الفصل الثاني: التمثيل الرياضي لنظم التحكم

Chapter 2: Mathematical Models of Control Systems

إذا كان من الممكن تمثيل السلوك الديناميكي لأي نظام بواسطة معادلة أو مجموعة من المعادلات الرياضية، فإننا نسمي هذه المعادلة (أو مجموعة المعادلات) بالنموذج الرياضي للنظام.

يمكن أن يبنى النموذج الرياضي لأي نظام عن طريق معرفة الخصائص الفيزيائية لهذا النظام، مثل المعادلة الواصفة لسلوك كتلة في نظام ميكانيكي أو لسلوك مقاومة في نظام كهربائي. كما يمكن تحديد النموذج الرياضي لنظام عن طريق التجريب، وذلك بقياس كيفية استجابة خرج النظام لإشارات دخل معروفة.

سنقوم في هذا الفصل باستعراض أهم المعادلات والعلاقات الرياضية الواصفة للنظم الميكانيكية، الكهربائية، الحرارية، الهيدروليكية والمحركات الكهربائية. سنقوم أيضاً بتقديم طريقة تمثيل النظم باستخدام المخططات الصندوقية، وسنستعرض لأهم القواعد المتبعة لتبسيط هذه المخططات، علماً أن المخطط الصندوقي لنظام يشتق من المعادلات الرياضية الواصفة لهذا النظام، وتعد من الطرائق الشائعة الاستخدام لتمثيل النظم.

1-2 النماذج الرياضية البسيطة:

1-1-2 المعادلة الرياضية الواصفة لمحرك سيارة:

يحتاج بناء نموذج رياضي لمحرك سيارة إلى الربط بين زاوية دواسة البنزين (θ) مع السرعة الأمامية للسيارة (u). يمكن أن يوصف النموذج في هذه الحالة بالمعادلة الرياضية التالية:

$$u(t) = a.\theta(t).......(1-2)$$

لقد تم التعبير عن u، θ في المعادلة بـ $\theta(t)$، $u(t)$ وذلك لأنهما تابعان للزمن. يمكن أن يحسب الثابت (a)، إذا كانت المعلومات التالية متوفرة:

- T: عزم المحرك.
- F: قوة جر الدولاب.

- D: قوة السحب الإيروديناميكية (القوة الديناميكية نتيجة لتأثير الهواء).

لدينا:

$$T = b.\breve{\theta}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (2-2)$$

$$F = c.T \ldots\ldots\ldots\ldots (3-2)$$

$$D = d.u(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (4-2)$$

يجب أن تتساوى F قوة جر الدولاب مع قوة السحب الديناميكية للهواء، فيكون بالتالي:

$$D = F \quad \rightarrow \quad d.u(t) = c.T$$

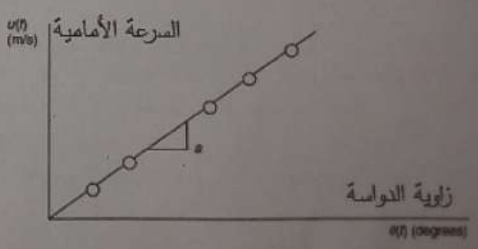
نأخذ المعادلة (2-2) بالحسبان فنحصل على: $d.u(t) = c.b.\theta(t)$

وبالتالي يكون:

$$u(t) = \left(\frac{c.b}{d}\right).\theta(t) \ldots\ldots (5-2)$$

تعطي العلاقة السابقة ثابت السيارة (a) ويساوي: $a = c.b/d$.

إذا كانت الثوابت b c d غير معروفة، يمكن الحصول على نموذج السيارة بقياس السرعة الامامية $u(t)$ وذلك من أجل عدة زوايا لدواسة التسارع $\theta(t)$، ومن ثم رسم النتائج. يظهر الشكل (2-1) العلاقة بين $u(t)$ و $\theta(t)$ وذلك من أجل عدة نقاط قياس. يبين الشكل (2-1) أن العلاقة خطية بين $u(t)$ و $\theta(t)$ حيث أن قيمة a هي ميل المستقيم الممثل للعلاقة بين $u(t)$ و $\theta(t)$.



الشكل (2-1): العلاقة بين السرعة الأمامية للسيارة وزاوية الدواسة.

2-2 النماذج الرياضية المعقدة:

تبين المعادلة (2-1) أنه عندما يحدث تغير في زاوية دواسة البنزين، ستتغير سرعة السيارة بشكل لحظي. في الحقيقة وكما يعلم جميع سائقي السيارات، فإن السيارة تأخذ فترة زمنية حتى تتغير سرعتها إلى القيمة الجديدة، لذلك نحتاج عند بناء نموذج ديناميكي للسيارة إلى أخذ هذه الحقيقة بعين الاعتبار.

تمثل النماذج الرياضية السلوك الديناميكي للنظم الفيزيائية حيث تستخدم المعادلات التفاضلية، وبالتالي يمكن أن يكون التمثيل الأكثر دقة للسيارة، على الشكل التالي:

$$e.\frac{du}{dt} + f.u = g.\theta(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (6-2)$$

حيث: du/dt هو تسارع السيارة والذي يأخذ قيمة صفرية عندما تتحرك السيارة بسرعة ثابتة. في هذه الحالة تصبح المعادلة (2-6): $f.u(t) = g.\theta(t)$، أي:

$$u(t) = \frac{g}{f}.\theta(t) \ldots\ldots (7-2)$$

وهنا أيضاً g/f ثابت السيارة، وهو مطابق للثابت (a) في المعادلة (2-1).

2-2-1 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة:

لنفرض أن لدينا نظاماً ذا خرج $y(t)$، ودخل $r(t)$، وذا معاملات ثابتة $a, b, c, \ldots$. إذا كان من الممكن أن توصف ديناميكية النظام بمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى كمايلي:

$$a.\frac{dy(t)}{dt} + b.y(t) = c.r(t) \ldots\ldots (8-2)$$

إذا كانت ديناميكية النظام توصف بمعادلة من الدرجة الثانية، فإن النظام يمكن أن يوصف كمايلي:

$$a.\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b.\frac{dy(t)}{dt} + c.y(t) = e.r(t) \ldots\ldots (9-2)$$

إذا كانت ديناميكية النظام توصف بمعادلة من الدرجة الثالثة، فإن النظام يمكن أن يوصف كمايلي:

$$a.\frac{d^3y(t)}{dt^3} + b.\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c.\frac{dy(t)}{dt} + e.y(t) = f.r(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (10-2)$$

تمثل المعادلات (2-8)، (2-9) و (2-10) معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة. تتحدد درجة المعادلة التفاضلية بدرجة أعلى مشتق لـ $y(t)$ فيها. تسمى النظم التي توصف بمثل هذه المعادلات، بالنظم الخطية ويكون لها درجة توافق درجة المعادلة الموصفة لها. على سبيل المثال، المعادلة (2-8) تصف نظام من الدرجة الأولى، بينما المعادلات (2-9) و (2-10) تصف نظم من الدرجة الثانية والثالثة على التوالي.

2-4 النمذجة الرياضية للنظم الكهربائية:

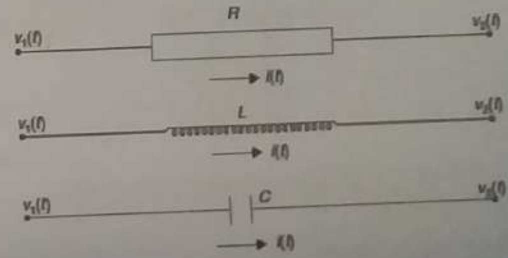
نفرض لدينا العناصر الكهربائية التالية: مقاومة، محارضة، سعة والمبينة بالشكل (2-10).

بالنسبة للمقاومة الكهربائية، نطبق قانون أوم فنحصل على المعادلة التالية:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=Ri(t)\ldots\ldots(25-2)$$

بالنسبة للمحارضة، تكون العلاقة بين التوتر المطبق على طرفي المحارضة والتيار المار فيه، كما يلي:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=L\frac{di(t)}{dt}\ldots\ldots(26-2)$$



الشكل (2-10): العناصر الكهربائية

تكون العلاقة بالنسبة للسعة الكهربائية، بين التوتر المطبق على طرفي السعة والتيار المار فيها كما يلي:

$$i=\frac{d\theta}{dt}=C\frac{d}{dt}\left[v_1(t)-v_2(t)\right]\ldots\ldots(27-2)$$

نحصل بتكامل كلا طرفي المعادلة (2-27) على:

$$\left[v_1(t)-v_2(t)\right]=\frac{1}{C}\int i\,dt\ldots\ldots(28-2)$$

مثال 2-4:

لنوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين $v_1(t)$ و $v_2(t)$ لدارة RC المبينة بالشكل (2-11). من المعادلات (2-25) و (2-28) نجد:

$$v_1(t)-v_2(t)=Ri(t)\ldots\ldots(29-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C}\int i\,d(t)$$

أو:

$$C\frac{dv_2}{dt}=i(t)\ldots\ldots(30-2)$$

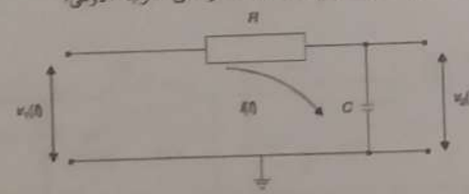
نحصل بتعويض المعادلة (2-30) في المعادلة (2-29)، على:

$$v_1(t)-v_2(t)=R.C.\frac{dv_2}{dt}\ldots\ldots(31-2)$$

يمكن إعادة ترتيب المعادلة (2-31)، لتصبح على الشكل التالي:

$$R.C.\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)=v_1(t)\ldots\ldots(32-2)$$

تملك المعادلة (2-32) الشكل العام لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.



الشكل (2-11): دارة RC

مثال 2-5:

لنوجد المعادلات التفاضلية التي تربط بين $v_1(t)$ و $v_2(t)$ للدارات المبينة بالشكل (2-12).

1- الدارة (أ) من الشكل (2-12): نستخدم المعادلات (2-25) و (2-26)، فيكون:

$$v_1(t)-v_2(t)=Ri(t)+L\frac{di}{dt}\ldots\ldots(33-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C}\int i\,dt$$

أو:

$$C\frac{dv_2}{dt}=i(t)\ldots\ldots(35-2)$$

يكون لدينا بتعويض المعادلة (2-34) في المعادلة (2-33):

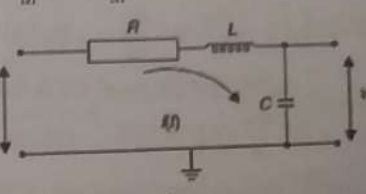
$$v_1(t)-v_2(t)=RC\frac{dv_2}{dt}+L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_2}{dt}\right)$$

أو:

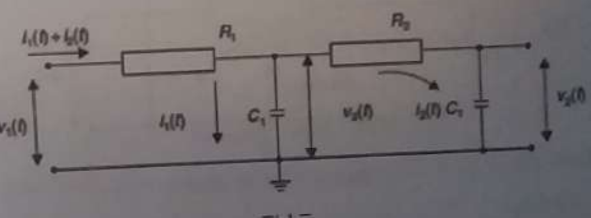
$$v_1(t)-v_2(t)=RC\frac{dv_2}{dt}+LC\frac{d^2v_2}{dt^2}\ldots\ldots(34-2)$$

يمكن صياغة المعادلة (35-2) على شكل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$LC\frac{d^2v_2}{dt^2}+RC\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)=v_1(t)\ldots\ldots(36-2)$$



- أ -



- ب -

الشكل (2-12): الدارات الكهربائية للمثال 2-5

2- الدارة (ب) في الشكل 2-12: معادلات الدارة:

$$v_1(t)-v_3(t)=R_1\left(i_1(t)+i_2(t)\right)\ldots\ldots(37-2)$$

$$v_3(t)=\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt$$

أو:

$$i_1(t)=C_1\frac{dv_3}{dt}\ldots\ldots(38-2)$$

$$v_3(t)-v_2(t)=R_2\,i_2(t)\ldots\ldots(39-2)$$

$$v_2(t)=\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$$

أو:

$$C_2\frac{dv_2}{dt}=i_2(t)\ldots\ldots(40-2)$$

من المعادلة (2-39) نجد: $v_3(t)=R_2\,i_2(t)+v_2(t)$

بتعويض قيمة $i_2(t)$ من المعادلة (2-40) في المعادلة السابقة نجد:

$$v_3(t)=R_2C_2\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)\ldots\ldots(41-2)$$

لكن من المعادلات (2-41) و (2-38) نجد:

$$i_1(t)=C_1\frac{d}{dt}\{R_2C_2\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)\}$$

$$i_1(t)=R_2C_1C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+C_1\frac{dv_2}{dt}\ldots\ldots(42-2)$$

بتعويض المعادلات (2-40) و (2-41) و (2-42) بالمعادلة (2-37) نجد:

$$v_1(t)-\{R_2C_2\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)\}=R_1\{R_2C_1C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+C_1\frac{dv_2}{dt}+C_2\frac{dv_2}{dt}\}$$

نحصل بإعادة ترتيب المعادلة السابقة على المعادلة التالية والتي لها الشكل العام لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)\frac{dv_2}{dt}+v_2(t)=v_1(t)\ldots\ldots(43-2)$$