

جامعة دمشق  
المعهد العالي للبحوث والدراسات الزلزالية  
قسم علم الزلازل  
ماجستير تأهيل وتخصص  
العام الدراسي 2019-2020

## Site Response Analysis (2) تحليل استجابة الموقع (2)

د. رامي ابراهيم

# Analytical methods used to estimate site response

## الطرق التحليلية المستخدمة في حساب تأثير الموقع

We presented in previous lecture the empirical methods to estimate site response and in this lecture we focus on the analytical methods for estimating site response.

The methods used to estimate site response analytically are divided into:

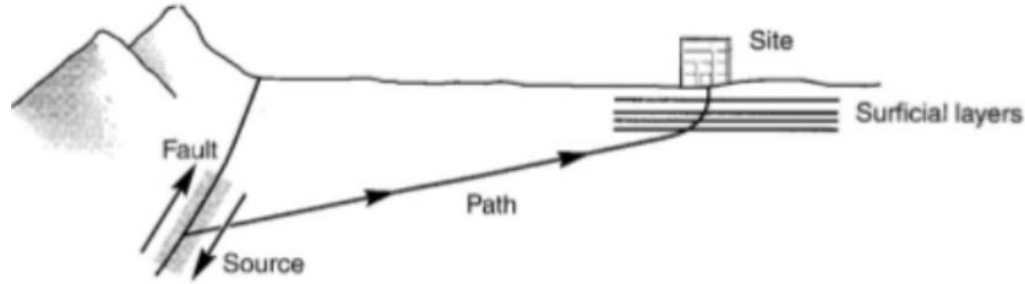
1. Linear approach
2. Equivalent linear approach
3. Non-linear approach

تطرقنا في المحاضرة السابقة للطرق التجريبية في حساب تأثير الموقع وفي هذه المحاضرة فإننا نسلط الضوء على الطرق التحليلية في الحساب.  
تقسم الطرق التحليلية في الحساب إلى:

1. المنهجية الخطية
2. المنهجية الخطية المكافئة
3. المنهجية اللاخطية

# One-dimensional ground response analysis

## تحليل الاستجابة الأرضية في المستويات أحادية البعد

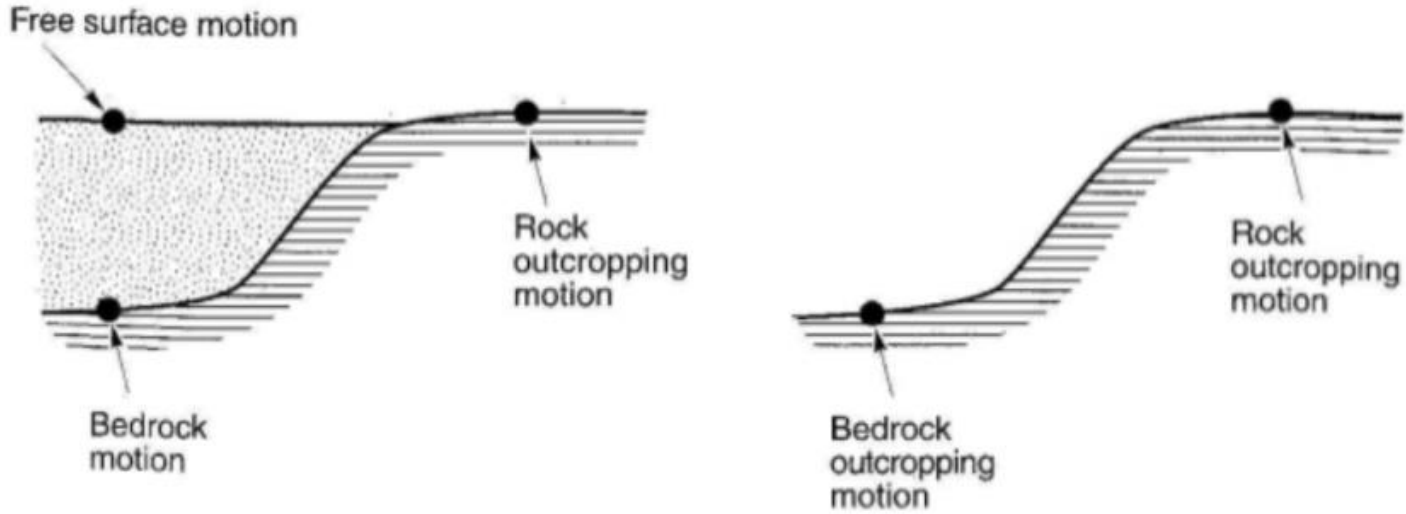


The most simple analysis of ground motion is done in one-dimensional space with assumption is that all the boundaries are horizontal and the response of soil deposit is predominantly caused by SH-waves propagating vertically from underlying bedrock.

أن أبسط نموذج لتحليل استجابة الحركة الأرضية تتم لمقاطع أحادية البعد مع افتراض أن كل الطبقات التي تسير بها الأمواج هي طبقات مستوية وأن استجابة التوضعات الرسوبية تعود إلى انتشار الأمواج العرضية (SH) التي تنتشر بشكل شاقولي من الطبقات الأرضية.

# Ground response nomenclature

## مصطلحات تخص الاستجابة الأرضية



Motion at the surface of a soil deposit is called **free surface motion**

تدعى الحركة الأرضية على السطح الحر لتوضعات ترابية بالحركة على السطح الحر

Motion at the base of the soil deposit is called **bedrock motion**

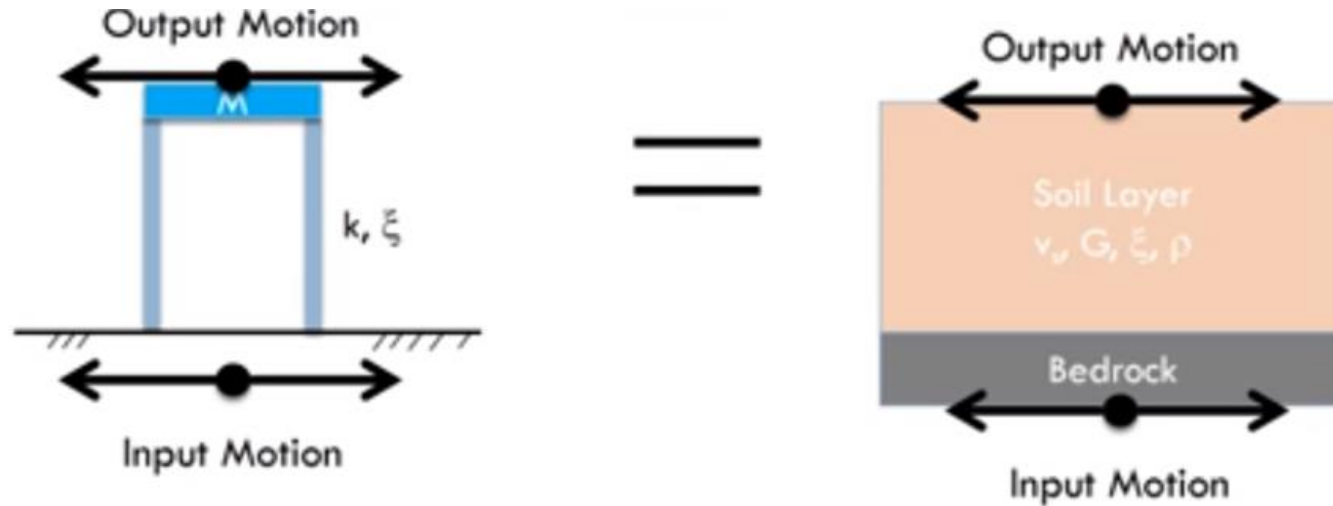
تدعى الحركة الأرضية على صخر الأساس لتوضعات ترابية بالحركة على مستوى الصخر الأساس

Motion at a location where bedrock is exposed is called **outcropping motion**

تدعى الحركة على المستوي التي تتكشف فيه توضعات الصخر الأساس بالحركة على التكتشفات الصخرية

# Transfer function with linear system

## دالة التحويل في الأنظمة الخطية



Transfer function is a derived equation that allows the evaluation from input motion (at the base) to the output motion (in the mass).

**Main assumptions:**  $G$ ,  $\xi$  (shear-modulus and damping ratio which called dynamic properties) DO NOT CHANGE with  $\gamma$  (shear-strain)

إن دالة التحويل هي عبارة عن معادلة تسمح لنا بالانتقال مباشرة من إشارة الدخل (عند القاعدة) إلى إشارة الخرج (عند الكتلة في الأعلى).

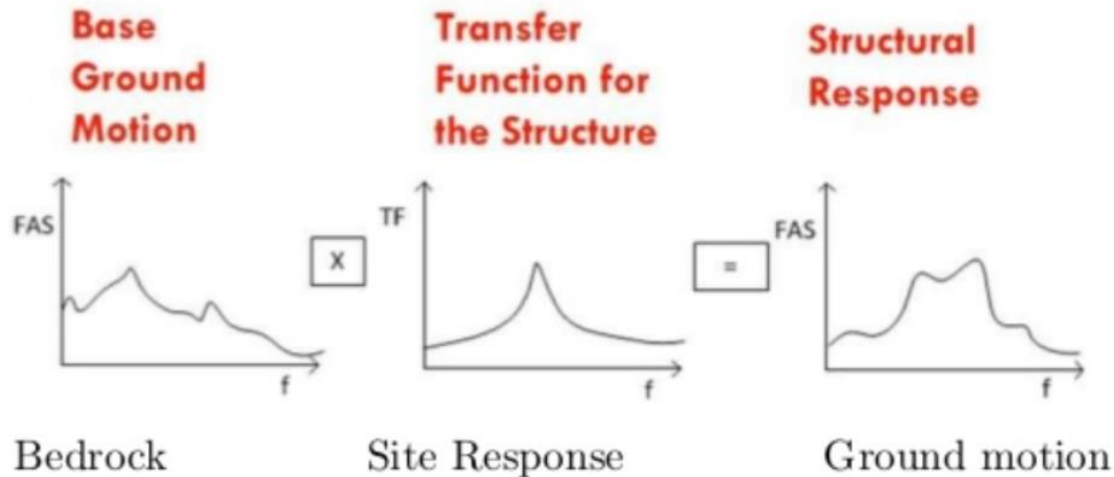
يعتمد الافتراض الأساسي في هذه الحالة على أن كلا معامل القص و نسبة التخماد والتي تدعى بالخصائص الديناميكية للمادة لا تتغير بتغير الانفعالات القصية.

# Transfer function with linear system

## دالة التحويل في الأنظمة الخطية

### Transfer Functions - TF

$TF=|F(\omega)|$  - Function of frequency of the loading.



If we multiply the ground motion at the bedrock by the transfer function of the medium we obtain the ground motion at the surface. It is noted that this process is done in the frequency domain.

إذا ضربنا إشارة الدخل (عند صخر الأساس) بدالة التحويل المستخرجة للوسط فإننا نحصل على إشارة الخرج (على السطح الحر). لا بد من الإشارة هنا إلى أن هذه العملية تتم في المجال الترددي.

# One-dimensional site response analysis-linear approach

## تحليل استجابة الموقع وفق المنهجية الخطية

We will study four main cases related to the analysis of 1-D site response using linear approach as follows

سوف نقوم بدراسة أربع حالات أساسية في تحليل استجابة التربة مستخدمين المنهجية الخطية لمقاطع ليتولوجية أحادية البعد

### Case I: Homogeneous undamped soil on rigid rock

الحالة الأولى: حالة تربة غير قابلة للتخامد فوق صخر صلب

### Case II: Homogeneous damped soil on rigid rock

الحالة الثانية: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر صلب

### Case III: Homogeneous damped soil on elastic rock

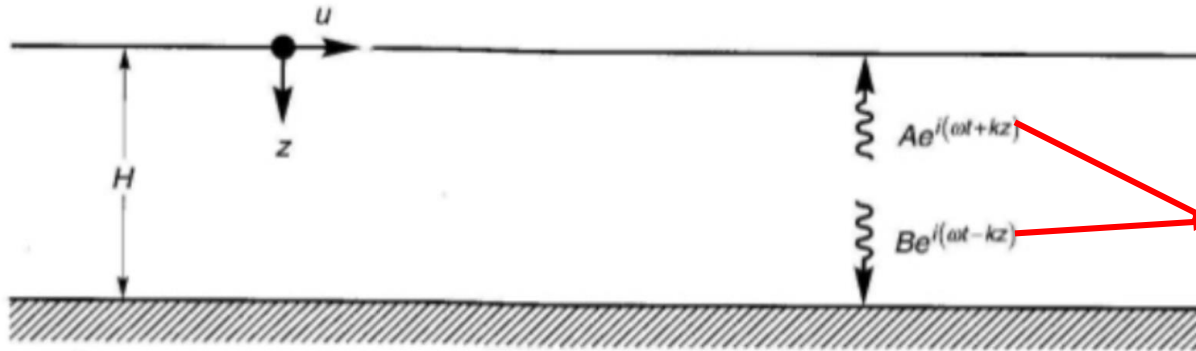
الحالة الثالثة: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

### Case VI : layered damped soil on elastic rock

الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

## Case I: Homogeneous undamped soil on rigid rock

الحالة الأولى: حالة تربة غير قابلة للتخامد فوق صخر صلب



Upward (+z) and downward (-z) motion equation

معادلتى الحركة الموجية للأعلى (+z) والأسفل (-z).

Let's consider a uniform layer of isotropic, linear elastic soil overlaying rigid rock. Harmonic horizontal motion of bedrock will produce vertically propagating shear waves in overlaying soil. The displacement in this case can be expressed as:

$$u(z, t) = 2A \left( \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} \right) e^{i\omega t} = 2A \cos(kz) e^{i\omega t}$$

Where  $k = \omega / v_s$  is the wavenumber

إذا اعتبرنا طبقة منتظمة متجانسة ذات استجابة خطية متوضعة فوق صخر صلب وعلى اعتبار أن الحركة الأرضية هي حركة متجانسة تنتشر شاقولياً في الرسوبات المتوضعة فوقها فيعبر عن الإزاحة بالعلاقة الموضحة أعلاه



# Case I: Homogeneous undamped soil on rigid rock

الحالة الأولى: حالة تربة غير قابلة للتخامد فوق صخر صلب

## Transfer function

دالة التحويل

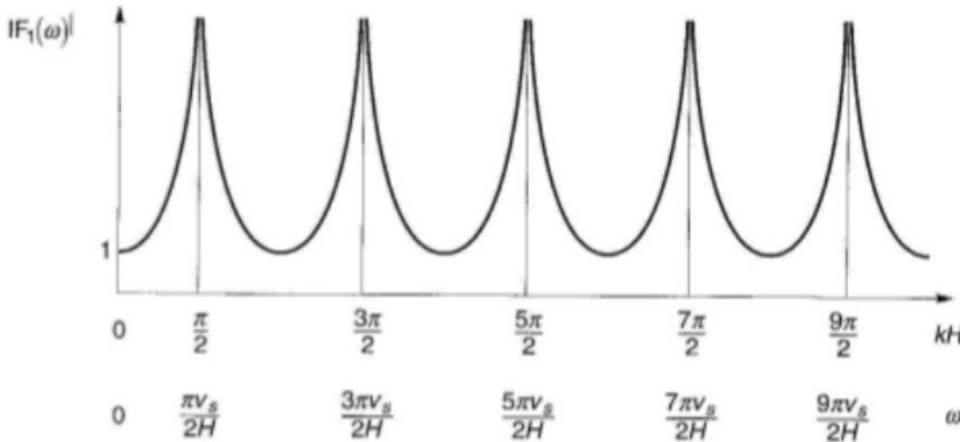
$$F(\omega) = \frac{U_{\max}(0,t)}{U_{\max}(H,t)} = \frac{2A \cos(0)e^{i\omega t}}{2A \cos(kH)e^{i\omega t}}$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\cos(kH)} = \frac{1}{\cos(\omega H / v_s)}$$

The value of transfer function is the amplification ratio between surface and bedrock.

As  $\omega H / v_s$  approaches  $\pi/2 + n\pi$  the denominator approaches zero, which imply that infinite amplification or resonance will occur.

The current model illustrates that the response of soil is dependent on the frequency, thickness and S-wave velocity.



تمثل قيمة دالة التحويل نسبة التضخيم بين السطح الحر والسطح المرجعي.

حيث أن  $\omega H / v_s$  تصل إلى القيمة  $\pi/2 + n\pi$  فإن المقام يأخذ قيمة صفرية وتصل نسبة التضخيم إلى قيمة غير متناهية وتحدث ظاهرة الطنين.

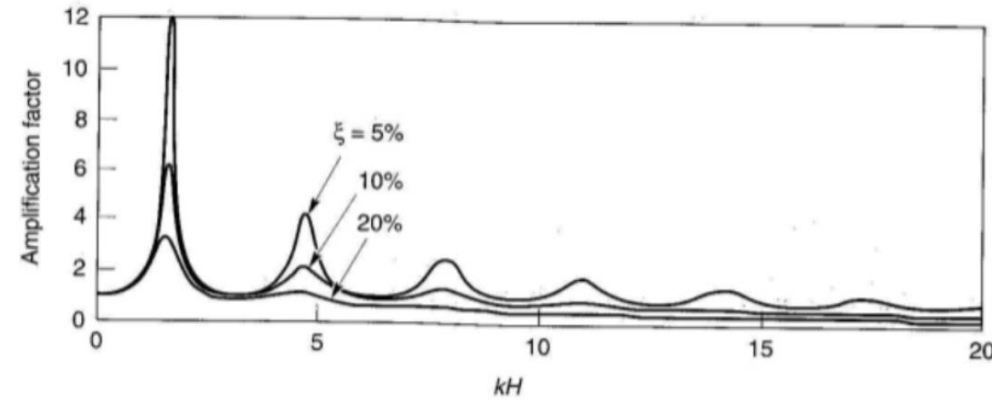
يوضح النموذج الحالي أن استجابة التربة تعتمد على التردد وسماكة الطبقات وسرعة أمواج القص.

## Case II: Homogeneous damped soil on rigid rock

الحالة الثانية: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر صلب

### Transfer function

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(kH) + (\zeta kH)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\omega H / v_s) + (\zeta \omega H / v_s)^2}}$$



Site amplification factor differs according to damping ratio.

يختلف تضخيم الموقع باختلاف نسبة التخامد.

The greatest amplification factor approximately occurs at the lowest natural frequency, known as the fundamental frequency  $\omega_0 = \frac{\pi v_s}{2H}$

The period of vibration corresponding to the natural frequency is called characteristic site period  $T_s = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4H}{v_s}$

إن أكبر قيمة لعامل التضخيم تسجل عند أصغر قيمة لتردد الطبيعي المعروف بالتردد الأساسي

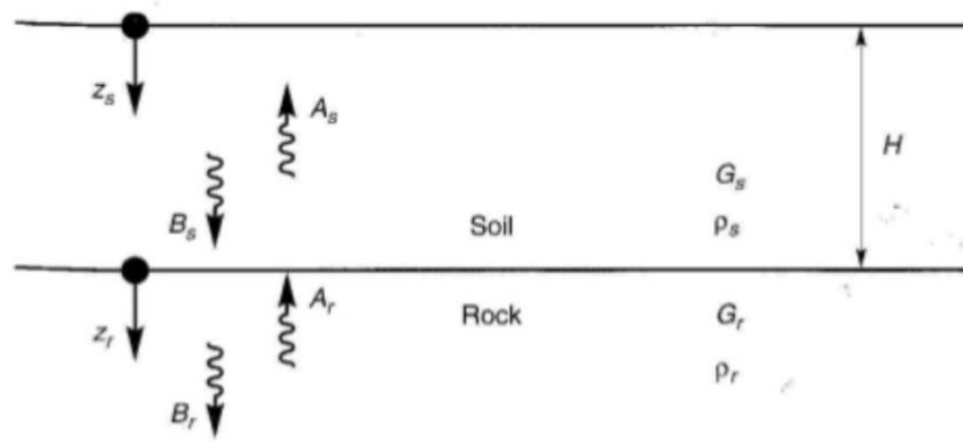
$$\omega_0 = \frac{\pi v_s}{2H}$$

يدعى دور الاهتزاز المتعلق بالتردد الطبيعي بدور

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4H}{v_s} \quad \text{خصائص الموقع}$$

## Case III: Homogeneous damped soil on elastic rock

الحالة الثالثة: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر مرن



In the rigid model, the waves are perfectly reflected by the rock. In this case, there are reflected and transferred waves. In addition, the presence of damping will imply complex stiffness.

في حال نموذج صلب، فإن الأمواج تنعكس بشكل تام عند اصطدامها بالصخر. في هذه الحالة فإن الأمواج ترتد وتمر إلى الطبقة الصخرية. بالإضافة إلى ذلك فإن التخامد المفروض على الوسط سوف يحول معامل القساوة إلى معامل بالشكل العقدي.

## Case III: Homogeneous damped soil on elastic rock

الحالة الثالثة: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

### Transfer function

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\cos(k_s^* H) + (i\alpha_z^* \sin(k_s^* H))} = \frac{1}{\cos(\omega H / v_{ss}^*) + (i\alpha_z^* \sin(\omega H / v_{ss}^*))}$$

$$k^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G^*}} \quad \text{عدد موجي عقدي} \quad \text{Complex wave number}$$

$$v_s^* = \sqrt{G^* / \rho} \quad \text{سرعة أمواج قصية بالشكل العقدي} \quad \text{Complex shear wave velocity}$$

$$\alpha_z^* = \frac{\rho_s v_{ss}^*}{\rho_r v_{sr}^*} \quad \text{نسبة الممانعة الصوتية بالشكل العقدي} \quad \text{Complex impedance ratio}$$

$$v_{ss}^* \quad \text{سرعة أمواج القص للتربة بالشكل العقدي} \quad \text{shear wave velocity of soil}$$

$$v_{sr}^* \quad \text{سرعة أمواج القص للصخور بالشكل العقدي} \quad \text{shear wave velocity of rock}$$

$$G^* = G(1 + 2i\zeta) \quad \text{معامل القص بالشكل العقدي} \quad \text{Complex shear modulus}$$

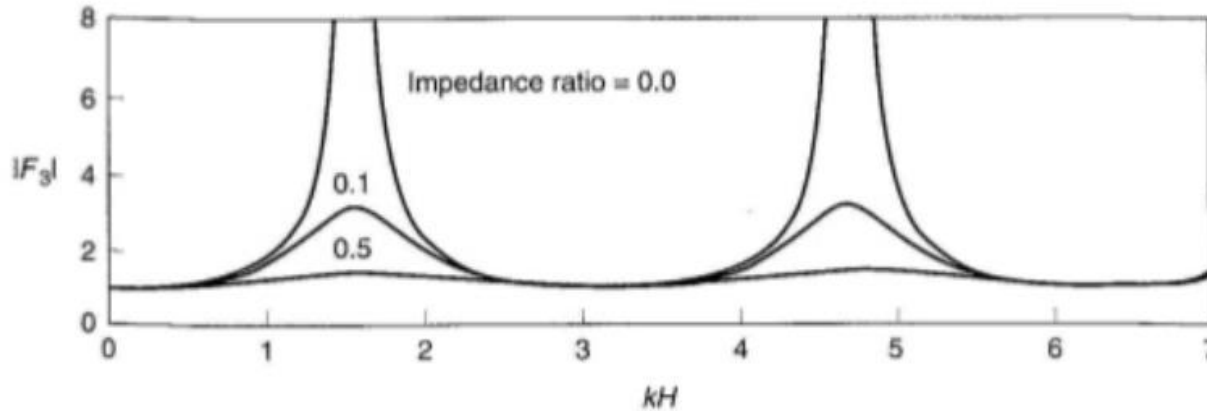
## Case III: Homogeneous damped soil on elastic rock

### الحالة الثالثة: حالة تربة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

If it is assumed a damping ratio  $\zeta = 0$ , the transfer function can be expressed as

إذا فرضنا أن نسبة التخامد ذات قيمة صفرية فيعبر عن دالة التحويل بالعلاقة التالية

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_s H + \alpha_z^2 \sin^2 k_s H}}$$



Resonance cannot occur (denominator is always greater than zero). The stiffer bedrock means that greater amplification may occur.

لا تحدث ظاهرة الطنين لأن المقام دائماً أكبر من القيمة الصفرية. كلما كان صخر الأساس أقسى فإن نسبة التضخيم تكون أكبر.

## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

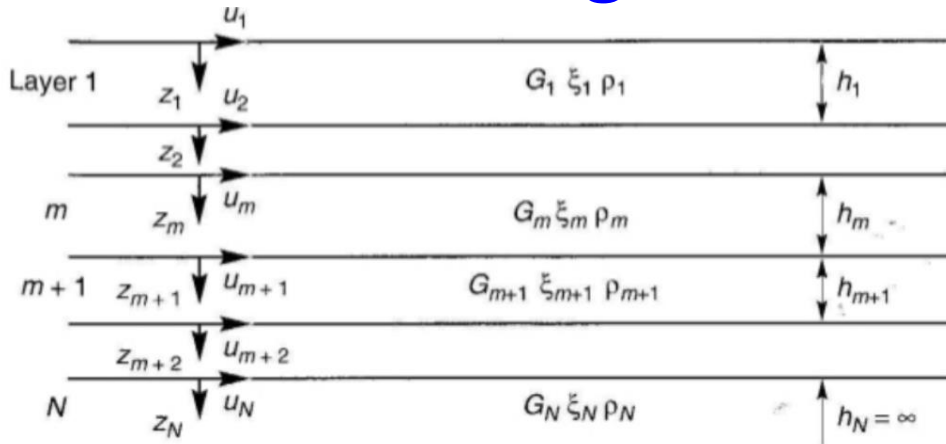
While the homogenous elastic layer models or previous models are useful for illustration of the influence of soil conditions on several ground motion characteristics, they are seldom suitable for analysis of practical ground response problems.

Real ground response problems usually involve soil deposits from layers of different stiffness and damping characteristics with boundaries at which elastic wave energy will be reflected and transmitted. Such conditions require the development of transfer functions for layered soil deposits.

تعتبر الحالات الثلاث المشروحة سابقاً ضرورية لتوضيح تأثير شروط التربة على خصائص الحركات الأرضية ونادراً ما تكون مناسبة لدراسة خصائص استجابة التربة بشكل عملي. إن مشاكل الاستجابة الأرضية الحقيقية عادة ما تشمل توضعات لطبقات رسوبية تختلف بقساواتها وخصائصها التخامدية مع فواصل طبقية يحدث عليها ظواهر الانعكاس ومرور الأمواج المرنة. أن ظروف كهذه تتطلب تطوير دالة التحويل لدراسة خصائص الموقع في حال توضعات رسوبية متطبقة وهي الحالة الأكثر واقعية.

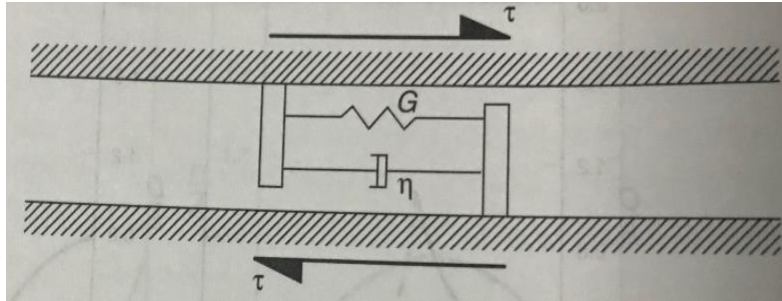
## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن



Consider a soil deposit consisting on N horizontal layers where the Nth layer is the bedrock. Assuming that the soil to have the shearing characteristics of Kelvin-Voigt solid model.

إذا اعتبرنا أن التوضعات الرسوبية تتألف من N طبقة حيث تمثل الطبقة الأخيرة الصخر الأساس. على افتراض أن للتربة خصائص قصية من نمط كيلفن-فويغت.



Total resistance of shearing deformation by Kelvin-Voigt is given by the sum of an elastic (spring) component and a viscous (dashpot) component.  $\tau = \sigma_{xz}$  is the shear stress,

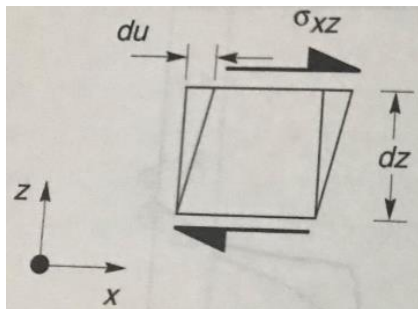
$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$$

is the shear strain,

$$\mu = \frac{2G}{\omega} \xi$$

is the viscosity of material.

تعطى المقاومة الكلية لتشوه القص حسب كيلفن-فويغت كمجموع للمركبة المرنة (الناض) والمركبة اللزجة (المخمد). يعطى الإجهاد القصي بالعلاقة  $\tau = \sigma_{xz}$  والانفعال القصي بالعلاقة  $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$  وتشير  $\mu = \frac{2G}{\omega} \xi$  إلى معامل اللزوجة.



## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

Following the stress strain relationship for a Kelvin-Voigt solid in shear can be expressed as

مما سبق فإن العلاقة حسب كيفن-فويغت يمكن أن يعبر عنها كما يلي

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (1)$$

The one dimensional equation of motion for vertically propagating SH-waves can be written as follow

يعبر عن معادلة الحركة الموجية لأمواف SH في المقطع احادي البعد كما يلي

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \quad (2)$$

Substituting equation (1) into (2) with  $\tau = \sigma_{xy}$  and  $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$ , and differentiating the right side allows the wave equation to be written as

بعد تعويض معادلة (1) إلى المعادلة (2) وعلى اعتبار أن  $\tau = \sigma_{xy}$  و  $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$  واشتقاق الطرف الأيمن يسمح لنا بكتابة المعادلة الموجية على الشكل التالي

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \quad (3)$$



## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

The solution of the wave equation can be expressed as follow

يمكن كتابة الحل للمعادلة السابقة كما يلي

$$u(z, t) = Ae^{i(\omega t + k^* z)} + Be^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4)$$

where A and B represent the amplitudes of waves travelling in the  $-z$  (upward) and  $+z$  (downward) directions, respectively. The shear stress is then given by the product of the complex shear modulus  $G^*$  and shear strain as

حيث أن A و B تمثلان السعة الموجية باتجاه الأعلى والأسفل. إن قيمة الإجهاد القصي تعطى كنتاج قيمة معامل القص العقدي  $G^*$  والانفعال القصي كما يلي

$$\tau(z, t) = G^* \frac{\partial u}{\partial z} = (G + i\omega\eta) \frac{\partial u}{\partial z} = G(1 + 2i\zeta) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5)$$

Introducing a local coordinate system,  $Z$ , for each layer, the displacement at the top and bottom of layer  $m$  will be

إذا افترضنا أن الحركة تتم بنظام إحداثيات محلي  $Z$  فإن الإزاحة عند قمة وأسفل الطبقة  $m$  سوف يعبر عنها على الشكل التالي

$$u(Z_m = 0, t) = (A_m + B_m)e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$u_m(Z_m = h_m, t) = (A_m e^{ik_m^* h_m} + B_m e^{-ik_m^* h_m})e^{i\omega t} \quad (7)$$

## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

Displacements at layer boundaries must be compatible (i.e., the displacement at the top of a particular layer must be equal to the displacement at the bottom of layer). Applying the compatibility requirement to the boundary between layer m and layer m+1, that is,

يجب أن تكون الإزاحة متوافقة من طبقة إلى أخرى تليها يعني أن الإزاحة على قمة طبقة ما يجب أن تكون مساوية للإزاحة عند أسفل الطبقة التي تعلوها. إذا طبقنا شرط التوافق بين طبقتين m و m+1 فإن

$$u_m(Z_m = h_m, t) = u_{m+1}(Z_{m+1} = 0, t) \quad (8)$$

$$A_{m+1} + B_{m+1} = A_m e^{ik_m^* h_m} + B_m e^{-ik_m^* h_m} \quad (9)$$

The shear stresses at the top and bottom of layer m are

تعطى علاقة الإجهادات القصية عند قمة طبقة وأسفل m طبقة بالعلاقة التالية

$$\tau_m(Z_m = 0, t) = ik_m^* G_m^* (A_m - B_m) e^{i\omega t} \quad (10)$$

$$\tau_m(Z_m = h_m, t) = ik_m^* G_m^* (A_m e^{ik_m^* h_m} - B_m e^{-ik_m^* h_m}) e^{i\omega t} \quad (11)$$

## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

Since stresses must be continuous at layer boundaries

حيث أن الإجهادات يجب أن تكون مستمرة على حدود الطبقات يعني ذلك

$$\tau_m (Z_m = h_m, t) = \tau_{m+1} (Z_{m+1} = 0, t) \quad (12)$$

$$A_{m+1} - B_{m+1} = \frac{k_m^* G_m^*}{k_{m+1}^* G_{m+1}^*} (A_m e^{ik_m^* h_m} - B_m e^{-ik_m^* h_m}) \quad (13)$$

Adding (9) and (13) and subtracting (13) from (9) gives the following equations

بعد إضافة (9) إلى (13) وطرح (13) من (9) ينتج لدينا المعادلات التالية

$$A_{m+1} = \frac{1}{2} A_m (1 + \alpha_m^*) e^{ik_m^* h_m} + \frac{1}{2} B_m (1 - \alpha_m^*) e^{-ik_m^* h_m} \quad (14)$$

$$B_{m+1} = \frac{1}{2} A_m (1 - \alpha_m^*) e^{ik_m^* h_m} + \frac{1}{2} B_m (1 + \alpha_m^*) e^{-ik_m^* h_m} \quad (15)$$

## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

From previous equation  $\alpha_m^*$  is the impedance ratio at the boundary between layers m and m+1

من المعادلة السابقة فإن  $\alpha_m^*$  هي الممانعة الصوتية على حدود الطبقات بين m و m+1

$$\alpha_m^* = \frac{k_m^* G_m^*}{k_{m+1}^* G_{m+1}^*} = \frac{\rho_m (v_s^*)_m}{\rho_{m+1} (v_s^*)_{m+1}} \quad (16)$$

At the ground surface, the shear stress must equal to zero, which require from equation (10) that  $A_1=B_1$ . If the recursion formulas of equations (14) and (15) are applied repeatedly for all layers from 1 to m, function relating the amplitudes in layer m to those in layer 1 can be expressed by

إن قيمة الإجهادات القصية تأخذ القيمة صفر على سطح الأرض مما يؤدي إلى أن قيمة  $A_1=B_1$  في المعادلة رقم (10). إذا تم تطبيق الصيغ تكرارياً للمعادلتين 14 و 15 لكل الطبقات من 1 حتى m فإن الصيغة التابعة يعبر عنها بالمعادلات التالية

$$A_m = a_m(\omega)A_1 \quad (17)$$

$$B_m = b_m(\omega)B_1 \quad (18)$$

## Case VI : layered damped soil on elastic rock

### الحالة الرابعة: حالة تربة متطبقة قابلة للتخامد فوق صخر مرن

Finally, the transfer function relating the displacement amplitude at layer i to that at layer j is given by the equation

وأخيراً فإن دالة التحويل والتي تربط سعة الإزاحة لطبقة ما يشار إليها (i) إلى تلك طبقة أخرى (j) تعطى بالعلاقة

$$F_{ij}(\omega) = \frac{|u_i|}{|u_j|} = \frac{a_i(\omega) + b_i(\omega)}{a_j(\omega) + b_i(\omega)} \quad (19)$$

Because  $|\ddot{u}| = \omega |\dot{u}| = \omega^2 |u|$  for harmonic motion, so equation (19) also describes the amplification of accelerations and velocities from layer i to layer j.

لأننا نستطيع حساب قيمة السرعة والتسارع من مركبة الإزاحة فإن المعادلة السابقة تحسب قيمة التضخيم الأرضي لكل من مركبة السرعة والتسارع أيضاً.

# Advantages and disadvantages of linear approach

## المحاسن والمساوى للمنهجية الخطية

### Advantages

- Fast
- Direct solution
- Good for very soil/rock and very small ground motions

### Disadvantages

- Does not account for soil nonlinearity (soil dynamic properties do not change with strain)

### المحاسن:

- سريع
- حل مباشر
- جيد للاماكن التي تتوضع فيها صخور أو تربة من النوع الجيد وعند الحركات الأرضية الخفيفة

### المساوى:

- لا تقوم الحسابات وفق المنهجية الخطية بحساب التأثير اللاخطي (أي أن الخصائص الديناميكية للتربة لا تتغير بتغير الانفعالات)

# References

## المراجع

- Steven L. Kramer. Geotechnical earthquake engineering. Prentice Hall.