إقامة موقع للنفايات الصلبة البلدية إما في الموقع A أو في الموقع B. بعد تصنيف بعض المواد الصلبة، ستنقل النفايات إلى معمل للطاقة الكهربائية حيث ستستخدم كوقود. يبين (الجدول P2-13) المعطيات المتعلقة بنقل النفايات من كلا الموقعين إلى المعمل.

الجدول P2-13، جدول المسألة 13.2

الموقع B	الموقع A	
3 أميال	4 أميال	متوسط مسافة النقل
\$100,000	\$5,000	قيمة الإيجار السنوي لموقع النفايات الصلبة
\$1.5 لكل ياردة ³ - ميل	\$1.5 لكل ياردة ³ - ميل	تكلفة النقل

آ. إذا كان معمل الطاقة سيدفع $\$8.00$ لكل ياردة مكعبة من النفايات الصلبة المصنفة المسلمة إليه، أين يجب أن يكون موقع النفايات الصلبة؟ استخدم وجهة نظر المدينة وافترض أن $200,000$ ياردة مكعبة من النفايات ستنقل إلى المعمل لمدة سنة واحدة فقط. لا بد من انتقاء أحد الموقعين. (2.2)

ب. إشارة إلى معمل الطاقة الكهربائية، فإن التكلفة Y مقدرة بالدولار في الساعة لإنتاج الكهرباء هي: $Y = 12 + 0.3X + 0.27X^2$ ، حيث تقدر X بالمليغا واط. تقدر عائدات بيع الكهرباء بالدولار وفي الساعة الواحدة بالمعادلة التالية: $15X - 0.2X^2$ جد قيمة X التي تعطي الحد الأقصى من الربح. (3.2)

مسألة (3):

15.2 بفرض أن لشركة ABC طاقة إنتاجية (وطاقة بيع) قدرها $\$1,000,000$ في الشهر. تبلغ تكاليفها الثابتة على مدى حيز كبير من الحجم $\$350,000$ في الشهر، وتكاليفها المتغيرة $\$0.50$ لكل دولار مبيعات. (3.2)

آ. ما الحجم السنوي الموافق لنقطة التعادل D' ؟ ارسم مخطط التعادل.

ب. ماذا يكون أثر تخفيض التكلفة المتغيرة للوحدة بنسبة 25% على D' ، إذا بذلك ازدادت التكلفة الثابتة بنسبة 10%؟
ج. ماذا يمكن أن يكون الأثر على D' إذا ما خفضت التكاليف الثابتة بنسبة 10% وازدادت التكلفة المتغيرة للوحدة بنفس النسبة؟