حيث إن :

$z = z(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ x = x(t)$: توابع قابلة لاشتقاق بالنسبة إلى t ، وكان $u = f(x, y, z)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة $[x(t), y(t), z(t)]$ ، فإن التابع :

$$u = f[x(t), y(t), z(t)]$$

يكون قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى t ، وأن :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (3.13)$$

مثال (٢٨) : أوجد مشتق التابع :

$$z = x^2 + y^2$$

حيث : $x = \sqrt{t}\ ;\ y = e^{2t}$

الحـــل :

نحسب المشتقات الجزئية للتابع z بالنسبة إلى x و y ، نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

نحسب مشتقات x و y ، بالنسبة إلى t ، يكون :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ ,\ \frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$$

واعتماداً على العلاقة :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

يكون :

$$\frac{dz}{dt} = \left[2x\frac{1}{2\sqrt{t}} + 4\, e^{2t} y\right]\Bigg|_{\substack{x=\sqrt{t}\\ y=e^{2t}}} = 2\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} + 4\, e^{4t}$$

$$= 1 + 4\, e^{4t}$$

مثال (٢٩) : أوجد :

$\frac{du}{dt}$ ، إذا كان التابع $u = x.y.z$ ، و $x = t^2 + 1$ ، و $y = \ln t$ ، و $z = tg\, t$

الحـــل : نعلم أن :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = (y.z)(2t) + (x.z)\left(\frac{1}{t}\right) + (x.y)\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{du}{dt}\Bigg|_{\substack{x=t^2+1\\ y=\ln t\\ z=tg\, t}} = 2t(\ln t).(tg\, t) + \frac{(t^2+1)tg\, t}{t} + (t^2+1)\frac{\ln t}{\cos^2 t}$$

حالة خاصة : إذا كان $z = f(x, y)$ و $y = \varphi(x)$ ، أي أن :

$$z = f[x, \varphi(x)]$$

هو تابع مركب بالنسبة إلى x ، وتأخذ العلاقة (3.12) الشكل الآتي :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (3.14)$$

مثال (٣٠) : أوجد مشتق التابع :

$$z = x^3 y^7 + e^{xy}$$

حيث : $y = \frac{1}{1+x^2}$

الحـــل : من العلاقة (3.14) نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 y^7 + y e^{xy} + (7x^3 y^6 + x e^{xy})\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

مبرهنة (٣) :

إذا كان التابعان $x = x(u, v)\ ,\ y = y(u, v)$ مشتقات جزئية من المرتبة الأولى عند النقطة (u, v) ، وإذا كان التابع $z = f(x, y)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة :

$$[x(u,v)\,,\, y(u,v)]$$

فإن التابع : $z = f[x(u,v)\,,\, y(u,v)]$

مشتقين جزئيين من المرتبة الأولى عند النقطة (u,v) ، ويعطيان بالعلاقتين الآتيتين :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

مثال (٣١) : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى :

$$\frac{\partial z}{\partial v} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial u}$$

حيث : $y=\frac{u}{v} \; ; \; x=u+3v \; ; \; z=e^{2xy}$

الحـــل : نطبق الدساتير (3.15) نجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2ye^{2xy} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2xy} \; ; \; \frac{\partial x}{\partial u}=1 \; ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{v} \; ; \; \frac{\partial x}{\partial v}=3$$

نبدل في الدساتير السابقة :

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=(2ye^{2xy}).(1)+(2xe^{2xy}).(\frac{1}{v})$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{x=u+3u \\ y=\frac{u}{v}}} =2(\frac{u}{v})e^{2(u+3v)(\frac{u}{v})}+2(u+3v)e^{2(u+3v)(\frac{u}{v})}.(\frac{1}{v})$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=[\frac{2u}{v}+\frac{2u+6v}{v}]e^{\frac{2u^2+3uv}{v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=(\frac{4u+6v}{v})e^{\frac{2u^2+3uv}{v}}$$

وبالطريقة نفسها تماماً يمكن حساب $\frac{\partial u}{\partial v}$ (يترك للطالب) .

ملاحظة (٤) : إذا كان :

$w=f(x,y,z) \; ; \; z=z(r,s) \; ; \; y=y(r,s) \; ; \; x=x(r,s)$ ، فإن :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

ملاحظة (٥) : إذا كان :

$$w=f(x,y,z) \; ; \; z=z(r,s,t) \; ; \; y=y(r,s,t) \; ; \; x=x(r,s,t)$$

فإن :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

مثال (٣٢) : إذا كان :

$$U=z\sin(\frac{y}{x})$$

حيث : $x=3r^2+2s\ ;\ y=4r-2s^3\ ;\ z=2r^2-3s^2$

والمطلوب ، أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial U}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial U}{\partial r}$$

أ- لنوجد $\frac{\partial U}{\partial r}$:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=\left[(z\cos\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})\right](6r)+$$

$$+\left[(z\cos\frac{y}{x})(\frac{1}{x})\right](4)+\left[(\sin\frac{y}{x})(4r)\right]$$

$$=-\frac{6ryz}{x^2}\cos(\frac{y}{x})+\frac{4z}{x}\cos(\frac{y}{x})+4r\sin(\frac{y}{x})$$

ب- لنوجد $\frac{\partial U}{\partial s}$:

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=\left\{(z\cos\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})\right\}(2)+$$

$$+\left\{(z\cos\frac{y}{x})(\frac{1}{x})\right\}(-6s^2)+\sin(\frac{y}{x})(-6s)$$

$$=-\frac{2yz}{x^2}\cos(\frac{y}{x})-\frac{6s^2z}{x}\cos(\frac{y}{x})-6s\sin(\frac{y}{x})$$

مثال (٣٣) : إذا كان لدينا :

$$w=x^2+y^2-z^2\ ;\ x=\rho\sin\phi\cos\theta\ ;$$

و $y=\rho\sin\theta\sin\phi\ ;\ z=\rho\cos\phi$

والمطلوب ، أوجد كلاً من :

$$\frac{\partial w}{\partial \rho}\ ,\ \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

أ- لنوجد $\frac{\partial w}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \theta}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$=2x(-\rho\sin\phi\sin\theta)+2y(\rho\sin\phi\cos\theta)$$

$$=2(\rho\sin\phi\cos\theta)(-\rho\sin\phi\sin\theta)+2(\rho\sin\theta\sin\phi)(\rho\sin\phi\cos\theta)$$

$$=-2\rho^2\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta+2\rho^2\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta=0$$

ب- لنوجد $\frac{\partial w}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$=2x\sin\phi\cos\theta+2y\sin\phi\sin\theta-2z\cos\phi$$

$$=2\rho\sin^2\phi\cos^2\theta+2\rho\sin^2\phi\sin^2\theta-2\rho\cos^2\phi$$

$$=2\rho\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2\rho\cos^2\phi$$

$$=2\rho\sin^2\phi-2\rho\cos^2\phi$$

٣-٩ مشتق التوابع الضمنية :

إذا كانت قيم الوسيطين x و y مرتبطة بمعادلة ، والتي يمكن إعادة كتابتها بعد نقل جميع حدودها إلى طرف واحد من الشكل الآتي :

$$F(x,y)=0 \qquad (3.18)$$

فإننا ندعو كل تابع من الشكل $y=f(x)$ المعرّف والمستمر على مجال ما D ، والذي يمكن إعادة كتابته لمطابقة الشكل بالعلاقة (3.18) بالتابع الضمني ، أو المستتر ، والمعرّف بالعلاقة (3.18) .

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}2u & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{-4u-1}{-8uv+1}$$

حيث إننا افترضنا أن $1-8uv\neq 0$

٣-١٢ نشر تايلور لتابع بمتغيرين :

نعمم الآن نشر تايلور من أجل التوابع بمتغيرين :

مبرهنة تايلور في النشر المنتهي (٦) :

ليكن $z=f(x,y)$ تابع معرّف ومستمر على الساحة $D\subseteq R^2$ ، وليكن Ω جواراً للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ من D ، وليكن $f\in cl^N$ ، يمكن عندئذٍ كتابة هذا التابع كما يلي :

$$f(x,y)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+R_N \quad (3.26)$$

حيث R_N : باقي تايلور للتابع f ، في جوار النقطة p_0 ، معطى بالعلاقة الآتية :

$$R_N=\frac{1}{N!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^N f(X,Y)$$

حيث :

$$0<\theta<1\ ;\ Y=y_0+\theta(y-y_0)\ ;\ X=x_0+\theta(x-x_0)$$

ويمثل R_N الخطأ المرتكب عند استبدال التابع f ، بالمتسلسلة السابقة .

ملاحظة (٦) : إذا وضعنا :

$x-x_0+\Delta x$ ، $y-y_0+\Delta y$ ، في المتسلسلة السابقة ، نجد :

$$f'(x_0+\Delta x\ ;\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!}\left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x}+\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0)+R_N$$

أي أن :

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x ; y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!}\left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x}+\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0)+R_N$$

وهذا التغير الذي يطرأ على التابع f ، عندما تتغير x بالمقدار Δx ، و y بالمقدار Δy .

مبرهنة تايلور في النشر غير المنتهي (٧) :

إذا كان التابع $f(x,y)$ تابع معرّف ومستمر على الساحة $D \le R^2$ ، ولها مشتقات جزئية ، عدداً غير منتهٍ من المرات ، مستمرة على جوار Ω للنقطة $p_0(x_0, y_0)$ من D ، ولتكن $\lim\limits_{N \to \infty} R_N = 0$ في هذا الجوار ، عندئذ فإن :

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0)$$

وتسمى هذه المتسلسلة ، متسلسلة تايلور غير المنتهية للتابع $f(x,y)$ في الجوار Ω ، وتسمى الجوار Ω ، جوار النشر .

ويمكن بسهولة إثبات أن هذا النشر وحيد في الجوار Ω . ويمكن اشتقاق ومكاملة المتسلسلات غير المنتهية الناتجة ، حداً حداً ، وذلك للحصول على مشتق أو تكامل التابع المنشورة ، بالترتيب .

حالة خاصة :

إذا كان النشر بجوار النقطة $(0,0)$ ، فإن النشر يسمى نشر ماكلوران .

مثال (٤١) : أوجد منشور تايلور للتابع :

$$f(x,y)=y^2+\cos(xy)$$

في جوار النقطة $p_0(\frac{\pi}{2},1)$ ، مكتفياً بحدود من الدرجة الثانية .

الحــل : واضح أن التابع f ، معرّف ومستمر هو ومشتقاته ومن جميع المراتب على جوار للنقطة p_0 :

$$f(\frac{\pi}{2},1)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$$

$$f'_x(x,y)=-y\sin(xy) \Rightarrow f'_x(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

$$f'_y(x,y)=2y-x\sin(xy) \Rightarrow f'_y(\frac{\pi}{2},1)=2-\frac{\pi}{2}$$

$$f''_{xx}(x,y)=-y^2\cos(xy) \Rightarrow f''_{xx}(\frac{\pi}{2},1)=0$$

$$f''_{yy}(x,y)=2-x^2\cos(xy) \Rightarrow f''_{yy}(\frac{\pi}{2},1)=2$$

$$f''_{xy}(x,y)=-\sin(xy)-xy\cos(xy) \Rightarrow f''_{xy}(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

$$f''_{yx}(x,y)=-\sin(xy)-xy\cos(xy) \Rightarrow f''_{yx}(\frac{\pi}{2},1)=-1$$

نبدل في العلاقة (3.26) ، فنجد :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'_x+(y-y_0)f'_y+$$
$$+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''_{xx}+\frac{(y-y_0)^2}{2!}f''_{yy}+2\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{2!}f''_{xy}+R_3$$

$$y^2+\cos(xy)=1+(x-\frac{\pi}{2})(-1)+(y-1)(2-\frac{\pi}{2})+$$
$$+\frac{(2-\frac{\pi}{2})^2}{2}(0)+\frac{(y-1)^2}{2}(-1)+2\frac{(2-\frac{\pi}{2})(y-1)}{2}(-1)+R_3$$

$$f(x,y)=1-(x-\frac{\pi}{2})+(2-\frac{\pi}{2})(y-1)-$$
$$-\frac{(y-1)^2}{2}-(x-\frac{\pi}{2})(y-1)+R_3$$

٣-١٣ القيمتين العظمى والصغرى لتابع ذي متغيرين أو أكثر :

ليكن $z=f(x,y)$ تابعاً لمتغيرين x وy ، معرفــاً علــى مجــال مــا D . ولــتكن $p_0(x_0,y_0)$ ، نقطة من هذا المجال .

نقول إن التابع $z=f(x,y)$ قيمة عظمى من نقطة مثل $p_0(x_0,y_0)$ ، إذا كان :

$$f(x_0,y_0)>f(x,y)\ \ ;\ \ \forall(x,y)\in D$$

محققاً من أجل جميع النقاط $p(x,y)$ الواقعة في الجوار القريب للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ والمختلفة عنها .

وبشكل مشابه ، نقول إن للتابع $z=f(x,y)$ قيمة صغرى في النقطــة $p_0(x_0,y_0)$ إذا كان :

$$f(x_0,y_0)<f(x,y)\ \ ;\ \ \forall(x,y)\in D$$

محققاً من أجل جميع النقاط $p(x,y)$ الواقعة في الجوار القريب للنقطة $p_0(x_0,y_0)$ والمختلفة عنها .

إن نقاط القيم العظمى والصغرى تدعى بنقاط القيم الحدية للتابع ، أي نقول إن للتــابع ذي المتغيرين ، قيمة حدية في نقطة ، إذا كان للتابع في تلك النقطة قيمة عظمى أو صغرى .

وكما نعلم ، فإن الشرط الكافي ليكون للتابع $f(x)$ التابع لمتغير مستقل واحد فقط قيمة حدية في النقطة $x=x_0$ ، هو أن ينعدم المشتق الأول لهذا التابع في تلك النقطة .

ولتعيين القيم العظمى والصغرى للتابع ذي متغيرين (ويمكــن تعميمهــا لأكثــر مــن متغيرين) ، فإننا سنعتمد على المبرهنتين الآتيتين :

مبرهنة (٨) :

إذا كان لتابع $z=f(x,y)$ ، قيمة عظمى أو صغرى في النقطة $p_0(x_0,y_0)$ ، فإن كلاً من المشتقين الجزئيين $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ينعدم من أجل :

$$y=y_0\ ;\ x=x_0$$

أي :

$$f'_x(x_0,y_0)=0\ \ ;\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$$

مبرهنة (٩) :

إذا كان لتابع $z=f(x,y)$ مشتقات جزئية مستمرة من المرتبتين الأولى والثانية في النقطة (x_0,y_0) ، وكان :

$$f'_x(x_0,y_0)=0\ \ ;\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$$

فإن لهذا التابع في تلك النقطة نهاية حدية إذا تحقق الشرط الآتي :

$$D(x,y)=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2>0 \qquad (3.27)$$

وهنا نميز حالات ثلاث :

أ- للتابع قيمة عظمى في النقطة (x_0,y_0) إذا كان $f''_{xx}<0$ ، وقيمة صغرى إذا كان $f''_{xx}>0$.

ب- إذا كان $D(x,y)<0$ ، فإن التابع $z=f(x,y)$ ليس لــه قــيم حديــة فــي النقطة (x_0,y_0) .

ج- أما في حال كون $D(x,y)=0$ ، فإنه لا يمكن القول إن للتابع قيمة عظمــى أو صغرى ، أو ليس له من قيم حدية (حالة شك) .

مثال (٤٢) : أوجد القيم الحدية للتابع :

$$z=f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-3y$$

الحــــل : نحسب المشتقات الجزئية الأولى للتابع المعطى :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=2x+y-2\ ;\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=x+2y-3$$

نعدم هذه المشتقات ، وبحل جملة المعادلتين الناتجتين نجد :

$$2x+y-2=0\ \ ;\ \ x+2y-3=0$$

وبحل جملة المعادلتين حلاً مشتركاً ، نحصل على النقطة $p_0(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$.

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فنجد :

$$f''_{xx}(x,y)=2\ ;\ f''_{yy}(x,y)=2\ ;\ f''_{xy}(x,y)=1$$

نلاحظ إذا المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية هي ثوابت ، أي أن قيمها في النقطـة $p_0(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ هي على الترتيب $1, 2, 2$

نتحقق من صحة الشرط الوارد في المبرهنة (٩) فقرة (١) ، نجد أن :

$$f''_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{4})>0$$

وهذا يعني أن للتابع $z=f(x,y)$ قيمة صغرى في النقطة $p_0(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ ، وقيمـة z هي كالآتي :

$$z_{\min}=-\frac{7}{3}$$

مثال (٤٣) : أوجد القيم الحدية للتابع :

$$z=f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

الحـــل : نحسب المشتقات الجزئية الأولى :

$$f'_x=4x^3-4x+4y \;;\; f'_y=4y^3+4x-4y$$

بجعل $f'_x=0$ و $f'_y=0$ ، نجد أن :

$$4x^3-4x+4y=0 \;;\; 4y^3+4x-4y=0$$

أو :

$$x^3-x+y=0 \;;\; y^3+x-y=0$$

وبالتالي نجد بالجمع أن :

$$y^3=-x^3 \;;\; y=-x$$

نبدل في المعادلة الأولى من الجملة فنجد :

$$4x^3-8x=0 \Rightarrow 4x(x^2-2)=0$$

أي :

$$x_1=0 \;;\; x_2=\sqrt{2} \;;\; x_3=-\sqrt{2}$$

عندئذ :

$$y_1=0 \;;\; y_2=-\sqrt{2} \;;\; y_3=\sqrt{2}$$

ونحصل على نقاط ثلاثة ، تنعدم من أجلها المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى هي :

$$M_1(0,0) \;;\; M_2=(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,) \;;\; M_3=(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,)$$

نحسب المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية فنجد :

$$f''_{xx}=12x^2-4 \;;\; f''_{xy}=4 \;;\; f''_{yy}=12y^2-4$$

نتحقق من صحة الشرط الوارد في نص المبرهنة (٩) ، أي العلاقة (3,27) من أجل كل نقطة من النقاط الثلاثة ، فنجد :

ا- من أجل النقطة $M_1(0,0)$ ، فإن :

$$f''_{xx}(0,0).f''_{yy}(0,0)-[f''_{xy}(0,0)]^2=(-4)(-4)-(4)^2=0$$

أي – واستناداً للمبرهنة (٩) – لا نتمكن من تحديد وجود قيمـة حديـة فـي النقطـة $M_1(0,0)$ ، أو عدم وجودها .

ويمكن بدراسة موسعة ، أن نلاحظ أن التابع z ليس له قيمة حدية في هذه النقطـة ، ويمكن التأكد بأن قيمة التابع z مساوية الصفر .

ومن أجل أي جوار لـ M_1 ، يمكن أن تكون قيم z موجبة أو سالبة ، فمثلاً من أجـل نقاط المحور $0x$ ، أي $y=0$ ، نجد أن :

$$z=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$$

في النقاط الواقعة بجوار مبدأ الإحداثيات .

أما من أجل نقاط المستقيم $y=x$ ، نجد :

$$z=x^4+x^4-2x^2+4x^2-2x^2=2x^4>0$$

ب- من أجل النقطة $M_2(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,)$ ، أن :

$$f''_{xx}(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,).f''_{yy}(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,)-[f''_{xy}(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,)]^2=$$

$$=(12,2-4)\,(12,2-4)-(4)^2=400-16=384>0$$

وكما أن : $f''_{xx}(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,)=20>0$

أي أن للتابع z في النقطة $M_2(\sqrt{2}\,,-\sqrt{2}\,)$ قيمة صغرى ، و : $z_{\min}=-8$

ح- من أجل النقطة $M_1(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ ، لـ :

$$f''_{xx}(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}).f''_{yy}(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2})-[f''_{xy}(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2})]^2=384>0$$

$$f''_{xx}(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})=20>0$$

أي أن التابع z في النقطة $M_1(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ قيمة صغرى ، و $z_{min}=-8$

تمارين الفصل الثالث :

١- أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية :

1	$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$		4	$z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$
2	$z=arc\sin(1-x^2-y^2)$		5	$z=\ln(x.y)$ ؟
3	$z=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$		6	$z=\ln x+\ln y$

٢- مستخدماً تعريف نهاية تابع ، برهن أن :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+xy+y^2)=7$$

٣- أوجد نهاية المقادير الآتية :

1	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}}=-2$		5	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^2}$
2	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{(3-x+y)}{(4+x-2y)}$		6	$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to \pi}}[x^2.\sin(\dfrac{y}{x})]$
3	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$		7	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy-2)}{\tan^{-1}(3xy-6)}$
4	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\dfrac{3x-2y}{2x-3y})$		8	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

٤- أوجد المشتقات الجزئية الأولى للتوابع الآتية :

$$z=x^2y-y^2\quad ;\quad z=e^{x^2+y^2}$$

$$z=\ln[tg(\frac{y}{x})]\quad ;\quad z=(\frac{y}{x})arc\sin(\frac{x}{y})$$

$$z=x^2\quad ;\quad u=\sin(xy)+\sin(xz)+\sin(yz)$$

$$u=x^{y/z}$$

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$$

٥- برهن أن التابع :

$$z=\ln(x^2+y^2+yx)$$

يحقق العلاقة :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

٦- برهن أن التابع :

$$z=xy+xe^{y/z}\quad x$$

يحقق العلاقة :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

٧- احسب المشتقات الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية للتابع : للتوابع

$$z=x^{y^2}\ ;\ z=x^4-4x^2y^2+y^4\ ;\ z=x^2\sin^2 y$$

$$z=e^{x^2}+y^2+z^2\ ;\ z=arctg(x.y)$$

$$z=\ln[\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}]\ ;\ z=\frac{x}{y^2}$$

$$z=arc\sin(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})\ ;\ u=e^{x/y}$$

$$z = x^3 y + 2x^2\cos y + 1 \; ; \; z = arctg(x^2 + y^2)$$

$$z = x^2 . y^3 \; ; \; u = \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right]$$

$$u = arcsin(x+y) \; ; \; u = e^{x^2 + y^2}$$

٨- تحقق من صحة العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

من أجل التابع :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - x y \ln x$$

٩- برهن على وجود $f''_{xy}(0,0)$ ، من أجل :

$$f(x,y) = \frac{x y}{x^2 + y^2}$$

حيث :

$$f''(0,0) = 0 \; ; \; x^2 + y^2 \neq 0$$

١٠- أوجد التفاضل التام للتوابع الآتية :

1	$z = (\frac{y}{x})$	6	$z = e^{x^2 + y^2}$
2	$z = x^y$	7	$u = 2x^2 + 3xy^2 + \sin 2z$
3	$z = arctg(\frac{y}{x})$	8	$z = arcsin(\frac{x}{y})$
4	$z = \ln(x.y)$		
5	$U = x^2 . e^{y/x}$	9	$u = x^2 + xy^2 \underset{=}{=} \sin z$

١١- إذا كانت $z^3 - xz - y = 0$ ، أثبت أن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} = \frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 \pm x)^3} = \frac{1}{(3z^2 - x)^2}$$

١٢- بيّن أن :

$$U(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية (لابلاس) الآتية :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

بفرض أن : $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

١٣- أثبت أن : $f(x,y) = x^2 + 2y$ مستمرة عند النقطة $(1,2)$

١٤- بين فيما إذا كان التابع :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y & ; (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & ; (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

أ- له نهاية عند $x \to 1 \; , \; y \to 2$ ، ب- مستمر عند النقطة $(1,2)$

١٥- بفرض :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{عندما} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{عندما} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

والمطلوب :

أ- أثبت أن $f_y(0,0) \; , \; f_x(0,0)$ كلاهما موجود .

ب- $f(x,y)$ غير مستمر عند النقطة $(0,0)$.

١٦- أوجد المشتق الأول للتابع $y = f(x)$ المعطى كتابع ضمني بالعلاقات :

أ- $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ، ب- $e^y - e^x + xy = 0$

١٧- أوجد القيم الحدية للتوابع الآتية ، وحدد نوعها :

1	$z=x^2+y^2-3xy$		4	$z=x^2+xy+y^2-2x+y$
2	$z=e^x+e^y+e^{xy}$		5	$z=(x-5)\sqrt[3]{x^2+y^2}$
3	$z=e^x\sin y$		6	$z=4xy-x^2-y^2$

١٨- إذا كانت :

$$u-2v^2=x-2y \quad , \quad u^2-v=3x+y$$

والمطلوب ، أوجد كلاً مما يلي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} , \frac{\partial v}{\partial x} , \frac{\partial u}{\partial y} , \frac{\partial v}{\partial y}$$

١٩- إذا كانت $U=z\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ ، حيث :

$$x=5r^2+4s \;;\; y=6r-3s^2 \;;\; z=3r^2-2s^2$$

أوجد :

أ- $\frac{\partial U}{\partial r}$ ، ب- $\frac{\partial U}{\partial s}$

٢٠- إذا كانت :

$$z=e^{x^2y} \;;\; x=t\cos 4t \;;\; y=t\sin 3t$$

احسب : $\frac{dz}{dt}$