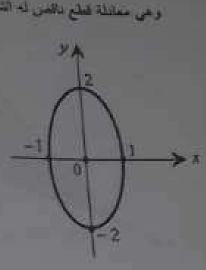
وهي معادلة قطع ناقص له الشكل (٣-٧) .

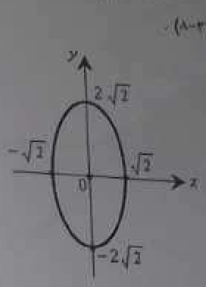
ومن أجل $K=2$ ، نجد المعادلة :

$$x^2+\frac{1}{4}y^2=2$$

وهي معادلة قطع ناقص له الشكل (٣-٨) .



الشكل (٣-٧)



الشكل (٣-٨)

٣-٤ النهايات والاستمرار :

قبل إعطاء تعريف لمفهوم نهاية تابع لمتغيرين ، نوضح مفهوم الجوار لنقطة .

الجوار بنصف قطر r للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ هو بالتعريف مجموعة النقاط $p(x,y)$ من المستوي $x0y$ والمحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$$

أي مجموعة النقاط الواقعة داخل دائرة التي نصف قطرها r ، ومركزها النقطة $p_0(x_0,y_0)$ ، وندعو مثل هذا الجوار بالجوار الدائري .

أما في الفراغ ، فإننا نُعرف الجوار الكروي ذو نصف القطر r للنقطة $p_0(x_0,y_0,z_0)$ ، بأنه مجموعة النقاط $p(x,y,z)$ والمحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<r$$

وهي النقاط الداخلية لكرة ذات نصف القطر r ، والمركز $p_0(x_0,y_0,z_0)$.

اعتماداً على ذلك نُعرّف الجوار في الفراغ الاقليدي ذي الـ n بعداً ، بأنه مجموعة النقاط $p(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ المحققة للمتراجحة الآتية :

$$\sqrt{(x-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}<r$$

والنقطة $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ ، هي مركز لهذا الجوار .

كما يمكن أن نعرّف جوار نقطة بالنسبة لتابع ذي متغيرين بشكل آخر ، أي أن هذا الجوار هو مربع طوله 2δ ، والمؤلف من مجموعة النقاط $p(x,y)$ المحققة للمتراجحتين :

$$|y-y_0|<\delta \ ; \ |x-x_0|<\delta$$

وبالتالي يدعى جواراً للنقطة $p_0(x_0,y_0)$.

يمكن بطريقة مشابهة أن نعمم الجوار الخاص بالفراغ ، أي من أجل $n=3$ أو أكثر.

تعريف (٢) :

نقول عن العدد A ، إنه نهاية للتابع $Z=f(x,y)$ ، المعرّف على الساحة D ، عندما تسعى النقطة $p(x,y)$ إلى النقطة $p_0(x_0,y_0)$ ، ونكتب :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{أو} \quad \lim_{p\to p_0} f(x,y)=A$$ إذا تحقق الشرط :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0:0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

وبالتالي فإن :

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

أي يمكن جعل المسافة بين العددين A و $f(x,y)$ صغيرة بقدر ما نشاء ، وذلك بجعل المسافة بين النقطتين p و p_0 صغيرة بقدرٍ كافٍ ولكن ليس صفراً .

ملاحظة (١) : إذا كانت :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad \text{فإن :} \quad f(x,y)\to A$$

عندما $(x_0,y_0) \leftarrow (x,y)$ على طول أي منحنٍ يقع في منطقة تعريف $f(x,y)$ وينتهي بالنقطة (x_0,y_0) ، وهذا يعني أن النهاية :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

تكون غير موجودة إذا انتهى $f(x,y)$ على طول منحنيين من منطقة تعريفه ، ويمران من النقطة (x_0,y_0) إلى قيمتين مختلفتين .

مثال (٩) : أوجد :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

الحل :

لنوجد نهاية التابع عندما $p(x,y)\to p_0(0,0)$ ، أي عندما $\rho\to 0$ ، (حيث ρ البعد بين النقطتين p و p_0) ، وحيث أن النقطة p_0 تمثل مبدأ الإحداثيات ، عندئذٍ يكون :

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

بناءً على ذلك نجد :

$$\lim_{p\to p_0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}\right)$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار $(\sqrt{\rho^2+1}+1)$ نجد :

$$=\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{(\rho^2+1-1)}\right]$$

$$=\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+1}+1)=2$$

يجب أن نذكر هنا أن التابع المذكور ليس معرفاً في النقطة $p_0(0,0)$ ، لكن له نهاية عندما $p\to p_0$.

مثال (١٠) : اثبت عدم وجود النهاية :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

الحل : نلاحظ أن التابع المعطى معرّف ومستمر في كل نقاط المستوي عدا النقطة $(0,0)$. ولنوجد نهاية التابع عندما $(x,y)\to(0,0)$ ، عندئذٍ :

- إذا كان $(x,y)\to(0,0)$ على طول المحور $0x$ ، أي $(y=0)$ ، فإن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x^2+0}=1$$

- إذا كان $(x,y)\to(0,0)$ على طول المحور $0y$ ، أي $(x=0)$ ، فإن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0-y^2}{0+y^2}=-1$$

ونلاحظ هنا أن النهايتين غير متساويتين ، وبالتالي فإن النهاية غير موجودة ، لأن النهاية يجب ألا تتعلق بالطريق الذي تسلكه النقطة (x,y) مقتربة من النقطة $(0,0)$.

تعريف (٣) :

لتكن النقطة $p_0(x_0,y_0)$ والواقعة في مجال تعريف التابع $f(x,y)$ ، عندئذٍ نقول أن التابع $z=f(x,y)$ مستمر في النقطة $p_0(x_0,y_0)$ إذا تحققت الشروط الآتية :

أ- $f(x_0,y_0)$ معينة ومحدودة .

ب- النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجودة .

ج- هذه النهاية ، مساوية لقيمة التابع في تلك النقطة ، أي أن :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \tag{3.1}$$

أما إذا اختل أحد هذه الشروط ، فإننا نقول إن التابع غير مستمر في تلك النقطة ، وندعو هذه النقطة $p_0(x_0,y_0)$ بنقطة انقطاع للتابع المعطى .

وفي حال كون التابع مستمراً في كل نقاط جوار أو مجال ما ، فإننا نقول إن هذا التابع مستمر على ذلك المجال .

وبإدخال المصطلحات الآتية :

$$y = y_0 + \Delta y \; ; \; x = x_0 + \Delta x$$

نكتب العلاقة (3.1) بالشكل الآتي :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

أو بالشكل الآتي :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

وبما أن الفرق :

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

يمثل التزايد Δz الحاصل على التابع z في النقطة $p_0(x_0, y_0)$ ، فإننا نعيد صياغة مفهوم استمرار التابع بالشكل الآتي :

نقول إن التابع $z = f(x, y)$ مستمر في النقطة $p_0(x_0, y_0)$ ، إذا كان التزايد الصغير الحاصل على وسطاء هذه النقطة Δx و Δy ، يقابله تزايد صغير على التابع z بمقدار Δz .

مثال (١١) : إن التابع $z = x^2 + y^2$

هو تابع مستمر في جميع نقاط المستوي $x0y$ ، في الحقيقة ، فإنه من أجل أية قيم اختيارية لـ $x, y, \Delta x, \Delta y$ يكون :

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - [x^2 + y^2]$$

$$\Delta z = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2$$

$$\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

تعريف (٤) :

نقول إن التابع $z = f(x, y)$ مستمر في المنطقة D من المستوي $0xy$ إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط D .

ونقول إن التابع $z = f(x, y)$ مستمر على المستوي $0xy$ إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاطه .

مثال (١٢) : إن التابع :

$$z = \frac{xy + 1}{1 - xy}$$

غير مستمر في النقطة $x = 1$ و $y = 1$ ، وذلك لكونه غير معرّف في تلك النقطة .

مثال (١٣) : إن التابع :

$$z = \frac{x - y}{x - y - 1}$$

مستمر من أجل جميع نقاط المستوي $x0y$ ما عدا النقاط من المستقيم والتي إحداثياتها تحقق المعادلة الآتية :

$$x - y - 1 = 0$$

مثال (١٤) : ليكن لدينا التابع :

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; \; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

والمطلوب : بيّن هل التابع مستمر في النقطة $(0,0)$.

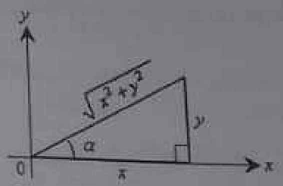
حسب تعريف الاستمرار للتابع عند نقطة ، نلاحظ أولاً من نص التمرين أن قيمة التابع المعطى في النقطة $(0,0)$ هي صفر، أي أن : $f(0,0) = 0$

ومن ناحية ثانية نجد أن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0+0=0$$

لأن القيمتين :

$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ تمثلان $\cos\alpha, \sin\alpha$ علـى الترتيـب ، وهمـا محدودتان مهما كانت x و y ، كما في الشكل (٣-٩) ، وبالتالي كلا الحـدين فـي الطـرف الأيمن من المساواة السابقة ينتهي إلى الصفر عندما $(x,y)\to(0,0)$. وبالتالي ، مما سبق نستنتج أن التابع المعطى مستمر من جميع نقاط المستوي $0xy$.



الشكل (٣-٩)

مثال (١٥) : بين هل التابع :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

مستمر عند النقطة $(0,0)$ ؟

بما أن :

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

و :

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

وبما أن النهايتين غير متساويتين ، فإن النهاية غير موجودة ، وبالتـالي فـإن التـابع المعطى غير مستمر عند النقطة $(0,0)$.

تعريف (٥) :

نقول إن التابع $z=f(x,y)$ محدود في المجال المغلق D ، إذا كـان ممكنـاً إيجـاد ذلك العدد الموجب c ، والذي من أجله تكون جميع قيم الوسيطين x و y من ذلـك المجـال محققة للمتراجحة :

$$|f(x,y)| \leq c$$

وفي الحالة المخالفة لذلك نقول إن التابع غير محدود على ذلك المجال .

تعريف (٦) :

ندعو القيمة العظمى (الصغرى) للتابع $f(x,y)$ في المجـال المغلـق D ، بالقيمـة $f(x_0,y_0)$ إذا تحقق الشرط الآتي :

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \, [\, f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \,]$$

من أجل جميع نقاط المجال المغلق D .

وهكذا ، تكون المبرهنة الآتية محققة :

مبرهنة (١) :

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً في جميع نقاط المجال المغلق D ، فإنه يأخـذ قيمـة عظمى واحدة على الأقل في إحدى نقاطه ولتكن M ، وأخرى صغرى ولتكن m .

ينتج من هذه المبرهنة أنه إذا كان التابع مستمراً على مجال ما D ، فإنه محدود فـي ذلك المجال .

٣-٥ المشتقات الجزئية :

ليكن لدينا التابع $z = f(x,y)$ ، ولنثبت y ، ولنعطي x تزايداً مقداره Δx ، عندئذٍ يحصل تزايد على التابع z مقداره :

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

والذي يدعى بتزايد جزئي للتابع z بالنسبة للمتغير x . وبشكل مشابه يحصل تزايد جزئي على التابع z بالنسبة للمتغير y مقداره :

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ولنلاحظ العلاقة ما بين التزايد الجزئي الحاصل $\Delta_x z$ بالنسبة للتزايد Δx على المتغير x ، نجد :

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

ندعو نهاية هذا المقدار (إن وجدت) ، عندما Δx يتناهى للصفر بالمشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة لـ x ، ونرمز لذلك بأحد الرموز الآتية :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \, , \, \frac{\partial f}{\partial x} \, , \, z'_x \, , \, f'_x(x,y)$$

وبالتالي ، نكتب :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (3.2)$$

وبشكل مشابه نعرف المشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y ونكتب :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (3.3)$$

نلاحظ من العلاقتين (3.2) و(3.3) أن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تتم وفقاً لقواعد الاشتقاق لتابع لمتغير مستقل واحد .

والمطلوب وفق عملية حساب المشتق الجزئي للتابع z بالنسبة للمتغير x ، هو أن نفترض y كثابت ، وبالشكل نفسه إذا كان المطلوب حساب المشتق الجزئي للتابع z بالنسبة للمتغير y هو أن نفترض x كثابت .

مثال (١٦) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$f(x,y) = x^3 \sin y + y^4$$

الحـــل : لنحسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 3x^2 \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = x^3 \cos y + 4y^3$$

مثال (١٧) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$f(x,y) = arctg(x^2 + y^2)$$

بالنسبة لـ x و y في النقطة $A(0,0)$

الحـــل : المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$$

نعوض بإحداثيات النقطة $A(0,0)$ ، نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

مثال (١٨) : احسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$z = \ln\left[\sin \frac{x}{\sqrt{y}}\right]$$

الحـــل : المشتقات الجزئية الأولى للتابع :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=\frac{1}{\sqrt{y}}\,cotg\,\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=-\frac{x}{2\sqrt{y^3}}\,cotg\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$$

نُعرِّف المشتقات الجزئية للتوابع التابعة لأكثر من متغيرين مستقلين بشكل مشابه ، وتحسب بالطريقة نفسها . فالتابع لـ n من المتغيرات $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ، له n من المشتقات الجزئية الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}$$

مثال (١٩) : احسب المشتقات الجزئية :

$$z=\ln(xy+yt+tx)$$

الحـــل :

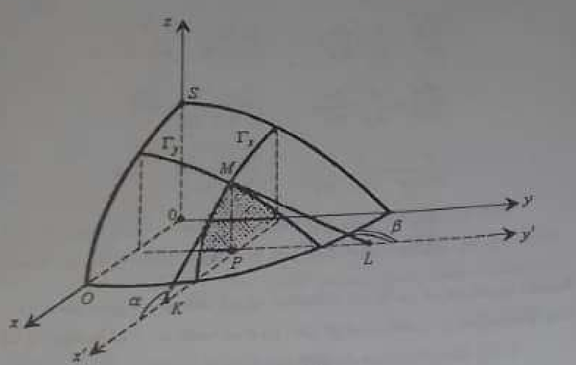
المشتقات الجزئية لهذا التابع :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+t}{xy+yt+tx}\quad;\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+t}{xy+yt+tx}\quad;$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{x+t}{xy+yt+tx}$$

٣-٦ التأويل الهندسي للمشتقات الجزئية :

لاحظنا سابقاً أن التمثيل الهندسي للتابع $z=f(x,y)$ هو سطح فراغي في الفراغ الديكارتي Oxyz ، ليكن السطح الممثل بالشكل (٣-١٠) ، ولنرمز له بـ S ، فإذا وضعنا (ثابتاً) $y=const$ ، نحصل بالتالي على المستوي Γ_x والذي يقطع السطح S بمستوٍ موازٍ لـ $x0z$ ، ولتكن MK مماساً للمنحني Γ_x في النقطة M ، تمثل α الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب للمحور 0x .



الشكل (٣-١٠)

وبما أن المشتق الجزئي $\frac{\partial z}{\partial x}$ في النقطة M مساوٍ للمشتق العادي لهذا التابع في تلك النقطة ($y=const$) ، وبالاعتماد على المعنى الهندسي لمشتق تابع لمتغير واحد يكون :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=tg\,\alpha$$

بالشكل نفسه، إذا كان Γ_y منحني تقاطع المستوي الفراغي S مع المستوي $x=const$ وتمثل β الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لـ $0y$ ، يكون :

$$\frac{\partial z}{\partial y}=tg\,\beta$$

وكما أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ للتابع $z=f(x,y)$ هي توابع للمتغيرين x و y ، وبالتالي يمكن اشتقاقها جزئياً مرة أخرى ، عندئذٍ نحصل على المشتقات الجزئية الأربعة الآتية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

عندئذٍ نسمي هذه المشتقات الجزئية ، بالمشتقات الجزئية من المرتبة الثانيـة بالنسـبة لـ x ، وبالنسبة لـ y ، ثم بالنسبة لـ x و y على الترتيب وبالعكس . وبالطريقة نفسها تماماً يمكن الحصول على مشتقات جزئية من المرتبة الثالثة والرابعة ... الخ .

ملاحظة (٢) : نسمي المشتقين :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} , \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

بالمشتقات المختلطة .

مثال (٢٠) : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع :

$$z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ، نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

نشتق كلاً من $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة لـ x و y ، فنجد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

حصلنا في المثال السابق على القيم نفسها للمشتقات المختلطة ، ومن الجدير تذكـره أن هذا التساوي غير محقق دوماً من أجل جميع التوابع . والشرط الواجب تحقيقه لكي تتسـاوى قيم المشتقات المختلطة ، يعطى بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة (٢) :

إذا كان التابع $z = f(x, y)$ ومشتقاته الجزئية من المرتبة الثانية محددين ومسـتمرين في النقطة $M(a, b)$ وفي جوار ما لها ، عندئذٍ وفي هذه النقطة يكون محققاً ما يلي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

نقبل هذه المبرهنة من دون برهان ، ونلخص إلى القول :

إن نتيجة الاشتقاق غير متعلقة بترتيب عملية الاشتقاق ، بالنسبة للمتغيرات .

مثال (٢١) : أوجد المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} , \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ للتابع } z = x^3 y^3$$

الحـــل : نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^3 \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 x^3$$

والآن لنحسب المشتقات الجزئية المختلطة $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، نجد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = 9x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = 9x^2y^2$$

وبما أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ، هذا يعني أن التابع $z = x^3y^3$ مستمر ومحدود في النقطة $M(a,b)$.

مثال (٢٢) : إذا كانت :

$z = x^2 \, arctg\,(\frac{y}{x})$ ، أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ عند النقطة $(1\,,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} . \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x}) =$$

$$= x^2 \frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{1}{x} = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M(1,1)} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^3}{x^2+y^2}) =$$

$$= [\frac{(x^2+y^2)\,(3x^2) - (x^3)\,(2x)}{(x^2+y^2)^2}]$$

$$= \frac{2,3-1,2}{2^2} = 1$$

ملاحظة (٣) : يمكننا حساب المشتقات الجزئية لكل من :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

باشتقاق العلاقة $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ جزئياً بالنسبة إلى x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

وباشتقاق العلاقة $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ جزئياً بالنسبة إلى x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

وكذلك باشتقاق $(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2})$ جزئياً بالنسبة لـ x ، فنجد :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$$

وبالطريقة نفسها تماماً نحصل على كلٍ من :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x} \, , \, \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y^2} \, , \, ... \text{ الخ}$$

مثال (٢٤) : أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 . \partial y^2}$$

للتابع : $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$

الحـــل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x . \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 . \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = -2x\sin(xy) - yx^2\cos(xy)$$

ولحساب $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ ، نشتق هذه العلاقة جزئياً بالنسبة لـ x ، فنجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}=-2\sin(xy)-2xy\cos(xy)-$$
$$-2xy\cos(xy)+y^2x^2\sin(xy)$$

٣-٧ التفاضل التام :

سنستعرض الآن التفاضل التام (الكلي) للتوابع لعدة متغيرات . نبدأ ذلك بالتوابع لمتغيرين .

ليكن التابع $z=f(x,y)$ المعرّف والمستمر والقابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x و y ، في نقطة ما . نعطي التفاضل التام dz لهذا التابع $z=f(x,y)$ في تلك النقطة بالتركيب الخطي الآتي :

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}h+\frac{\partial z}{\partial y}k$$

بحيث إن المشتقين الجزئيين قد تم إيجادهما في النقطة المفروضة .

نختار قيم الثابتين تبعاً للنقطة التي يحسب فيها التفاضل التام dz ، وتبعاً للتابع z الذي نوجد تفاضله التام ، وخاصة من أجل التابعين :

$$f(x,y)=x \ , \ \varphi(x,y)=y$$

نحصل على :

$$df(x,y)=dx=1.h+0.k=h$$
$$d\varphi(x,y)=dy=0.h+1.k=k$$

عندئذٍ :

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (3.4)$$

وتكون عبارة التفاضل التام لتابع ذي (n) متغيراً مستقلاً :

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

مثال (٢٤) : أوجد التفاضل التام للتابع : $z=\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{x^2-y^2} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2x}{x^2-y^2}$$

وبالتالي :

$$dz=\frac{2y\,dx-2x\,dy}{x^2-y^2}$$

مثال (٢٥) : أوجد التفاضل التام للتابع :

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

الحـــل : نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

وبالتالي فإن :

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

إذا كان التابع $z=f(x,y)$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى x و y ، فإنه من أجل التزايد Δx و Δy للمتغيرين x و y ، ينتج ويطرأ تزايد على التابع مقداره Δz ، ويعطى بالعلاقة :

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)$$

وندعوه بالتزايد الكلي أو التام على z .

وبشكل تقريبي ، يمكن أن نستبدل به التفاضل التام dz ، أي أن :

$$\Delta z\approx dz$$

مثال (٢٦) : مخروط ارتفاعه $h = 30\ cm$ ، ونصف قطر قاعدته $r = 10\ cm$ ، ويصغر كم سيتغير حجم هذا المخروط ، إذا طرأ على الارتفاع تغير مقدار $3\ mm$ ، ويصغر نصف قطر القاعدة $1\ mm$.

الحـــــل :

إن حجم المخروط يعطى بالعلاقة الآتية :

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 . h \qquad \frac{\pi}{3} \times 100 \times 30$$

وهو تابع للمتغيرين r , h ، ومشتقته الجزئية هي :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi}{3} r.h \ , \ \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2$$

وبما أن $\Delta V \approx dV$ ، فإن تزايد الحجم التقريبي يكون :

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh$$

$$\approx \frac{2\pi}{3} rh dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh$$

$$\approx \frac{\pi}{3} (2rh dr + r^2 dh)$$

صفر

$$\approx \frac{\pi}{3} [2\times10\times30(-0{,}1) + 100\times0{,}3] = -10\pi \quad -10\pi$$

$$\approx \cancel{-31{,}4\ cm^2} \quad -31.4\ cm^2$$

التفاضل التام dz لتابع $z = f(x,y)$ هو تابع لكل من x و y ، وتفاضله إن وجد يدعى بالتفاضل التام من المرتبة الثانية z ، ونرمز له بالرمز d^2z ، واعتماداً على التعريف يكون:

$$d^2z = d(dz) = d(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy) dx + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy) dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d^2y$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2x + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d^2y \qquad (3.5)$$

أثناء عملية الاشتقاق نعامل dx و dy كثوابت .

من العلاقة الأخيرة نجد :

$$d^2z = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} d^2x + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} d^2y) z$$

لكن نعلم أن $z = f(x,y)$ ، أي :

$$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^2 . f(x,y)$$

وبالأسلوب ذاته ، نجد التفاضل التام من مراتب عليا للدالة $z = f(x,y)$:

$$d^nz = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^n . f(x,y)$$

وإذا كان التابع بثلاث متغيرات $u(x,y,z)$ ، فإن التفاضل التام مـن المرتبـة n ، يعطى بالعلاقة الآتية :

$$d^nz = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz)^n f(x,y,z) \qquad (3.6)$$

مثال (٢٧) : أوجد التفاضل d^2z للتابع :

$$z = x^2 + y^2 + \ln(x - y^2)$$

الحـــــل :

نحسب أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{1}{x - y^2} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - \frac{2y}{x - y^2}$$

ونحسب ثانياً المشتقات من المرتبة الثانية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 - \frac{1}{(x - y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)^2 - 1}{(x - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y}{(x-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2-\left[\frac{2(x-y^2)+4y^2}{(x-y^2)^2}\right]=\frac{2(x-y^2)^2-2x-2y^2}{(x-y^2)^2}$$

وبتطبيق العلاقة (3.5) ، نجد :

$$d^2z=\left[\frac{2(x-y^2)-1}{(x-y^2)^2}\right]dx^2+$$

$$+\frac{4y}{(x-y^2)^2}\,dx\,dy+\left[\frac{2(x-y^2)-2x-2y^2}{(x-y^2)^2}\right]dy^2$$

٣-٨ اشتقاق التوابع المركبة وتفاضلها :

إذا كان للتابع $z=f(x,y)$ مشتقات جزئية مستمرة z'_x ، z'_y ، وكان كلاً من x و y قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى t ، حيث :

$$x=\varphi(t)\ ;\ y=\psi(t)$$

عندئذ يكون التابع :

$z=f(x,y)=f[\varphi(t)\ ;\ \psi(t)]=F(t)$ تابعاً مركباً بالنسبة لـ t .

ولنوجد تفاضل هذا التابع z بالنسبة إلى t ، وذلك :

بفرض أن Δz يمثل التزايد الحاصل على التابع $z=f(x,y)$ ، أي :

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (3.7)$$

وبإضافة $f(x,y+\Delta y)$ إلى الطرف الثاني وطرحه ، نجد :

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+$$
$$+[f(x,\,y+\Delta y)-f(x,y)] \qquad (3.8)$$

وبتطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة على عبارتي ما بين الأقواس المتوسطة ، وكما أن حاصل الفرق ما بين الأقواس المتوسطة هو ثابت لكل من x و $y+\Delta y$ ، فيكون x متغيــراً ، بينما يكون $y+\Delta y$ ثابتاً ، أي :

$$f(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]=$$
$$=\Delta f'_x.x(x+\theta\Delta x,\,y+\Delta y) \qquad (3.9)$$

حيث :

θ : عدد محصور ما بين الصفر والواحد ، ومن أجله تكون مبرهنــة التزايــدات المحدودة محققة ، وتكون النقطة $x+\theta\Delta x$ واقعة بين x و $x+\theta\Delta x$ ، أي :

$$x<x+\theta\Delta x<x+\Delta x$$

ولنطبق مبرهنة التزايدات المحدودة على القوس الثاني في الطرف الثاني من العلاقــة (3.8) فيكون x ثابتاً ، بينما يكون y متغيراً ، أي :

$$f(x,\,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y.z'_y(x,y+\theta_1\Delta y) \qquad (3.10)$$

حيث $0<\theta_1<1$ ، وبالتالي :

$$y<y+\theta_1\Delta y<y+\Delta y$$

بإبدال العلاقتين (3.10) و(3.9) في العلاقة (3.8) نجد :

$$\Delta z=z'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+z'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$

بالتقسيم على Δt ، نجد :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=z'_x(x+\theta.\Delta x,y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+z'_y(x,y+\theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (3.11)$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t\to 0$ ، وبما أن x و y قابلان للاشتقاق بالنسبة لـ t يكون أيضاً $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$ ، أي :

$$\frac{dz}{dt}=z'_x(x,y)\,\frac{dx}{dt}+z'_y(x,y)\,\frac{dy}{dt}$$

أو بالشكل :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} \qquad (3.12)$$

وبتعميم العلاقة (3.12) على تابع لأكثر من متغيرين ، وليكن هذا التابع :

$$u=f(x,y,z)$$