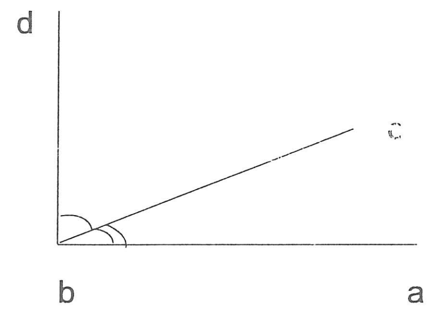
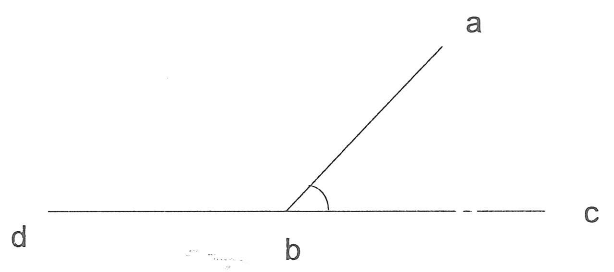
2"- **الزاويتان المتتامتان:** نقول عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموعهما يساوي قا.

$\widehat{abc} + \widehat{cbd} =$ قا.



3"- **الزاويتان المتكاملتان:** نقول عن زاويتين أنهما متكاملتان إذا كان مجموعهما يساوي 180 = 2قا .

كما هو الحال في الشكل التالي:

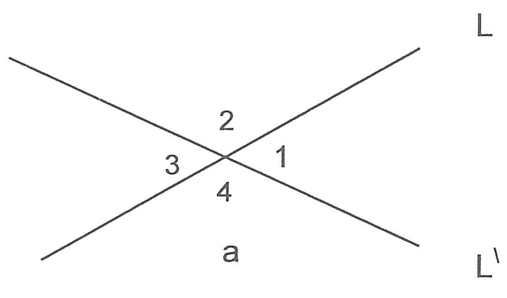


$\hat{abc} + \hat{cbd} = 2$ قا

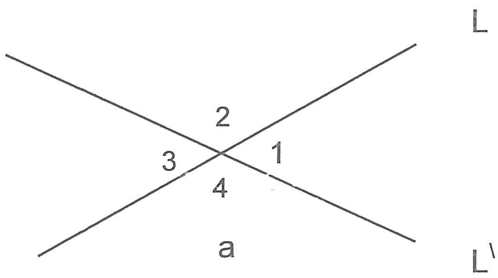
4"- **الزاويتان المتقابلتان بالرأس:** تنتج الزوايا المتقابلة بالرأس عن تقاطع المستقيمات، فإذا تقاطع المستقيمان

L , L' في نقطة ما ولتكن a ، فإننا نسمي الزاويتين $\hat{a}_1$ ، $\hat{a}_3$ زاويتين متقابلتين بالرأس، وكذلك الزاويتين :

$\hat{a}_2$ ، $\hat{a}_4$.



نظرية:الزاويتان المتقابلتان بالرأس متساويتان:



الفرض: الزاويتان $\hat{a}_3 , \hat{a}_1$ متقابلتان بالرأس

وكذلك $\hat{a}_4 , \hat{a}_2$ متقابلتان بالرأس

الطلب: $\hat{a}_4 = \hat{a}_2 \;, \hat{a}_3 = \hat{a}_1$

البرهان: إن مجموع الزاويتين (1) $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 = 180$ لأنهما زاويتان متكاملتان.

والزاويتين (2) $\hat{a}_3 + \hat{a}_2 = 180$ لأنهما زاويتان متكاملتان.

وبطرح العلاقتين نجد أن: $\hat{a}_1 - \hat{a}_3 = 0$

ومنه نستنتج أن: $\hat{a}_3 = \hat{a}_1$

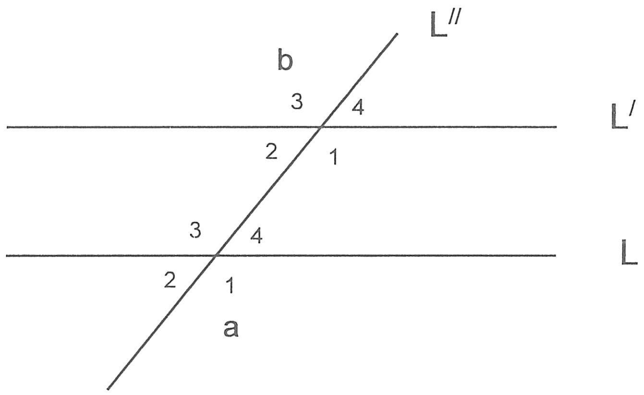
بنفس الطريقة نستطيع أن نثبت أن $\hat{a}_2 = \hat{a}_4$ وهو المطلوب.

يعتمد إثبات هذه النظرية على البديهية الثالثة من البديهيات الأساسية في الرياضيات والتي تقول:

<u>إذا أضفنا مقداراً واحداً إلى مقدارين متساويين فإن ناتجيهما يكونان متساويين.</u>

5". خواص مستقيمين متوازيين وقاطع لهما:

إذا كان L و L' مستقيمين متوازيين و L'' مستقيما" قاطعا" لهما في النقطتين a و b ، فإنه يكوّن حول النقطة a أربع زوايا هي: $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ و $\hat{a}_3$ و $\hat{a}_4$ ، وحول النقطة b أربع زوايا هي: $\hat{b}_1$ و $\hat{b}_2$ و $\hat{b}_3$ و $\hat{b}_4$ كما هو الحال في الشكل التالي:



وتكون العلاقة بين هذه الزوايا على النحو التالي:

. **الزوايا المتبادلة داخلا"**: وهي زوجين من الزوايا التي تقع بين المستقيمين المتوازيين ولكن بجهتين مختلفتين من المستقيم القاطع وهي:

$$\hat{a}_3 = \hat{b}_1$$
$$\hat{a}_4 = \hat{b}_2$$

زوايا متساوية بالتبادل الداخلي

أي أن الزوايا المتبادلة داخلا" تكون متساوية.

. **الزوايا المتناظرة**: وهي أربعة أزواج من الزوايا تقع بجهة واحدة من المستقيمين المتوازين ومن المستقيم القاطع وهي:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1$$
$$\hat{a}_2 = \hat{b}_2$$
$$\hat{a}_3 = \hat{b}_3$$
$$\hat{a}_4 = \hat{b}_4$$

زوايا متساوية بالتناظر

. **الزوايا المتبادلة خارجا**": وهي زوجين من الزوايا التي تقع خارج المستقيمين المتوازيين وبجهتين مختلفتين من المستقيم القاطع وهي:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_3$$

$$\hat{a}_2 = \hat{b}_4$$

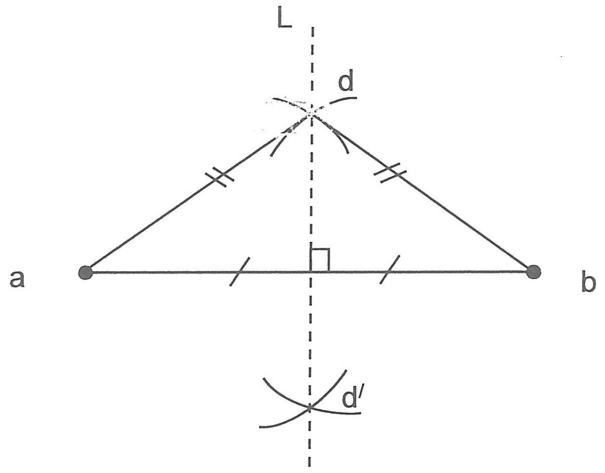
زوايا متساوية بالتبادل الخارجي

6". حالات إنشائية:

. إنشاء محور قطعة مستقيمة وخواصه:

ليكن لدينا القطعة المستقيمة [ab] ولإنشاء محورها نتبع الخطوات التالية:

1. نفتح الفرجار بفتحة أكبر من طول نصف القطعة المستقيمة [ab].
2. نثبت إبرة الفرجار في النقطة a ونرسم قوسي دائرة أعلى وأسفل [ab].
3. نثبت إبرة الفرجار في النقطة b ونرسم قوسي دائرة أعلى وأسفل [ab] فتتقاطع الأقواس في نقطتين ولتكن d و d'.
4. نرسم المستقيم L المار من d', d فنحصل على محور القطعة المستقيمة [ab].



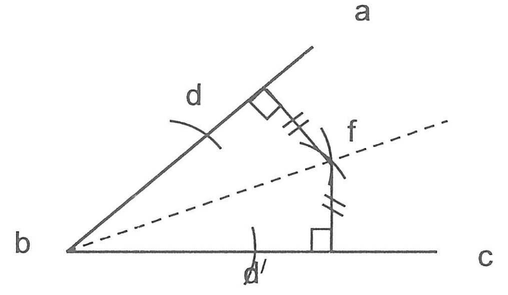
خواصه:

1. ينصف القطعة المستقيمة [ab].
2. يكون عموديا" على [ab].
3. كل نقطة منه تبعد نفس البعد عن طرفي القطعة المستقيمة [ab].

. إنشاء منصف زاوية وخواصه:

لتكن لدينا الزاوية $a\hat{b}c$ ولإنشاء منصفها نتبع الخطوات التالية:

1. نفتح الفرجار بفتحة لا على التعيين.
2. نثبت إبرة الفرجار في رأس الزاوية b ونرسم قوسي دائرة يقطعان ضلعي الزاوية في نقطتين ولتكن d و d'.
3. بنفس فتحة الفرجار أو بأي فتحة أخرى نثبت إبرة الفرجار في كل من d و d' ونرسم قوسي دائرة يتقاطعان في نقطة ولتكن f.
4. نرسم نصف المستقيم [bf فنحصل على منصف الزاوية $a\hat{b}c$، وذلك كما هو موضح في الشكل التالي:



خواصه:

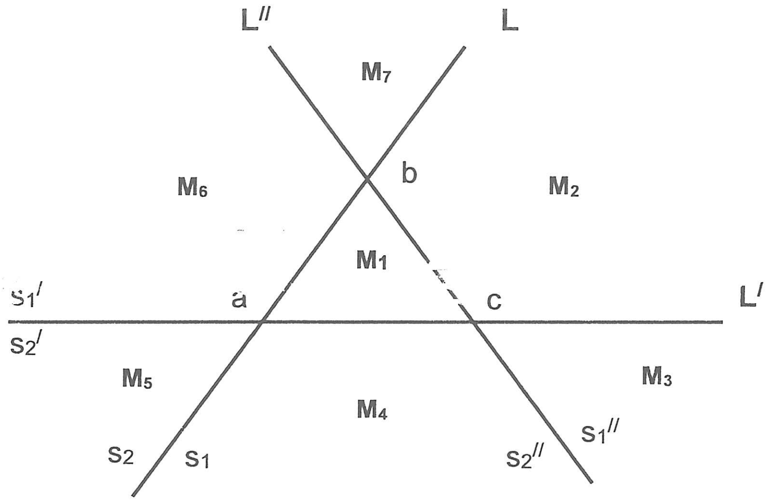
1. يقسم الزاوية إلى قسمين متساويين.
2. أي نقطة منه تبعد نفس البعد عن ضلعي الزاوية.

<u>**تذكير:** بعد نقطة عن مستقيم هو أقصر مسافة بين هذه النقطة والمستقيم، وبالتالي هو العمود النازل من هذه النقطة على المستقيم.</u>

تمارين البحث الثالث

القطاع الزاوي والزاوية

1. أثبت أن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان،
2. ليكن لدينا المستقيمان L ، L' المتقاطعان في النقطة a ، والنقطتان b ، b' من المستقيم L متناظرتان بالنسبة لـ a ، والنقطتان c ، c' من المستقيم L' متناظرتان بالنسبة لـ a، المطلوب: تعيين القطاعات الزاوية التي يمكن أن تتحدد بهذين المستقيمين أو بواحد منهما.
3. ليكن لدينا المستقيمات L ، L' ، L'' المتقاطعة في a ، b ، c والمحددة لسبع مناطق كما هو في الشكل التالي:



والمطلوب: 1". حدد أنصاف المستويات التي ينتج عن تقاطعها M1 ، M4 ,

2". ماذا يمثل $M_1 \cup M_4$ ؟.

3". ماذا يمثل القطاع الزاوي المنعكس $[\overset{\vee}{ab,ac}]$.

4. a ، b نقطتان مختلفتان من المستقيم L ، والمطلوب : تحديد موقع النقطة c في كل من الحالات التالية: 1". ليكون القطاع الزاوي $[\overset{\wedge}{ab,ac}]$ مستقيما".

2". ليكون القطاع الزاوي $[\overset{\wedge}{ab,ac}]$ صفريا".

3". لكي لا يكون القطاع الزاوي $[\overset{\wedge}{ab,ac}]$ صفريا" أو مستقيما".

5. $\hat{abc}$ ، $\hat{abd}$ زاويتان متجاورتان مجموعهما 180^0 ، $\hat{abc} > \hat{abd}$ ، فإذا كان [be منصفا" للزاوية $\hat{abc}$ ، [bf منصفا" للزاوية $\hat{abd}$ ، فالمطلوب: إثبات أن [be ، [bf متعامدان.

6. aa' ، cc' مستقيمان متقاطعان في النقطة b ، والزاويتان $\hat{abc}$ ، $\hat{a'bc'}$ متقابلتان بالرأس.

برهن أنه إذا كان [bd منصفا" للزاوية $\hat{abc}$ فإن النصف الثاني $[bd'$ منصف للزاوية $\hat{a'bc'}$.

7. لبكن لدينا القطعة المستقيمة [ab] ، والمطلوب إنشاء محورها وتحديد خواصه.

8. ليكن لدينا الزاوية $\hat{abc}$ ، والمطلوب إنشاء منصفها وتحديد خواصه.

9. ليكن لدينا المستقيم L ، a نقطة خارجة عنه، والمطلوب : رسم المستقيم L' المار من a والموازي للمستقيم L .

البـحث الرابع

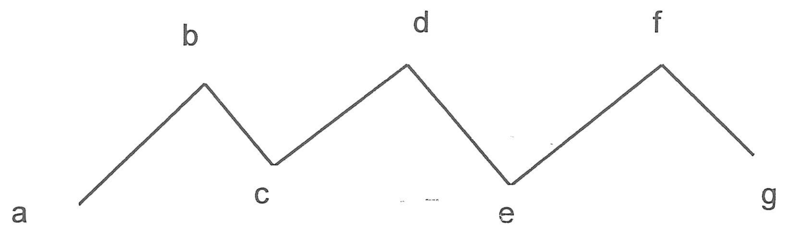
المثلثــات

أولاً – مفاهيم أساية في المثلثات :

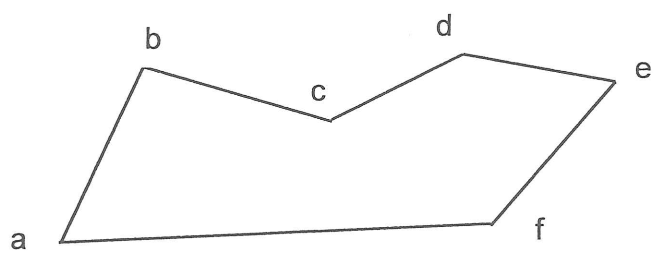
قبل الدخول في تحديد مفهوم المثلث وأنواعه وخصائصه لابد من تحديد مفهوم الخط المضلعي والمضلع المحدب والمضلع المقعر.

1- الخط المضلعي أو الخط المنكسر : هو اتحاد مجموعة قطع مستقيمة لكل منها حامل مختلف.

فالشكل التالي يمثل خطا" مضلعيا" مكونا" من القطع المستقيمة :[ab] , [bc] , [cd] , [de] , [ef] , [fg] .

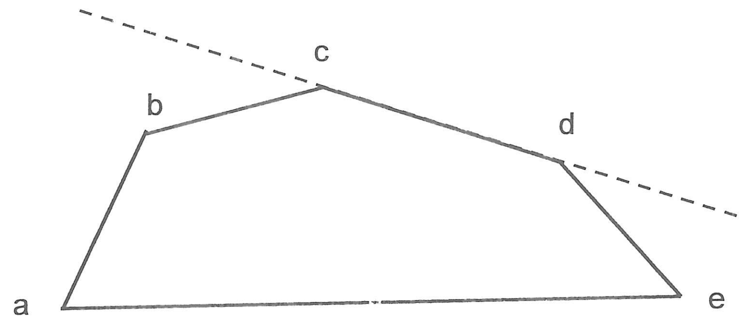


إذا اتحدت أطراف هذه القطع المستقيمة جميعها نحصل على شكل نسميه مضلعاً كما في الشكل التالي ، حيث نسمي كل قطعة فيه ضلعاً ونقاط الاتحاد رؤوس هذا المضلع. وذلك كما هو الحال في الشكل التالي:

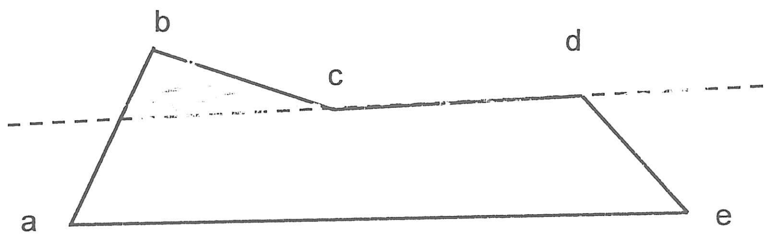


2- المضلع المحدب والمضلع المقعر :

نسمي المضلع مضلعاً محدباً إذا وقعت جميع نقاط هذا المضلع بجهة واحدة من حامل كل ضلع من أضلاعه كما هو الحال في الشكل التالي:



أما إذا وقعت أضلاع المضلع بجهتين مختلفتين من أحد حوامل أضلاعه فنسميه مضلعاً مقعراً كما هو الحال في الشكل التالي :



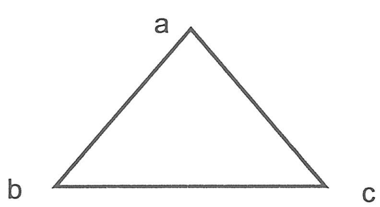
على هذا الأساس ، يمكن تعريف المثلث على الشكل التالي:

المثلث : هو مضلع محدب ثلاثي الأضلاع.

فإذا كانت c , b , a ثلاث نقاط غير متسامتة ، فإن اتحاد القطع المستقيمة [ab] , [bc] , [ca]

يشكل مثلثاً نرمز إليه بالرمز $\overset{\Delta}{abc}$ ، ونسمي النقاط c , b , a رؤوس هذا المثلث والزوايا

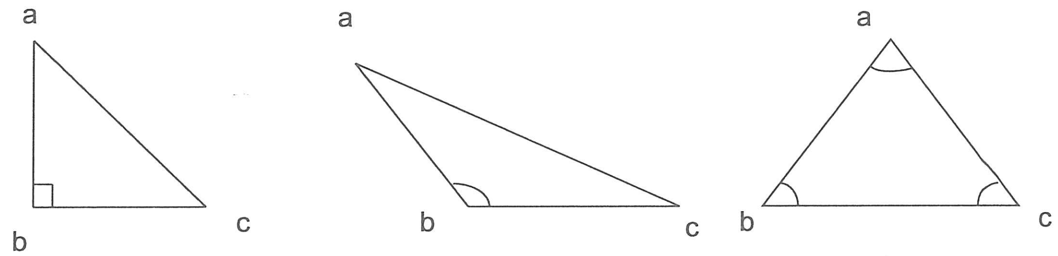
و $c\hat{a}b$ و $b\hat{c}a$ $a\hat{b}c$ زوايا المثلث ويمكن تسميتها بالزوايا $\hat{a}, \hat{c}, \hat{b}$.



3- **تصنيف المثلثات** : تصنف المثلثات إما وفقاً لزواياها أو وفقاً لأطوال أضلاعها:

1". <u>أنواع المثلثات وفقاً لقياس زواياها</u> : هنالك ثلاثة أنواع من المثلثات:

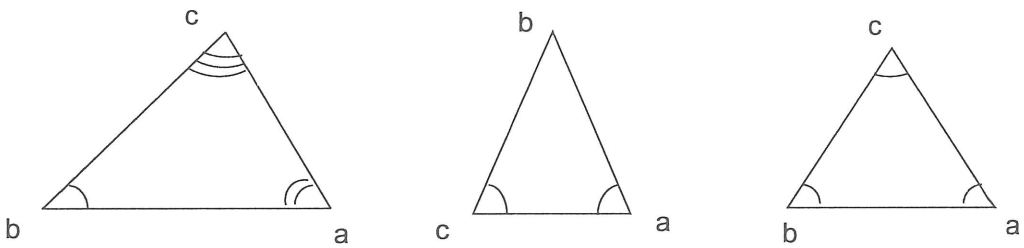
- مثلث حاد الزوايا : حيث تكون جميع الزوايا فيه حادة < 90^0 .
- مثلث منفرج الزاوية : حيث توجد في المثلث زاوية منفرجة > 90^0 .
- مثلث قائم الزاوية : حيث توجد فيه زاوية قائمة = 90^0.



قائم الزاوية   منفرج الزاوية   حاد الزوايا

2". <u>أنواع المثلثات وفقاً لأضلاعها</u> :

- مثلث متساوي الأضلاع : حيث تكون أطوال أضلاع المثلث متساوية.
- مثلث متساوي الساقين : فيه ضلعين متساويين.
- مثلث مختلف الأضلاع : طول كل ضلع فيه يختلف عن طول الضلع الآخر.



مختلف الأضلاع   متساوي الساقين   متساوي الأضلاع

لا بد من الإشارة إلى إن الزاوية المحصورة بين ساقي المثلث متساوي الساقين نسميها <u>رأس المثلث المتساوي الساقين</u> أما الضلع المقابل لهذه الزاوية فهي قاعدته.

أما الضلع المقابلة للزاوية القائمة في المثلث القائم فهي الوتر.