وذلك بحسب نظرية تالس التي تقول: المستقيم الموازي لإحدى أضلاع مثلث يحدد على الضلعين الباقيتين (أو على امتدادهما) قطعاً متقابلة أطولها متناسبة.

نرسم من b' مستقيما" يوازي cc' فيقطع $[bc]$ في النقطة d، فيكون في المثلث $\overset{\Delta}{abc}$:

$$\frac{|ab'|}{|ab|}=\frac{|cd|}{|cb|}$$

وبما أن $b'c'cd$ هو متوازي أضلاع فإن: $|dc|=|b'c'|$ وبالتالي فإن :

$$\frac{|cd|}{|bc|}=\frac{|b'c'|}{|bc|} \quad \text{.......} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد: $\frac{|ab'|}{|ab|}=\frac{|ac'|}{|ac|}=\frac{|b'c'|}{|bc|}$ وهو المطلوب.

2- فوائد تشابه المثلثات:

1". حساب المسافات بين النقط

2". إيجاد العلاقات بين الأطوال والمساحات

3". إثبات تساوي الزوايا

4". تصغير شكل أو تكبيره

نتائج: في المثلثين المتشابهين:

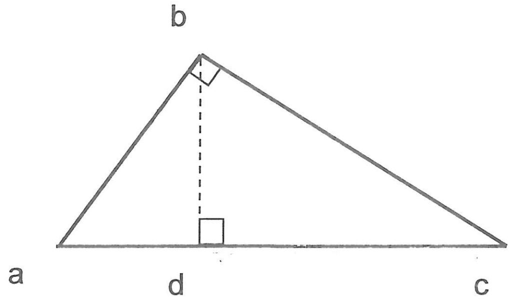
1". نسبة طولي متوسطين متقابلين أو طولي ارتفاعين متقابلين أو طولي منصفين لزاويتين متقابلتين تساوي نسبة التشابه.

2". نسبة مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه.

3". الارتفاع المتعلق بالوتر في المثلث القائم يقسمه إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

رابعاً: العلاقات العددية في المثلث القائم:

1". نظرية: مربع طول الضلع القائمة في مثلث قائم يساوي جداء طول الوتر في مرتسم هذه الضلع على الوتر.



الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث قائم.

الطلب: $|ab|^2 = |ac| * |ad|$.

$|bc|^2 = |ac| * |dc|$

البرهان: من تشابه المثلثين:

$\overset{\triangle}{abc}$ و $\overset{\triangle}{adb}$ نجد:

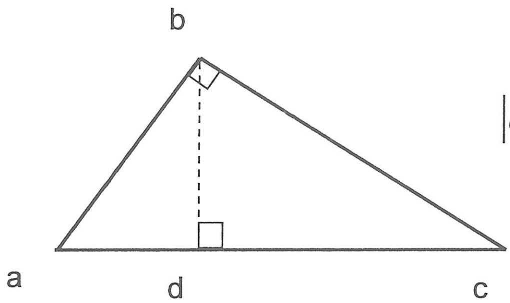
$$\frac{|ab|}{|ad|} = \frac{|ac|}{|ab|} = \frac{|bc|}{|db|}$$ ومن النسبة الأولى والثانية نجد أن: $|ab|^2 = |ac| * |ad|$.

بنفس الطريقة، ومن تشابه المثلثين $\overset{\triangle}{abc}$ و $\overset{\triangle}{bdc}$ نجد:

$$\frac{|ab|}{|bd|} = \frac{|bc|}{|dc|} = \frac{|ac|}{|bc|}$$ ومن النسبة الثانية والثالثة نجد أن:

$|bc|^2 = |ac| * |dc|$ وهو المطلوب.

2". نظرية: في المثلث القائم، جداء طولي الضلعين القائمتين يساوي جداء طول الوتر في طول الارتفاع المتعلق به.



الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث قائم.

الطلب: $|ab| * |bc| = |ac| * |bd|$

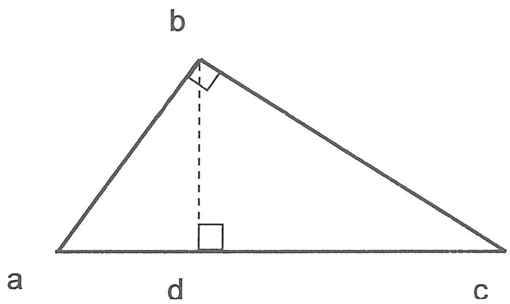
البرهان: من تشابه المثلثين:

$\overset{\triangle}{abc}$ و $\overset{\triangle}{bdc}$ نجد:

$$\frac{|ab|}{|bd|} = \frac{|bc|}{|dc|} = \frac{|ac|}{|bc|}$$ ومن النسبة الأولى والثالثة نجد أن:

$|ab| * |bc| = |ac| * |bd|$ وهو المطلوب.

3". نظرية: في المثلث القائم، مربع طول الارتفاع المتعلق بالوتر يساوي جداء طولي القطعتين اللتين يحددهما على الوتر.



الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث قائم.

[bd] الارتفاع المتعلق بالوتر.

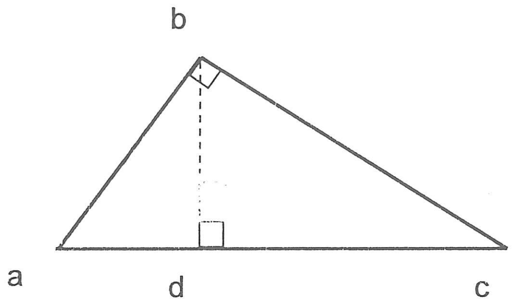
الطلب: $|bd|^2 = |ad| * |dc|$

البرهان: من تشابه المثلثين $\overset{\triangle}{adb}$ و $\overset{\triangle}{bdc}$ نجد:

$\frac{|ad|}{|bd|} = \frac{|db|}{|dc|} = \frac{|ab|}{|bc|}$ ومن النسبة الأولى والثانية نجد أن:

$|bd|^2 = |ad| * |dc|$ وهو المطلوب.

4". نظرية فيثاغورث: في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمتين.



الفرض: $\overset{\triangle}{abc}$ مثلث قائم.

الطلب: $|ac|^2 = |ab|^2 + |bc|^2$

البرهان: نرسم الارتفاع [bd] المتعلق بالوتر فنجد:

$$|ab|^2 = |ac| * |ad| \quad .... \quad (1)$$

$$|bc|^2 = |ac| * |dc| \quad ...... \quad (2)$$

وذلك بحسب النظرية التي تقول : (في المثلث القائم مربع طول الضلع القائمة يساوي جداء طول الوتر في مرتسم هذه الضلع على الوتر).

بجمع العلاقتين (1) و(2) نجد: $|ab|^2 + |bc|^2 = |ac| * |ad| + |ac| * |dc|$

$$= |ac| * (|ad| + |dc|) = |ac|^2$$

وهو المطلوب.

<u>تمارين البحث الرابع</u>

المثلثات

1. برهن أنه إذا كانت زاويتان في مثلث متتامتين فإن هذا المثلث قائم الزاوية.

2. ليكن لدينا المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ والمطلوب: برهن أن نقطة تلاقي المنصفات فيه تكون متساوية البعد عن أضلاعه مستخدما" تطابق المثلثات.

3. ليكن لدينا المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ والمطلوب: برهن أن نقطة تلاقي محاوره تكون متساوية البعد عن رؤوسه مستخدما" تطابق المثلثات.

4. $\widehat{abc}$ زاوية حادة، d نقطة من [ba ، e نقطة من [bc .
[dd/] عمودي على [ba و [ee/] عمودي على [bc، والمطلوب:
1". برهن أن المستقيمين /dd ، /ee متقاطعان في نقطة وحيدة ولتكن f .
2". برهن أن $\widehat{dfe} + \widehat{abc} = 180^0$.
3". بيّن في أي الحالات تكون $\widehat{dfe} = \widehat{abc}$ وأثبت ذلك.

5. $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث متساوي الساقين، $|ab| = |bc|$ والنقطة d منتصف [ac]، /b نظيرة b بالنسبة لـ d .

المطلوب: برهن أن المثلثات: $\overset{\Delta}{bcb'}$ ، $\overset{\Delta}{bab'}$ ، $\overset{\Delta}{ab'c}$ هى مثلثات متساوية الساقين.

6. نأخذ على ضلعي الزاوية الحادة $\widehat{abc}$ القطعتين المستقيمتين المتساويتين [db] ، [eb] بحيث: $d \in [bc$ ، $e \in [ba$. فإذا كان [dd/] عموديا" على [ba و [ee/] عموديا" على [bc
فالمطلوب إثبات أن :

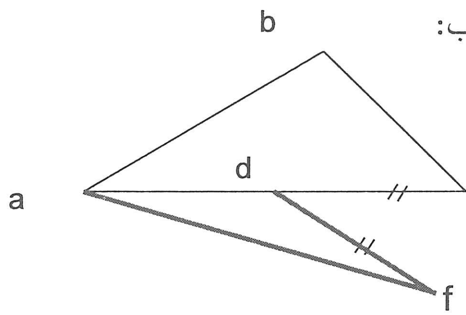
1". المثلثين $\overset{\Delta}{bd'd}$ ، $\overset{\Delta}{be'e}$ طبوقان.

2". المثلثين $\overset{\Delta}{me'd}$ ، $\overset{\Delta}{md'e}$ طبوقان، حيث m نقطة تقاطع [dd/] و [ee/]؛.

7. ليكن لدينا المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ ، d نقطة تنتمي إلى [bc] ، برهن أن :

$$2|ad| \langle |ab| + |ac| + |bc|$$

8. ليكن لدينا الشكل الهندسي التالي وفيه $|dc| = |df|$ والمطلوب:
برهن أن : $|af| \langle |bc| + |ab|$



9. ليكن لدينا المثلث المتساوي الاضلاع $\overset{\Delta}{abc}$، طول ضلعه يساوي X ، والمطلوب حساب طول ارتفاعه $|bd|$.

10. $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث، فيه $|bd|$ الارتفاع المرسوم على [ac]، فإذا كان $|bd| = 6cm$، و $|ab| = 10cm$، $|ac| = 12.5cm$، المطلوب حساب:
$|ad|$، $|bc|$ وإثبات أن المثلث قائم في b .

11. $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث قائم الزاوية في b ، [bd] ارتفاع، $|bc| = 9cm$، $|ad| = 16cm$
والمطلوب: حساب طول كل من: $|bd|$، $|bc|$ ، $|ba|$.

12. ارسم مثلثا" قائم الزاوية $\overset{\Delta}{abc}$، الوتر فيه $|ac| = 6cm$، $|ab| = 2cm$.

13. $\overset{\Delta}{abc}$ مثلث متساوي الساقين $|ab| = |bc|$، a′ نظيرة a بالنسبة لـ b، برهن أن المثلث $\overset{\Delta}{aca'}$ قائم الزاوية في c.

14. برهن أن منصفي زاويتين متقابلتين في متوازي أضلاع متوازيان.

15. abcd مربع، نأخذ على أضلاعه [ab] ، [bc] ، [cd] , [da] النقاط a′ ، b′ ، c′ ، d′ على الترتيب، بحيث يكون $|aa'| = |bb'| = |cc'| = |dd'|$ ، والمطلوب:
إثبات أن الشكل $a'b'c'd'$ هو مربع.

البحث الخامس

الدائرة

1- **تعريف الدائرة:** الدائرة هي مجموعة نقاط من المستوي S والتي تبعد عن نقطة ثابتة منه m بعداً ثابتاً.

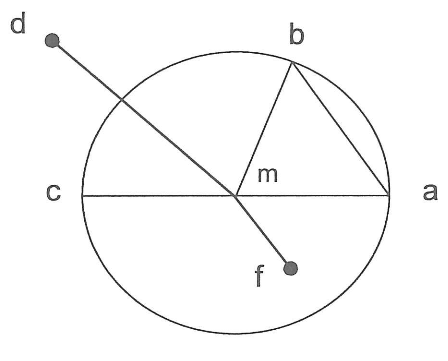
ويمكن تعريف الدائرة على أنها خط منحني مغلق من المستوى S تبعد نقاطه عن نقطة ما بعداً ثابتاً.

على هذا الأساس، يمكن تحديد المفاهيم التالية:

1". نسمي النقطة m مركز الدائرة.

2". بعد كل نقطة من الدائرة عن المركز m هو **نصف قطر الدائرة** حيث نرمز للدائرة التي مركزها m ونصف قطرها r بالرمز C(m,r).

3". **القوس في الدائرة:** هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين مختلفتين منها، مثل القوس $\overset{\frown}{ab}$ كما هو في الشكل التالي (يقصد هنا القوس الأصغر المحدد بـ b,a):



4". **الوتر في الدائرة:** هو كل قطعة مستقيمة محددة بنقطتين من الدائرة مثل الوتر [ab].

5- **قطر الدائرة:** هو كل وتر مار من مركزها مثل القطر [ac] ، يرمز لنصف قطر الدائرة بالرمز r وبالتالي فإن قطرها هو 2r.

إن قطر الدائرة يقسمها إلى قسمين متساويين وهو أطول الأوتار فيها.

6". داخل الدائرة وخارجها:

من المعلوم أن الدائرة التي تقع في مستو ما S تقسمه إلى ثلاثة أقسام أو مجموعات جزئية:

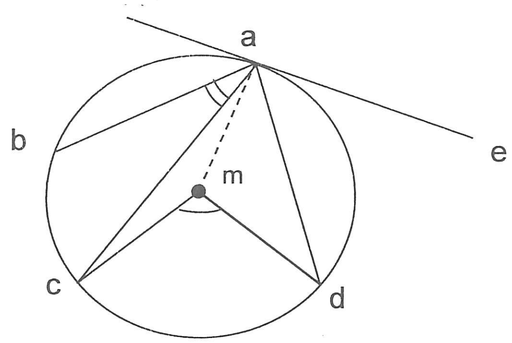
المجموعة الأولى : هي مجموعة نقاط الدائرة.

المجموعة الثانية: هي مجموعة نقاط داخل الدائرة ، وهي تبعد عن مركز الدائرة بعداً أقل من نصف قطرها، فأي نقطة مثل F داخل الدائرة C(m,r) يكون: $|mf| < r$

المجموعة الثالثة: وهي مجموعة النقاط خارج الدائرة والتي تبعد عن مركزها بعداً أكبر من نصف قطرها فإذا كانت النقطة d خارج الدائرة فإن $|md| > r$.

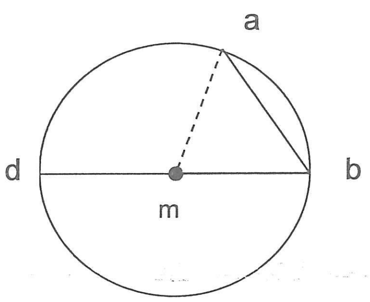
7". قرص الدائرة: هو مجموعة نقاط المستوي المكون من الدائرة وما داخلها حيث بعد كل نقطة من قرص الدائرة عن مركزها هو أصغر أو يساوي نصف قطرها.

8". الزاوية المحيطية: وهي الزاوية التي رأسها نقطة من الدائرة وأضلاعها وترين فيها مثل الزاوية $b\hat{a}d$ أو $b\hat{a}c$.



9". الزاوية المركزية في الدائرة: هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة m مثل الزاوية $d\hat{m}c$.

10". الزاوية المماسية: هي الزاوية التي رأسها نقطة من الدائرة وإحدى أضلاعها مماساً للدائرة والضلع الثانية وترا" فيها، مثل الزاوية $d\hat{a}e$ ، حيث [ae] مماساً للدائرة و [ad] وتراً فيها.



2- نظرية: القطر أطول أوتار الدائرة.

الفرض: $[ab]$ وتر في الدائرة $C(m,r)$.

$[db]$ القطر.

الطلب: $|db| > |ab|$

البرهان: نصل m في كل من a , b فنحصل على المثلث $\overset{\triangle}{amb}$.

من هذا المثلث نجد أن: $|ma| + |mb| > |ab|$

وذلك استناداً إلى النظرية التي تقول: مجموع طولي ضلعين في مثلث هو أطول من طول الضلع الثالثة.

وبما أن $|ma| = |mb| = r$ ، إذاً": $2r > |ab|$ ومنه نستنتج أن

$|db| > |ab|$. وهو المطلوب.

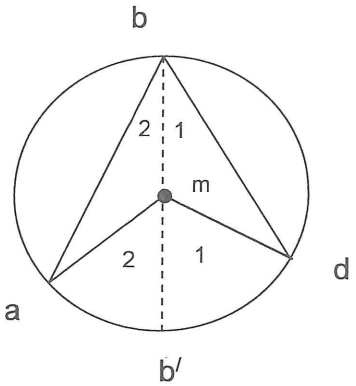
3- نظرية: قياس الزاوية المحيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس.

الحالة الأولى: مركز الدائرة يقع بين ضلعي الزاوية المحيطية

الفرض: b زاوية محيطية.

$\widehat{amd}$ الزاوية المركزية المشتركة مع b بالقوس.

الطلب: $\widehat{amd} = 2\hat{b}$.



البرهان: نرسم القطر $[bb']$ فنحصل على المثلثين $\overset{\triangle}{bmd}$ ، $\overset{\triangle}{bma}$ المتساويا الساقين، فيهما:

$\hat{m}_1 = \hat{b}_1 + \hat{d}$ (زاوية خارجية في المثلث $\overset{\triangle}{bmd}$)

وبما أن $\hat{b}_1 = \hat{d}$ لأن المثلث $\overset{\Delta}{bmd}$ متساوي الساقين فإن: $\hat{m}_1 = 2\hat{b}_1$ (1)

$\hat{m}_2 = \hat{b}_2 + \hat{a}$ (زاوية خارجية في المثلث $\overset{\Delta}{bma}$)

وبما أن $\hat{b}_2 = \hat{a}$ لأن المثلث $\overset{\Delta}{bma}$ متساوي الساقين فإن: $\hat{m}_2 = 2\hat{b}_2$ (2)

وبجمع العلاقتين (1) و(2) نجد:

$$\hat{m}_2 + \hat{m}_2 = a\hat{m}d = 2(\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \Longrightarrow \qquad a\hat{m}d = 2\hat{b}$$

وهو المطلوب.

<u>الحالة الثانية:</u> مركز الدائرة لا يقع بين ضلعي الزاوية المحيطية، أي أن $m \notin [b\hat{a}, bd]$.

نرسم القطر bb' فنحصل على المثلثين المتساويا الساقين $\overset{\Delta}{amb}$ ، $\overset{\Delta}{bmd}$ فيهما:

$$\hat{a} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2$$

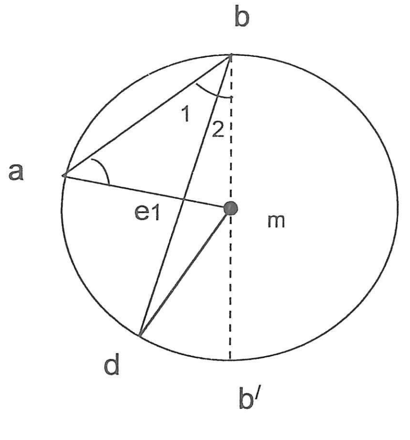
$$\hat{d} = \hat{b}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{e}_1 = \hat{a} + \hat{b}_1 \\ \hat{e}_1 = \hat{d} + a\hat{m}d \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \hat{a} + \hat{b}_1 = d + a\hat{m}d \\ a\hat{m}d = \hat{a} + \hat{b}_1 - \hat{d} \end{array} \qquad (1)$$

نعوض كل من $\hat{a}, \hat{d}$ بقيمتها فنجد:

$$a\hat{m}d = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_1 - \hat{d} = 2\hat{b}_1$$

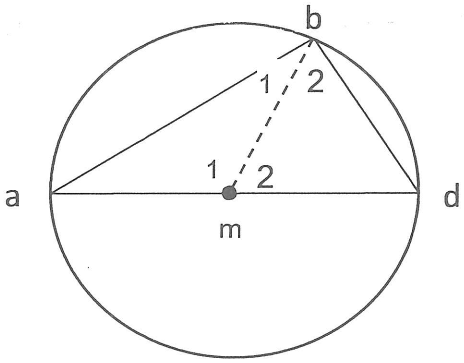
وهو المطلوب .



نتيجة: الزوايا المحيطية التي تقابل قوسا" واحدة أو أقواسا" متساوية تكون متساوية.

4. نظرية: إذا قابلت زاوية محيطية نصف قوس الدائرة فهي قائمة.

الفرض: $\hat{abd}$ زاوية محيطية تقابل نصف قوس الدائرة.



الطلب: الزاوية $\hat{abd} = 90^0$.

البرهان: نرسم نصف القطر [mb]، فنحصل على المثلثين $\hat{amb}$ ، $\hat{dmb}$ المتساويا الساقين، فيهما:

$$\hat{m}_1 + \hat{b}_1 + \hat{a} = 180^0 = \hat{m}_1 + 2\hat{b}_1 \qquad (1)$$

$$\hat{m}_2 + \hat{b}_2 + \hat{d} = 180^0 = \hat{m}_2 + 2\hat{b}_2 \qquad (2)$$

وبجمع المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$\hat{m}_1 + \hat{m}_2 + 2(\hat{b}_1 + \hat{b}_2) = 360^0$$

$$180^0 + 2(\hat{b}_1 + \hat{b}_2) = 360^0 \Rightarrow \hat{b} = 90^0$$

على هذا الأساس، وباستخدام الدائرة، يمكن رسم مثلث قائم الزاوية علم طول وتره واحدى أضلاعه القائمة وذلك كما يلي:

1". نرسم نصف دائرة قطرها يساوي طول وتر المثلث القائم.

2". نثبت إبرة الفرجار في إحدى نقاط طرفي قطر الدائرة ونرسم قوسا" بطول الضلع القائمة المعلومة، فيقطع نصف الدائرة في نقطة تكون هي رأس الزاوية القائمة للمثلث.

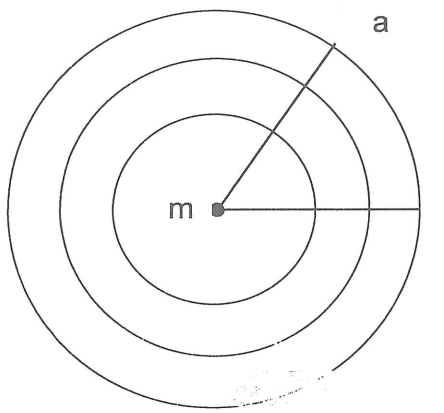
3". فإذا ما وصلنا هذه النقطة بطرفي قطر الدائرة نحصل على المثلث القائم المطلوب,

5. قياس الأقواس في الدائرة:

تقاس الأقواس في الدائرة **بالدرجات**، حيث يساوي قياس كل قوس في الدائرة قياس الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس والعكس صحيح.

ولا بد من الانتباه إلى أنه قد تتساوى قياسات عدة أقواس مع العلم أن أطوالها غير متساوية.

فقياس الأقواس المحددة بضلعي الزاوية $\widehat{amb}$ هو واحد ويساوي قياس الزاوية المركزية $\hat{m}$ مقدراً بالدرجات غير أن أطول هذه الأقواس غير متساوية كما هو ملاحظ من الشكل التالي.



كما يمكن أن تقاس الأقواس **بالراديان**، حيث

كل **واحد راديان** يساوي تقريبا" $57^0 17' 14''$

مع العلم أن: $1^0 = 60' = 3600''$

أي أن: $1' = 60''$

6. محيط الدائرة: وهو طول الدائرة، حيث يوجد علاقة ثابتة بين طول الدائرة وطول نصف قطرها.

فمحيط الدائرة يساوي $2\pi r$ حيث: π عدد ثابت = 3.1416

r . نصف قطر الدائرة

7. طول قوس من الدائرة:

من المعلوم أن قياس محيط الدائرة يساوي 360^0، أي أن محيط الدائرة يقسم إلى 360 جزءاً متساوياً وكل جزء قياسه 1^0 طوله يساوي طول محيط الدائرة مقسوماً على 360.

أي أن طول قوس قياسه $1^0 = \frac{2\pi r}{360}$.

فالقوس الذي قياسه $30°$ يكون طوله = $30 * \frac{2\pi r}{360}$ ، وعليه نستنتج القاعدة التالية:

طول قوس الدائرة الذي قياسه n درجة = $n * \frac{2\pi r}{360}$