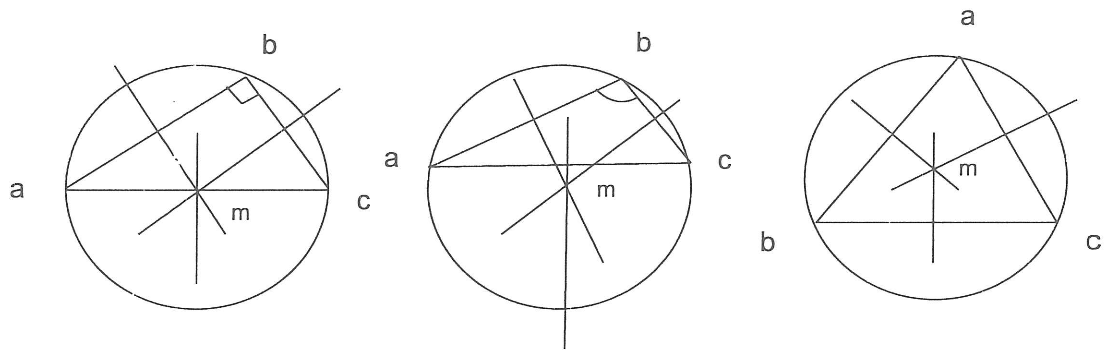
4- **عناصر المثلث** : وتتألف من أطوال أضلاعه وقياس زواياه، حيث مجموع قياس زوايا أي مثلث يساوي 180^0 مهما اختلف شكله، أي أن: $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=180°$

5- **محاور المثلث** : هي المستقيمات العمودية على أضلاع المثلث في منتصفها.

ولا بد من الإشارة إلى أن محاور المثلث تلتقي في نقطة واحدة متساوية الأبعاد عن رؤوس المثلث، وبالتالي تمثل هذه النقطة مركز دائرة تمر برؤوس المثلث كما هو الحال في الأشكال التالية:

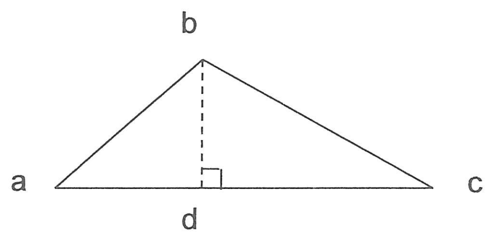


مثلث قائم الزاوية — مثلث منفرج الزاوية — مثلث حاد الزوايا

من الملاحظ أن نقطة تلاقي المحاور تكون داخل المثلث إذا كان حاد الزوايا وخارجه إذا كان منفرج الزاوية ومنتصف الوتر إذا كان المثلث قائم الزاوية.

6- **الارتفاع في المثلث** : هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابلة أو على امتدادها.

كما هو الحال في الشكل التالي:



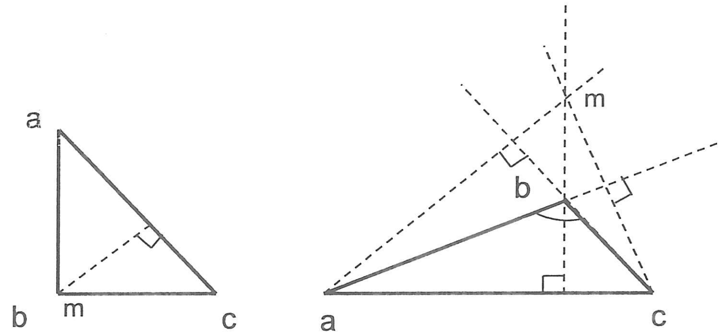
حيث [bd] هو الارتفاع في المثلث $\overset{\triangle}{abc}$ ، ونسميه الارتفاع المتعلق بالرأس b أو بالقاعدة [ac].

خاصة : لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة حيث تكون نقطة تلاقي الارتفاعات أو المستقيمات الحاملة لها:

- في داخل المثلث إذا كان حاد الزوايا.
- خارج المثلث إذا كان منفرج الزاوية.

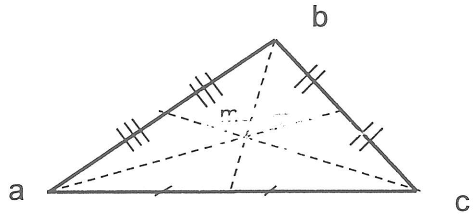
- رأس الزاوية القائمة إذا كان قائم الزاوية.

وذلك كما هو الحال في الشكل التالي:



قائم الزاوية   منفرج الزاوية   حاد الزوايا

7- **المتوسط في المثلث** :هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابلة. وعليه فإنه لكل مثلث ثلاثة متوسطات تلتقي في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث.

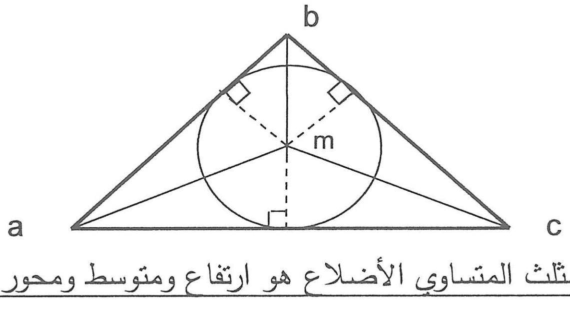


8- **منصف زاوية المثلث** : هو نصف المستقيم الذي ينصف إحدى زوايا المثلث ويصل رأس الزاوية بالضلع المقابلة.

في كل مثلث هنالك ثلاثة منصفات تلتقي بنقطة واحدة داخل المثلث ونسميها المنصفات الداخلية.

أما المنصفات الخارجية فهي أنصاف المستقيمات التي تقسم كل زاوية من زوايا المثلث الخارجية إلى قسمين متساويين.

خاصة : كل نقطة من منصف زاوية في المثلث تكون متساوية البعد عن ضلعي الزاوية لهذا المثلث، وبالتالي فإن منصفات المثلث الداخلية تلتقي في نقطة واحدة تكون مركز دائرة مرسومة في المثلث، أي تمس أضلاعه من الداخل.



خاصة: المنصف في المثلث المتساوي الأضلاع هو ارتفاع ومتوسط ومحور للضلع المقابلة.

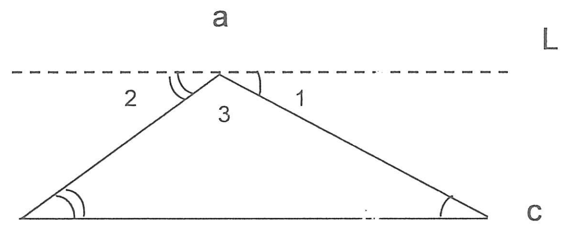
9- مجموع زوايا المثلث :

مبرهنة : مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين(180^0) .

الفرض : $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث

الطلب: $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=180°$

البرهان : نرسم المستقيم L يمر من a ويوازي الضلع [bc] كما هو الحال في الشكل التالي ، فنجد :



$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \hat{c}\\ \hat{a}_2 &= \hat{b}\end{aligned}\right\}$$ بالتبادل الداخلي

وبما أن: $\hat{a}_1+\hat{a}_2+\hat{a}_3=180^0$ لأنها تشكل زاوية مستقيمة. وبالتعويض كل زاوية بما تساويها نجد: $\hat{b}+\hat{c}+\hat{a}_3=180^0$ وهو المطلوب.

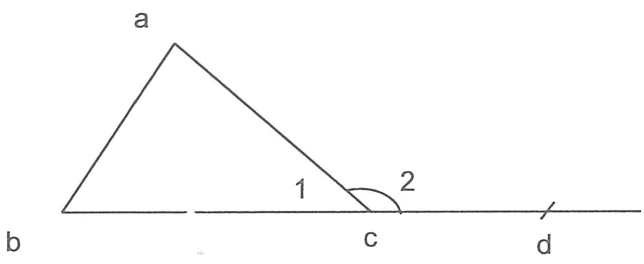
<u>من هذه النظرية نستنتج العلاقات التالية:</u>

- في المثلث لا يمكن أن يكون أكثر من زاوية واحدة قائمة أو زاوية واحدة منفرجة.
- في المثلث المتساوي الأضلاع كل زاوية تساوي$60°$.
- في المثلث القائم مجموع الزاويتين الباقيتين يساوي $90°$.
- إذا كانت زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين قائمة فإن كل من الزوايا الباقية تساوي 45^0 .

10-الزوايا الخارجية في المثلث:

ليكن لدينا المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ ، فإذا كانت d تقع على حامل [bc ، ولا تنتمي إلى [bc] أي أن:

$d\epsilon[bc$ و $d \notin [bc]$ كما هو في الشكل التالي:



فإننا نسمي الزاوية $\widehat{acd}$ زاوية خارجية للمثلث $\widehat{abc}$.

وعلى هذا الأساس ، فإن لكل مثلث ست زوايا خارجية ، كل زاويتين متقابلتين متساويتين.

نظرية : الزاوية الخارجية في مثلث تساوي مجموع زاويتي المثلث غير المجاورة.

الفرض : $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث ، $\hat{c}_2$ زاوية خارجية ، (أنظر إلى الشكل السابق).

الطلب : $\hat{c}_2 = \hat{a} + \hat{b}$.

البرهان: إن مجموع زوايا المثلث تساوي 180^0 ، أي أن:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}_1 = 180^0 \qquad (1)$$

وبما أن $\hat{c}_1 + \hat{c}_2 = 180^0$ (زاوية مستقيمة) (2)

من العلاقتين (1) و (2)، نستنتج أن $\hat{c}_2 = \hat{a} + \hat{b}$ وهو المطلوب.

نتيجة :

- في **المثلث حاد الزوايا** ، كل زاوية خارجية هي أكبر من كل زاوية من زوايا المثلث (لأن الزوايا الخارجية كلها منفرجة).
- في **المثلث منفرج الزاوية** تكون الزاوية الخارجية المجاورة للمنفرجة أكبر من كل من الزاويتين الباقيتين.

11- العلاقات بين أضلاع المثلث وزواياه.

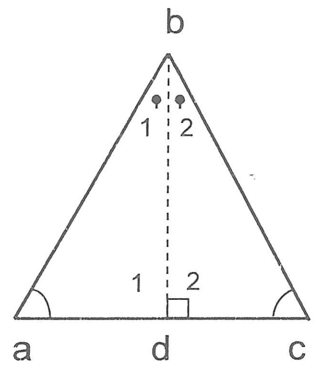
"1. إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متساوية فإن زواياه تكون متساوية وكل منها يساوي 60^0 .

"2. في المثلث المتساوي الساقين تكون الزاويتان المقابلتان لهذين الساقين متساويتين.

"3. الضلع الكبرى في مثلث تقابلها الزاوية الكبرى.

"4. طولي ضلعين في مثلث أطول من طول الضلع الثالثة.

نظرية: في المثلث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة متساويتان والمتوسط المتعلق برأس المثلث هو منصف لزاوية الرأس ويصنع مع القاعدة زاوية قائمة.



الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث متساوي الساقين.

[bd] متوسط.

الطلب: $\hat{a} = \hat{c}$.

[bd] هو ارتفاع ومنصف لزاوية الرأس.

البرهان: من المثلثين $\overset{\triangle}{bda}$ ، $\overset{\triangle}{bdc}$ نجد:

$|ab| = |bc|$ فرضا".

$|ad| = |cd|$ لأن [bd] متوسط.

[bd] ضلع مشتركة.

$\Leftarrow$ $\overset{\triangle}{bda} \approx \overset{\triangle}{bdc}$ لتساوي أضلاع الأول مع أضلاع الثاني.

من تطابق المثلثين $\overset{\triangle}{bdc}$ ، $\overset{\triangle}{bda}$ نجد:

$\hat{a} = \hat{c}$ وبالتالي زاويتا القاعدة متساويتان.

$\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ وبالتالي المتوسط [bd] هو منصف لزاوية الرأس.

$\hat{d}_1 = \hat{d}_2 = 90^0$ وبالتالي المتوسط [bd] هو ارتفاع،

(زاويتان متساويتان مجموعهما 180^0). وهو المطلوب.

نظرية : الضلع الكبرى في مثلث تقابلها الزاوية الكبرى.

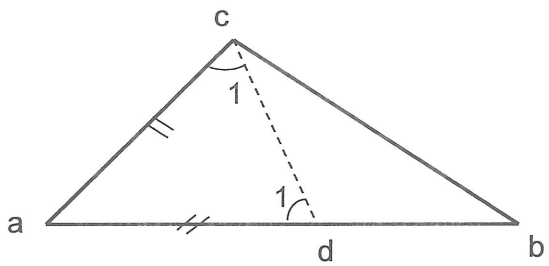
الفرض : $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث فيه :

$|cb| < |ab| \ \& \ |ac| < |ab|$

الطلب: $\widehat{c} > \widehat{b}$ and $\widehat{c} > \widehat{a}$.

البرهان: بما أن $|ac| < |ab|$ ، فإنه يمكننا أن نحدد النقطة ولتكن d بحيث $d \in [ab]$

و $|ad| = |ac|$ ، وذلك كما هو الحال في الشكل التالي:



نصل c إلى d فنحصل على المثلث المتساوي الساقين cad فيه $\widehat{c}_1 = \widehat{d}_1$

من الشكل، نجد أن d نقطة من القطاع الزاوي $[\widehat{ca, cb}]$ وبالتالي فإن $[cd$ يقع بين ضلعي

الزاوية $\widehat{acb}$ ، وعليه يكون $\widehat{acb} > \widehat{c}_1$ وبالتالي $\widehat{acb} > \widehat{d}_1$ لأن $\widehat{c}_1 = \widehat{d}_1$ ، ولما كانت

$\widehat{d}_1$ زاوية خارجية للمثلث $\overset{\Delta}{cdb}$ فإن $\widehat{b} < \widehat{d}_1$.

إذا" : $\widehat{b} < \widehat{acb} \Longleftarrow \widehat{b} < \widehat{d}_1 < \widehat{acb}$ وهو المطلوب.

بنفس الطريقة نستطيع أن نبرهن أن $\widehat{a} < \widehat{acb}$.

4-نظرية : مجموع طولي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالثة .

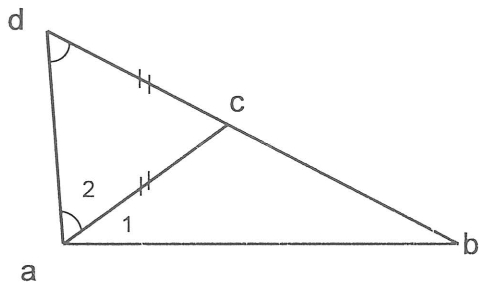
مثلث. $\overset{\Delta}{abc}$ الفرض:

الطلب : $|ac| + |cb| > |ab|$.

البرهان : نعيّن على [bc النقطة d بحيث $d \notin [bc]$ و $|ac| = |dc|$ فنحصل على المثلث

المتساوي الساقين $\overset{\Delta}{acd}$ فيه $|dc| = |ac|$ و $\hat{a}_2 = \hat{d}$

وذلك كما هو الحال في الشكل التالي:



ولما كانت $b \notin [ac, \widehat{ad}]$ فإن $[ab$ لا يقع بين ضلعي الزاوية $\hat{a}_2$ وبالتالي فإن:

$\hat{d} < \hat{a} \Leftarrow \hat{a}_2 < \hat{a}$ وذلك لأن $\hat{d} = \hat{a}_2$

وبحسب النظرية السابقة (الضلع الكبرى تقابلها الزاوية الكبرى في المثلث) فإن : $|ab| < |db|$

ولكن $|ca| + |cb| = |cd| + |cb| = |db|$

إذاً : $|ca| + |cb| > |ab|$ وهو المطلوب.

نتيجة : الفرق بين طولي ضلعين في المثلث هو أصغر من طول الضلع الثالثة .

ثانياً: المثلثات المتطابقة (المتساوية):

نقول عن المثلثين $\overset{\Delta}{abc}$ و $a'\overset{\Delta}{b'}c'$ أنهما متطابقان إذا تساوت أضلاع الأول مع أضلاع الثاني، ونرمز رياضياً للتطابق بالرمز $\overset{\Delta}{abc} \approx a'\overset{\Delta}{b'}c'$ ...

إن تطابق مثلثين يفترض تساوي الزوايا والمتوسطات والارتفاعات والمنصفات المتقابلة في هذين المثلثين.

1- شروط تطابق المثلثات:

هنالك عدة حالات تتطابق فيها المثلثات، وتعتبر هذه الحالات أو الشروط من المسلمات في الرياضيات الهندسية:

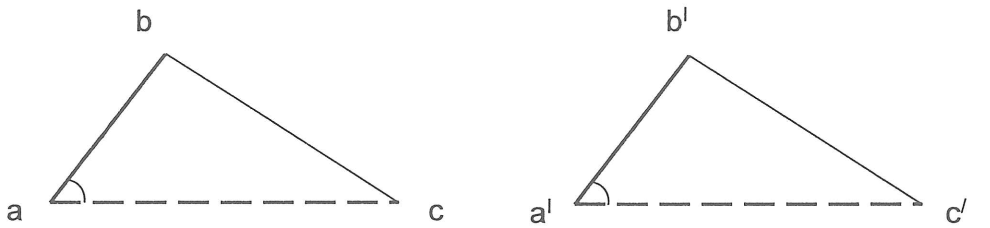
1". إذا تطابقت أضلاع المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ مع أضلاع المثلث الثاني $a'\overset{\Delta}{b'}c'$ على التوالي فإن المثلثين متطابقان.

$$\left.\begin{aligned} |ab| &= |a'b'| \\ |bc| &= |b'c'| \\ |ac| &= |a'c'| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a'\overset{\Delta}{b'}c' \approx \overset{\Delta}{abc}$$

نتيجة:

- يتطابق المثلثان المتساويا الأضلاع إذا تساوت ضلع من الأول مع ضلع من الثاني.
- يتطابق مثلثان متساويا الساقين إذا تساوت ساق وقاعدة من الأول مع مقابلاتها من الثاني.

2". إذا تساوى طولا ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من المثلث الأول مع نظيراتها من المثلث الثاني.



نتي.

يتطابق مثلثان **متساويا الساقين** إذا تطابق ساق وزاوية الرأس من الأول مع مقابلاتها من الثاني.

3". إذا تساوى طول ضلع وقياس الزاويتين المجاورتين له من الأول مع نظيراتها من الثاني.

$$\left.\begin{array}{r}|bc| = |b'c'| \\ \hat{a} = \hat{a}' \\ \hat{c} = \hat{c}'\end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\Delta}{a'b'c'} \approx \overset{\Delta}{abc}$$

في المثلثات القائمة: يتطابق مثلثان قائمان إذا تطابق:

- الوتر وزاوية حادة من الأول مع نظيراتها من الثاني.
- الوتر وضلع قائمة من الأول مع نظيراتها من الثاني.
- الأضلاع القائمة من الأول مع نظيراتها من الثاني.

ثالثاً: تشابه المثلثات:

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا تساوت زواياهما المتوافقة وتناسبت أطوال أضلاعهما المتقابلة.

على هذا الأساس، فإن المثلثات الطبوقة هي مثلثات متشابهة أما المثلثات المتشابهة فليس من الضروري أن تكون طبوقة.

1- كيفية كتابة نسب تشابه المثلثات:

إذا كان لدينا المثلثان $\overset{\Delta}{abc}$ و $\overset{\Delta}{a'b'c'}$ متشابهان فإننا نكتب نسب التشابه كما يلي:

"1. نحدد أزواج الزوايا المتساوية في المثلثين كما يلي:

$(\hat{a} = \hat{a}')$ ، $(\hat{b} = \hat{b}')$ ، $(\hat{c} = \hat{c}')$.

"2. نكتب رموز المثلثين في سطرين بحيث تكون الزوايا المتساوية متقابلة عموديا كما يلي:

$$\frac{a \quad b \quad c}{a' \quad b' \quad c'}$$

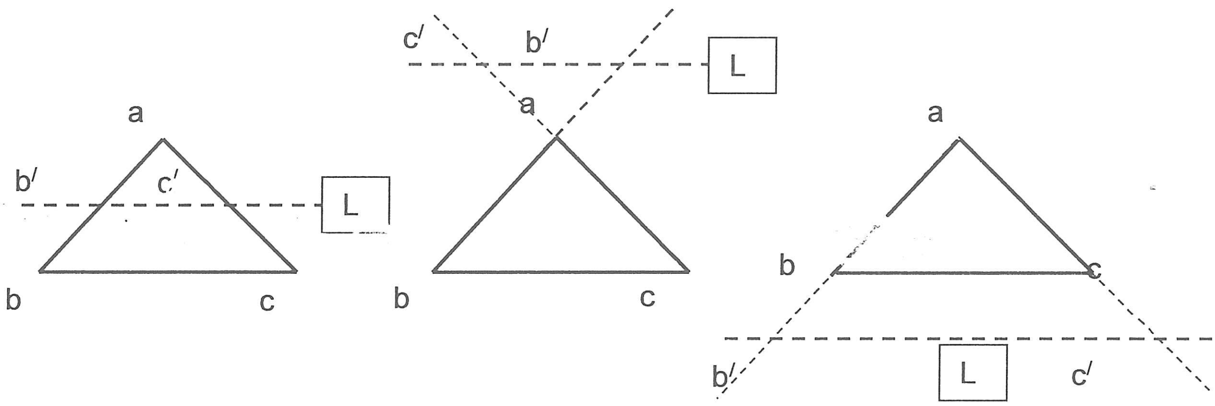
3". نكتب نسب التشابه (أي علاقات التناسب بين أطوال أضلاع المثلثين) وذلك كما يلي:

$$\frac{|ab|}{|a'b'|}=\frac{|bc|}{|b'c'|}=\frac{|ac|}{|a'c'|}$$

نظرية: إذا قطع مستقيم ضلعي مثلث أو امتداديهما وكان موازياً للضلع الثالثة فإن المثلث الناتج مشابه للمثلث الأصلي.

الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث، L مستقيم يوازي [bc] ويقطع ab في b' و ac في c' .

الطلب: المثلثان $\overset{\triangle}{abc}$ و $\overset{\triangle}{ab'c'}$ متشابهان.



البرهان: لإثبات هذه النظرية نكتفي بالحالة الأولى عندما يقطع L الضلعين [ab] و [ac].

1". المثلثان $\overset{\triangle}{abc}$ و $\overset{\triangle}{ab'c'}$ فيهما:

$\hat{a}$ زاوية مشتركة.

$\hat{b}=\hat{b}'$ بالتناظر.

$\hat{c}=\hat{c}'$ بالتناظر.

$\Longleftarrow$ الزوايا في المثلث الأول تساوي مقابلاتها في المثلث الثاني.

2". بما أن المستقيم L يوازي [bc] أي L // [bc] فإن:

$$\frac{|ab'|}{|ab|}=\frac{|ac'|}{|ac|} \quad \ldots\ldots (1)$$