غروبوئيدات سماراندااك

عمر جبور[1] عبد الواحد أبو حمدة [2]

الملخص

قدمت الدكتورة فاسانثا كانداسامي في عام 2002 أربعة صفوف جديدة من الغروبوئيدات باستخدام المجموعة Z_n، وتوصلت إلى بعض الشروط التي تجعلها تحوي غروبوئيدات سماراندااك. وفي عام 2012 ، كَوَّنَ كل من فاسانثا والدكتور فلورنتين سماراندااك بنى جبرية غير تجميعية باستخدام المجموعة $C(Z_n)$ – مجموعة الأعداد العقدية قياس العدد n – ثم بدؤوا يدرسونها في حالة سماراندااك. في هذا البحث قمنا بإيجاد شروط جديدة تجعل تلك الصفوف تحوي غروبوئيدات سماراندااك، كما حصلنا على عدة خواص مهمة عن هذه الغروبوئيدات. فضلاً عن ذلك بعض المبرهنات التي أوجدناها، ووضعت في النتائج الأساسية. وهذه النتائج قُدمت كحلول لمسائل مفتوحة في المرجع [6]، وأسهم بعض النتائج في حل تلك المسائل.

الكلمات المفتاحية: غروبوئيد (ماغما)، نصف الزمرة، غربوئيد سماراندااك، الصفوف الجديدة من الغروبوئيدات باستخدام Z_n و $C(Z_n)$.

رقم التصنيف الرياضياتي (2010): MSC 20N02, 08A99

---

(1) طالب ماجستير – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سوريا.
(2) أستاذ دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سوريا.

Smarandache Groupoids

Amr Jbour(1) **Abdolwahed Abohamdah**(2)

ABSTRACT

In 2002, Vasantha Kandasamy introduced four new classes of groupoids using the set of modulo integers Z_n, and obtained some conditions for them to contain Smarandache groupoids. In 2012, Florentin Smarandache and Vasantha constructed non associative structures using finite complex modulo integers $C(Z_n)$, and studied the Smarandache analogue. In this paper, we study new conditions for these new classes of groupoids to contain Smarandache groupoids and obtain some new significant properties about them. In addition some of theorems that we put in section 2 are mentioned as research problems in [6], and some others can help to solve them.

Keywords: Groupoid(magma), normal groupoid, semigroup, Smarandache groupoid, new classes of groupoids using Z_n and $C(Z_n)$.

AMS Subject Classification (2010): Primary 08A99, Secondary 20N02

(1) Master Student- Department of Mathematics- Faculty of Science- Damascus University- Damascus – Syria.

(2) Professor - Department of Mathematics - Faculty of Science - Damascus University – Damascus – Syria.

1. تمهيد

تعريف 1.1.[3] الغروبوئيد (أو الماغما†) $(G,*)$ عبارة عن مجموعة غير خالية مغلقة بالنسبة إلى لعملية $*$.

تعريف 2.1.[3] يُقال عن مجموعة مثل $H \neq \emptyset$: إنها غروبوئيد جزئي من $(G,*)$، إذا كانت H مجموعة جزئية من G، وكان $(H,*)$ غروبوئيداً بحد ذاته (بالنسبة إلى عملية $*$).

تعريف 3.1.[6] يُقال عن الغروبوئيد H، الجزئي من الغروبوئيد G: إنه ناظمي إذا حقق ما يأتي:

$$xH = Hx, x(yH) = (xy)H, (Hx)y = H(xy); \forall x, y \in G$$

ويُقال عن الغروبوئيد G: إنه بسيط إذا لم يملك أي غروبوئيد جزئي ناظمي غير تافه.

تعريف 4.1.[6] ليكن G غروبوئيداً و L مجموعة جزئية من G، يُقال عن L إنها مثالية يسارية في G إذا حقق: 1. L غروبوئيداً جزئياً من G. 2. $xa \in L$ مهما تكن $x \in G$ و $a \in L$. وبشكل مشابه يمكن تعريف المثالي اليميني في الغروبوئيد G. كما يُقال عن L: إنه مثالي في G إذا كان مثالياً يمينياً ويسارياً بآنٍ واحد في G.

تعريف 5.1.[6] ليكن لدينا الغروبوئيدات الآتية $(G_1,*_1), (G_2,*_2), \dots, (G_n,*_n)$، إذْ إنَّ $*_i$ هي العملية الثنائية المعرفة على G_i من أجل كل $i = 1,2,\dots,n$. يُعرف غروبوئيد الجداء المباشر G للغروبوئيدات $G_1, G_2, \dots, G_n$ بالشكل الآتي:

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) | g_i \in G_i\}$$

و $g * h = (g_1, g_2, \dots, g_n) * (h_1, h_2, \dots, h_n) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2, \dots, g_n *_n h_n)$

† إنَّ مصطلح ماغما أطلق أول مرة على هذه البنية من قبل نكولاس بورباكي (Nicolas Bourbaki) إلا أنَّ مصطلح غروبوئيد أقدم وأكثر شيوعاً مع أنّه يشبه مصطلح غروبوئيد (Brandt groupoid or virtual group) في نظرية الفئات.

إذْ $g, h \in G$.

تعريف 6.1.[7] يُقال عن غروبوئيد مثل G إنه غروبوئيد موفانغ (Moufang groupoid) إذا حقق متطابقة موفانغ الآتية:

$$(xy)(zx) = \big(x(yz)\big)x \; ; \forall x, y, z \in G$$

تعريف 7.1.[7] يُقال عن غروبوئيد مثل G: إنه غروبوئيد بول (Bol Groupoid)، إذا حَقَّقَ متطابقة بول الآتية:

$$\big((xy)z\big)y = x\big((yz)y\big) \; ; \forall x, y, z \in G$$

تعريف 8.1.[7] يُقال عن غروبوئيد مثل G إنه p–غروبوئيد إذا حَقَّقَ المتطابقة الآتية:

$$(xy)x = x(yx) \; ; \forall x, y, z \in G$$

تمهيدية 1.1. بفرض $(G_1,*_1), (G_2,*_2)$ غروبوئيدان و $H = H_1 \times H_2 \subseteq G_1 \times G_2$. إنَّ H غروبوئيد جزئي (ناظمي) من $(G,*) = (G_1 \times G_2,*)$، إذا و فقط إذا H_1 و H_2 غروبوئيدات جزئية (ناظمية) من G_1 و G_2، على الترتيب.

الإثبات:

بفرض أنَّ $H = H_1 \times H_2$ غروبوئيد جزئي من $G_1 \times G_2$، ولنأخذ $x_1, y_1 \in H_1$ و $x_2, y_2 \in H_2$ عندها نجد

$$(x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2) = (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \in H$$

هذا يعني أنَّ $x_1 *_1 y_1 \in H_1$ و $x_2 *_2 y_2 \in H_2$ و H_1 ، H_2 غروبوئيد جزئي من G_1 و G_2 على الترتيب. لنفرض الآن أنَّ H غروبوئيد جزئي ناظمي، عندها من أجل أية عناصر $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G$ و $(h_1, h_2) \in H$ لدينا

- $(x_1, x_2) * (h_1, h_2) = \big(\acute{h_1}, \acute{h_2}\big) * (x_1, x_2)$

إذْ $(\acute{h_1},\acute{h_2}) \in H$ ما يعني أنَّ $(x_1 *_1 h_1, x_2 *_2 h_2) = (\acute{h_1} *_1 x_1, \acute{h_2} *_2 x_2)$

أي $x_i *_i h_i = \acute{h_i} * x_i$

ومنه $x_i *_i H_i = H_i * x_i$ إذْ $x_i \in G_i$ و $i \in \{1,2\}$.

- $(x_1,x_2) * \left((y_1,y_2) * (h_1,h_2)\right) = \left((x_1,x_2) * (y_1,y_2)\right) * (\acute{h_1},\acute{h_2})$
  إذْ $(\acute{h_1},\acute{h_2}) \in H$، ومن ثَمَّ

$$\left(x_1 *_1 (y_1 *_1 h_1), x_2 *_2 (y_2 *_2 h_2)\right) = \left((x_1 *_1 y_1) *_1 \acute{h}_1, (x_2 *_2 y_2) * \acute{h}_2\right)$$

ومن ثَمَّ $x_i *_i (y_i *_i H_i) = (x_i *_i y_i) *_i H_i$ من أجل كل $x_i, y_i \in G_i$ و $i = 1,2$.

- بشكل مشابه لما سبق سنجد أنَّ $(H_i *_i x_i) *_i y_i = H_i *_i (x_i *_i y_i)$ من أجل $x_i, y_i \in G_i$ و $i = 1,2$.

ومن ثَمَّ H_1 و H_2 غروبوئيدان جزئيان ناظميان من G_1 و G_2، على الترتيب. والاتجاه الآخر من التمهيدية يمكن إثباته بسهولة.

تمهيدية 2.1. بفرض أنَّ G_1 و G_2} غروبوئيدان. يكون $I=I_1\times I_2 \subset G_1\times G_2$ مثالياً يسارياً (يمينياً) في $G_1 \times G_2$ إذا وفقط إذا I_1 و I_2 مثالي يساري (يميني) في G_1 و G_2، على الترتيب.

الإثبات:

يكون بشكل مشابه للتمهيدية السابقة.

تعريف 9.1.[3] ليكن $(G,*)$ و $(\acute{G},.)$ غروبوئيدين. يُقال عن التطبيق $\phi: G \to G'$ إنه تشاكل غروبوئيدي إذا تحقق $\phi(a * b) = \phi(a).\phi(b)$ من أجل كل $a, b \in G$. إذا كان ϕ تقابلاً فإنه يُسمى تماثلاً غروبوئيدياً.

مبرهنة 1.1. ليكن G و H غروبوئيدين. $G \times H$ بسيط إذا و فقط إذا G بسيط أو H بسيط.

الإثبات:

بفرض أنَّ الغروبوئيد $G \times H$ بسيط، ولنفرض جدلاً أنَّ كلاً من G و H غير بسيط عندئذٍ فإنَّ كلاً منهما يحوي غروبوئيداً جزئياً ناظمياً، وليكن G_1 و H_1 على الترتيب. بحسب التمهيدية 1.1 فإنَّ $G_1 \times H_1$ هو غروبوئيد جزئي ناظمي من $G \times H$ و هذا تناقض. من جهة أخرى لنفرض أنَّ G غروبوئيد بسيط، ولنفرض جدلاً أنَّ $G \times H$ غير بسيط، وليكن K غروبوئيداً جزئياً ناظمياً منه، ثم لنأخذ المجموعة

$$proj_G(K) = \{x \in G : \exists h \in H, (x,h) \in K\}$$

ولنأخذ $p, p' \in proj_G(K)$ عندئذٍ يوجد $h, h' \in H$ إذْ $(p,h),(p',h') \in K$، ومنه

$(p,h) * (p',h') = (p *_G p', h *_H h') \in K$، إذْ $*, *_G, *_H$ العملية الثنائية المعرفة على $G \times H, G, H$ على الترتيب، ما يعني أنَّ

$$p *_G p' \in proj_G(K)$$

ومنه $proj_G(K)$ غروبوئيد جزئي من G.

الآن لنأخذ $p \in proj_G(K)$ ، عندئذٍ يوجد $h \in H$ إذْ $(p,h) \in K$ ، عندئذٍ مهما تكن $g \in G_1$ لدينا

$$(g,h) * K = K * (g,h)$$
$$(g,h) * (p,h) = (p',h') * (g,h)$$
$$(g *_G p, h *_H h) = (p' *_G g, h' *_H h)$$

ومنه $g *_G p = p' *_G g$ ، ومن ثَمَّ $g *_G proj_G(K) = proj_G(K) *_G g$ مهما تكن $g \in G$. وبشكل مشابه نثبت أنَّ

$$g *_G \left(g' *_G proj_G(K)\right) = (g *_G g') *_G proj_G(K)$$

و

$$(proj_G(K) *_G g) *_G g' = proj_G(K) *_G (g *_G g')$$

و ذلك مهما تكن $g,g' \in G$. ما يعني أنَّ $proj_G(K)$ غروبوئيد جزئي ناظمي من G، وهذا تناقض، فالفرض الجدلي خطأ، ومنه $G \times H$ بسيط .

تمهيدية 3.1. ليكن φ تشاكلاً غروبوئيدياً من الغروبوئيد $(G,*)$ إلى الغروبوئيد $(\acute{G},.)$، إذا حوى G غروبوئيداً (موفانغ، بول، $p-$ غروبوئيد) جزئياً، فإنَّ $\acute{G}$ يحوي كذلك.

الإثبات:

بفرض أنَّ H غروبوئيد موفانغ جزئي من G. لتكن $\acute{H} = \varphi(H)$ و $\acute{x} = \varphi(x)$ و $\acute{y} = \varphi(y)$ و $\acute{z} = \varphi(z)$ إذْ $x,y,z \in H$.

$\acute{x}.\acute{y} = \varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x*y) \in \acute{H}$

$(\acute{x}.\acute{y}).(\acute{z}.\acute{x}) = \varphi(x*y).\varphi(z*x) = \varphi\big((x*y)*(z*x)\big) = \varphi\Big(\big(x*(y*z)\big)*x\Big) = \varphi\big(x*(y*z)\big).\varphi(x) = \big(\varphi(x).\varphi(y*z)\big).\varphi(x) = \big(\acute{x}.(\acute{y}.\acute{z})\big).x'$

و منه $\acute{H}$ غروبوئيد موفانغ جزئي من $\acute{G}$. بشكل مشابه إذا كان H غروبوئيد بول ($p-$غروبوئيد) جزئياً من G، فإنَّ $\acute{H}$ غروبوئيد بول ($p-$غروبوئيد) جزئي من $\acute{G}$.

تعريف 10.1.[2] غروبوئيد سمارانداك‡ عبارة عن غروبوئيد يحوي مجموعة جزئية فعلية (proper subset) S تشكل نصف زمرة بالنسبة إلى لعملية المعرفة على G. و يُرمز لـِ G حينها بالرمز SG.

تعريف 11.1.[7] لتكن $Z_n = \{0,1,\dots,n-1\}$ إذْ $n \geq 3$، و لنعرف من أجل $x,y \in Z_n$ العملية الثنائية الآتية:

‡ ظهر مفهوم بنى سمارانداك الجبرية أول مرة من قبل فلورنتين سمارنداك ، إذْ سماها حينها بالبنى الجبرية الخاصة (كالغروبوئيد الخاص Special Groupoid)، ولكن بعض الدراسات اللاحقة لم تعتمد هذه التسمية.

$x * y = tx + uy \bmod n$

إذْ $t, u \in Z_n$. يُرمز لهذا الغروبوئيد بالرمز $\{Z_n, (t, u), *\}$ أو اختصاراً $Z_n(t, u)$.

الصف $\boldsymbol{Z(n)}$:هو مجموعة الغروبوئيدات $Z_n(t, u)$ التي تحقق $t, u \in Z_n \backslash \{0\}$ و $t \neq u$ و $\gcd(t, u) = 1$.

الصف $\boldsymbol{Z^*(n)}$:هو مجموعة الغروبوئيدات $Z_n(t, u)$ التي تحقق $t, u \in Z_n \backslash \{0\}$ و $t \neq u$.

الصف $\boldsymbol{Z^{**}(n)}$: هو مجموعة الغروبوئيدات $Z_n(t, u)$ التي تحقق $t, u \in Z_n \backslash \{0\}$.

الصف $\boldsymbol{Z^{**}(n)}$: هو مجموعة الغروبوئيدات $Z_n(t, u)$ التي تحقق $t, u \in Z_n$.

تعريف 12.1.[1] لتكن $G = C(Z_n) = \{a + ib | a, b \in Z_n, i^2 = n - 1\}$ مجموعة الأعداد العقدية قياس العدد n. لنعرف العملية الثنائية $*$ على G كما يأتي: من أجل كل $x = a + ib, y = c + id \in G$ فإنَّ

$$x * y = (ta + uc) \bmod n + i(tb + ud) \bmod n$$

إذْ $t, u \in Z_n$. يُرمز لهذا الغروبوئيد حينها بِـ $\{C(Z_n), *, (t, u)\}$.

بجعل $t, u \in Z_n \backslash \{0,1\}$ و $\gcd(t, u) = 1$ و t, u أعداداً أوليةً نحصل على غروبوئيد G من النوع الأول.

بجعل $t, u \in Z_n \backslash \{0,1\}$ و $\gcd(t, u) = 1$ نحصل على غروبوئيد G من النوع الثاني. بجعل $t, u \in Z_n \backslash \{0\}$ و $\gcd(t, u) > 1$ و $n \geq 5$ نحصل على غروبوئيد G من النوع الثالث.

بجعل $t, u \in Z_n \backslash \{0\}$ و $t = u$ نحصل على غروبوئيد G من النوع الرابع. بجعل $t, u \in Z_n$ و $t = 0$ أو $u = 0$ نحصل على غروبوئيد من النوع الخامس.

مبرهنة 2.1.[6] ليكن $Z_n(t, u)$ غروبوئيداً في الصف $Z(n)$ و $n > 5$. عندئذٍ $Z_n(t, u)$ هو SG إذا كان $t + u = 1 \bmod n$.

مبرهنة 3.1.[6] ليكن n عدداً من مضاعفات العدد 4 ، عندئذٍ $Z_n\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ هو SG.

2. النتائج الأساسية

مبرهنة 1.2. إذا كان الغروبوئيد $Z_p(m,m)$ يحوي غروبوئيد H، إذْ $m > 0$ و p أولي، فإنَّ $Card(H) = 1$ أو $H = Z_p(m,m)$.

الإثبات:

لتكن $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ مجموعة تشكل غروبوئيداً جزئياً من $Z_p(m,m)$ إذْ $1 < r < p$.
عندئذٍ من أجل كل $\acute{x} \in X$ لدينا $\acute{x} * \acute{x} = m\acute{x} + m\acute{x} = 2m\acute{x} \bmod p \in X$

ومن ثَمَّ العلاقة $\psi: X \to X: \psi(x) = 2mx \bmod p$ هي تقابل لأنَّه إذا كان $\psi(x) = \psi(y); x, y \in X$

فإنَّ $2mx = 2my \bmod p$ و $x = y \bmod p$. لذلك من أجل كل $x \in X$ يوجد عنصر واحد فقط $\acute{x}$ من X يحقق $x = 2m\acute{x} \bmod p$

عندئذٍ بسهولة نجد أنَّه من أجل $x, y \in X$ يوجد $\acute{x}, \acute{y} \in X$ بحيث

$$x + y = 2m\acute{x} + 2m\acute{y} = 2(m\acute{x} + m\acute{y}) \bmod p = 2(\acute{x} * \acute{y}) = 2z$$

إذْ $z \in X$. الآن لنعرف المجموعات M_l من أجل $l = 1,2,\dots,r$ و $x_l \in X$ على الشكل الآتي: $M_l = \left\{x \in X \middle| \exists y \in X \text{ و } x + y = 2x_l \bmod p\right\}$

لنثبت الآن أنَّ $M_l = X$. إنَّ $M_l \subseteq X$ وضوحاً، ومن ناحية أخرى إذا كان $x \in X$ فإنَّ

$$x + x_1 = 2y_1 \bmod p$$
$$x + x_2 = 2y_2 \bmod p$$
$$\dots$$
$$x + x_r = 2y_r \bmod p$$

إذْ $y_j \in X$. من المؤكد $x + x_i \neq x + x_j$ عندما $i \neq j$ و $i, j \in \{1,2, \dots r\}$، ما يعني وجود دليل i من أجله $y_i = x_l$ و $x + x_i = 2x_l$ و منه $x \in M_l$. و هنا يمكننا أن نكتب

$$x_1 + x_1 = x_2 + x_2' = \cdots = x_r + x_r' \bmod p$$

إذْ $x_i' \in X$ و $x_i = x_1 + a_i \bmod p$ و $x_i' = x_1 - a_i \bmod p$ و $a_i \in \mathbb{Z}$ من أجل كل $i \in \{1,2,\dots,r\}$، أي

$$x_2 = x_1 + a_2 \bmod p, x_3 = x_1 + a_3 \bmod p, \dots, x_r = x_1 + a_r \bmod p$$

$$x'_2 = x_1 + a_2 \bmod p, x'_3 = x_1 + a_3 \bmod p, \dots, x'_r = x_1 + a_r \bmod p$$

بجمع آخر $2(r-1)$ معادلة نحصل على

$$(r-1)x_1 = (x_2 + x_3 + \cdots + x_r) \bmod p$$

و بشكل مشابه تماماً لما سبق نجد من أجل العنصر x_2 أنَّ

$$(r-1)x_2 = (x_1 + x_3 + \cdots + x_r) \bmod p$$

وبطرح آخر معادلتين

$$(r-1)(x_1 - x_2) = -(x_1 - x_2) \bmod p$$

ما يعني أنَّ $r = 0 \bmod p$ ، وهذا يناقض طريقة اختيارنا لِ r.

مبرهنة 2.2. الغروبوئيد $Z_n(t,t)$ يملك غروبوئيداً ناظمياً إذا كان $\gcd(n,t) = 1$ و $t > 1$ و n عدداً مركباً و $t = 1 \bmod m$ إذْ m أحد العوامل الأولية للعدد n.

الإثبات:

ليكن $H = \left\{0, m, 2m, \dots, \left(\frac{n}{m} - 1\right)m\right\} \subseteq Z_n$. لنأخذ $h = \alpha m$ و $k = \beta m$

من H، $h * k = t\alpha m + t\beta m = t(\alpha + \beta)m \bmod n \in H$

لذلك H غروبوئيد جزئي من $Z_n(t,t)$ و يحقق $x * H = H * x$ من أجل كل x من Z_n.
الآن لنشكل المجموعات $H_i = \left\{x \middle| x \in Z_n \text{ و } x = i \bmod m\right\}$ من أجل $i \in \{0,1,\dots,m-1\}$. وضوحاً $H_0 = H$ و المجموعات H_i تشكل تجزئة لِـ $Z_n(t,t)$. و كذلك $Card\ x * H =$

$\frac{n}{m}$ مـن أجـل $x \in Z_n$ و هـذا لأنَّـه إذا كـان $x * \alpha m = x * \beta m$ فـإنَّ $t(x + \alpha m) =$ $t(x + \beta m) \bmod n$ أي $\alpha m = \beta m \bmod n$.

من السهل إثبات وجود $i_0 \in Z_m$ يحقق $x * H = H_{i_0}$ من أجل كل $x \in Z_n$. و الآن لنأخذ $x_i \in H_i$ و $x_j \in H_j$ عندئذٍ

$$x_i * (x_j * H) = \left\{t(x_i + tx_j), t\left(x_i + t(x_j + m)\right), \dots, t\left(x_i + t\left(x_j + \left(\frac{n}{m} - 1\right) m\right)\right)\right\}$$

$$(x_i * x_j) * H = \left\{t^2(x_i + x_j), t\left(t(x_i + x_j) + m\right), \dots, t\left(t(x_i + x_j) + \left(\frac{n}{m} - 1\right) m\right)\right\}$$

لدينا أيضاً $t - 1 = 0 \bmod m$ لذلك

$$tx_i(t - 1) = 0 \bmod m$$

$$t^2 x_i = tx_i \bmod m$$

$$t^2 x_i + t^2 x_j + \alpha m = tx_i + t^2 x_j + \beta m \bmod m$$

$$x_i * (x_j * \alpha m) = (x_i * x_j) * \beta m \bmod m$$

ما يعني أنَّ $x_i * (x_j * H) = (x_i * x_j) * H$ و H غروبوئيد جزئي ناظمي من $Z_n(t, t)$.

مبرهنة 3.2. لتكن $G_1, G_2, \dots, G_n$ غروبوئيدات، ولتكن

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \subseteq G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

عندئذٍ تكون S نصف زمرة إذا و فقط إذا كانت كل من $S_1, S_2, \dots, S_n$ نصف زمرة.

الإثبات:

بفرض $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ نصف زمرة جزئية من الغروبوئيد G. عندئذٍ S_i غروبوئيد جزئـي مـن G_i مـن أجـل كـل $i \in \{1,2, \dots n\}$. الآن مـن أجـل $x, y, z \in S$ لـدينا $(xy)z =$ $x(yz)$ إذْ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$
لذلك

$$\left((x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n)\right)(z_1, z_2, \dots, z_n) =$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\left((y_1, y_2, \dots, y_n)(z_1, z_2, \dots, z_n)\right)$$

$((x_1y_1)z_1, (x_2y_2)z_2, \dots, (x_ny_n)z_n) = (x_1(y_1z_1), x_2(y_2z_2), \dots, x_n(y_nz_n))$

$\Rightarrow (x_iy_i)z_i = x_i(y_iz_i)\ ;\ i = 1,2, \dots, n$

وبجعل x, y, z تمسح عناصر S كلها تصبح S_i نصف زمرة من أجل $i \in \{1,2, \dots, n\}$. الجزء الثاني من المبرهنة ويُثْبَتُ بسهولة.

ملاحظة 1.2. إذا كان الغروبوئيد $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ غروبوئيد سمارانداك، فإنه ليس من الضروري أن يكون الغروبوئيد G_i غروبوئيد سمارانداك مهما تكن $i \in \{1,2, \dots, n\}$، انظر المثال 2. و لكن إذا كان G_i غروبوئيد سمارانداك، من أجل كل i، فإنَّ G غروبوئيد سمارانداك.

مبرهنة 4.2. إذا كان ψ تشاكلاً غروبوئيدياً من غروبوئيد G إلى غروبوئيد K و G يملك نصف زمرة عندئذٍ فإنَّ K يملك نصف زمرة أيضاً.

الإثبات:

إذا كانت S نصف زمرة جزئية من G، فإنَّه من السهل إثبات أنَّ $\psi(S)$ نصف زمرة جزئية من K.

1.2 غروبوئيدات سمارانداك باستخدام Z_n

مبرهنة 5.2. ليكن n عدداً أولياً فردياً و $Z_n(t,u)$ غروبوئيداً من الصف Z*(n) ، إنَّ $Z_n(t,u)$ هو SG إذا و فقط إذا $t + u = 1 \bmod n$.

الإثبات:

إذا كان S نصف زمرة جزئية من الغروبوئيد $Z_n(t,u)$ و $x, y, z \in S$ فإنَّ

$x * (y * z) = (x * y) * z$

Tx$\Rightarrow x + tuy + u^2z = (t^2x + tuy + uz) \bmod n$

$\Rightarrow u(u-1)z = t(t-1)x \bmod n$

بوضع $x = z$ نجد $u(u-1) = t(t-1) \bmod n$، ومنه

($u = -t \bmod n$ و $u - 1 = (-t+1) \bmod n$)، أو ($u = (-t+1) \bmod n$ و $u - 1 = -t \bmod n$)

أي ($u + t = 0 \bmod n$ و $u + t = 2 \bmod n$) أو ($u + t = 1 \bmod n$)

من ثَمَّ $t+u=1 \bmod n$. من جهة أخرى إذا كان $t+u=1 \bmod n$، فمن الواضح أنَّ أي مجموعة وحيدة العنصر من $Z_n(t,u)$ تشكل نصف زمرة.

مبرهنة 6.2. ليكن $Z_n(t,u)$ غروبوئيداً إذْ $n=n_1\times n_2$ و $\gcd(n_1,n_2)=1$، عندئذٍ

$$Z_n(t,u) \cong Z_{n_1}(t \bmod n_1, u \bmod n_2) \times Z_{n_2}(t \bmod n_2, u \bmod n_2)$$

الإثبات:

بدايةً يمكن بسهولة إثبات أنَّ العلاقة $\varphi: a \mapsto (a \bmod n_1, a \bmod n_2)$ هي تطبيق من Z_n على $Z_{n_1}\times Z_{n_2}$. إذا كان $\varphi(a)=\varphi(b)$ إذْ $a,b\in Z_n$ عندئذٍ

$$(a \bmod n_1, a \bmod n_2) = (b \bmod n_1, b \bmod n_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \bmod n_1 \\ a = b \bmod n_2 \end{cases} \Rightarrow a = b \bmod \left(lcm(a,b)\right) \Rightarrow a = b \bmod n \Rightarrow a = b.$$
$$\varphi(a)*\varphi(b) = (a \bmod n_1, a \bmod n_2) * (b \bmod n_1, b \bmod n_2) = \left((ta + ub) \bmod n_1, (ta+ub) \bmod n_2\right) = \varphi(c)$$

لذلك φ تماثل غروبوئيدي.

ملاحظة 2.2. المبرهنة السابقة تبقى صحيحة من أجل $n=n_1\times n_2\times \ldots\times n_r$، إذْ r عدد صحيح منتهٍ، و $n_1,n_2,\ldots,n_r$ أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى.

مثال 1. إذا أخذنا الغروبوئيد $Z_{12}(1,3)$ نجد $Z_{12}(1,3)\cong Z_3(1,0)\times Z_4(1,3)$ و كل من المجموعات $\{8\},\{0,6\}$ تشكل نصف زمرة جزئية من $Z_{12}(1,3)$. باستخدام المبرهنة 4.2 وبوصف φ التماثل الغروبوئيدي السابق نجد

$$\varphi(\{0,6\}) = \{(0,0),(0,2)\} = \{0\}\times\{0,2\} \quad \text{و} \quad \varphi(\{8\}) = \{2,0\} = \{2\}\times\{0\}$$

أنصاف زمر جزئية من $Z_3(1,0)\times Z_4(1,3)$. من المبرهنة 3.2 نلاحظ أنَّ $\{2\}$ نصف زمرة جزئية من $Z_3(1,0)$ و $\{0,2\}$ نصف زمرة جزئية من $Z_4(1,3)$.

مثال 2. لنأخذ الغروبوئيد $Z_{12}(5,7)$. من المبرهنة 6.2 لدينا $Z_{12}(5,7)\cong Z_3(2,1)\times Z_4(1,3)$ و المجموعة $\{0,6\}$ نصف زمرة جزئية من $Z_{12}(5,7)$.

$$\varphi(\{0,6\}) = \{(0,0),(0,2)\} = \{0\}\times\{0,2\}$$

نلاحظ أنَّ الغروبوئيد $Z_3(2,1)$ لا يملك أي نصف زمرة جزئية فعلية، لذلك $Z_3(2,1)$ لا يشكل غروبوئيد سمارانداك.

مبرهنة 7.2. الغروبوئيد $Z_n(1,1)$ لا يشكل غروبوئيد سمارانداك إذا كان n أولياً.

الإثبات:

ليكن H نصف زمرة جزئية فعلية من $Z_n(1,1)$، باستخدام المبرهنة 1.2 نجد $Card\ H = 1$ ومن ثَمَّ يمكننا أن نكتب $H = \{x\}$ إذْ $x \in Z_n(1,1)$ و $x * x = x$ أي $x + x = x \bmod n$ ما يعني أنَّ $2 = 1 \bmod n$، و هذا تناقض. □

ملاحظة 3.2. إذا كان $m + m = 0 \bmod n$ فإنَّ الغروبوئيد $Z_n(m,m)$ هو SG، و لا توجد حاجة للشرط $m^2 = m \bmod n$ في المبرهنة 3.1.

الإثبات:

من السهل إثبات أنَّ $\{0, m\}$ هي نصف زمرة جزئية من الغروبوئيد $Z_n(m,m)$ ، وذلك بملاحظة أنَّ $m = \frac{\alpha n}{2}$، إذْ $\alpha \in \mathbb{N}$ ، و أنَّ $m^2 = 0 \bmod n$ عندما mزوجي و $m^2 = m \bmod n$ عندما m فردي.

إنَّ إيجاد عدد غروبوئيدات سمارانداك في الصف $Z(n)$، من أجل n عدد صحيح مُثَّبت، هي إحدى المسائل المفتوحة التي طرحتها الدكتورة كانداسامي، وهي تحديداً المسألة رقم 2 من المرجع [6]. فإذا نظرنا إلى المبرهنات 2.1 و 5.2 و 6.2 فسوف نلاحظ أنَّ معرفة عدد الأزواج (t,u) إذْ $t, u \in Z_n$، التي تحقق الشروط

$$t \neq u, t \neq 0, u \neq 0, \gcd(t,u) = 1, t + u = 1 \bmod n$$

يُساعدنا في حل هذه المسألة، و المبرهنة الآتية توضح ذلك.

مبرهنة 8.2. عدد الأزواج $(t,u) \in Z_n \times Z_n$ التي تحقق الشروط

$$t \neq u, t \neq 0, u \neq 0, \gcd(t,u) = 1, t + u = 1 \bmod n$$

يساوي إلى

$$\frac{n-3}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{n+1}{2p_i} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \frac{n+1}{2p_i p_j} - \cdots + (-1)^r \frac{n+1}{2p_1 p_2 \ldots p_r}$$

وذلك عندما $n + 1 = 2^{\alpha} \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$، إذْ p_i أعداد أولية فردية مختلفة.

ويساوي إلى

$$n - 2 - \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n+1}{p_i} - 1\right) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} \left(\frac{n+1}{p_i p_j} - 1\right) - \cdots + (-1)^r \left(\frac{n+1}{p_1 p_2 \ldots p_r} - 1\right)$$

وذلك عندما $n + 1 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$، إذْ p_i أعداد أولية فردية مختلفة.

الإثبات:

لتكن M مجموعة الأزواج كلّها(t,u)، إذْ $t,u \in Z_n$ و $t+u=1 \bmod n$، عندئذٍ

$$M=\{(2,n-1),(3,n-2),\dots,(q,n-(q-1)),\dots,(n-2,3),(n-1,2)\}$$

ولنميز الحالتين الآتيتين:

أولاً: n عدد فردي في هذه الحالة يمكننا حذف الأزواج من M التي إحدى مركباتها هي عدد زوجي؛ وذلك لأن المركبة الثانية ستكون عدداً زوجياً بالضرورة. ومن ثَمَّ لنضع

$$\acute{M}=\{(3,n-2),(5,n-4),\dots,(n-2,3)\}$$

$$N=\left\{(t,u)\middle|(t,u)\in\acute{M} \text{ و } \gcd(t,u)=1\right\}$$

فنجد أنَّ $N\subseteq\acute{M}$ وضوحاً، و نلاحظ عدم وجود أي زوج (t,u) في N يحقق $t=u$. ومن ثَمَّ يكفي الآن إيجاد $Card\ N$. بفرض $\gcd(q,n-(q-1))=d>1$ عندها d عدد فردي طبعاً و $d|q$ و $d|n+1$، لذلك المجموعة N تساوي المجموعة $\acute{M}$ ما عدا تلك الأزواج التي تملك في أحد مساقطها عدداً فردياً يقسم $n+1$ أو مضاعفاً فردياً لعددٍ فردي يقسم $n+1$. لذلك لنضع

$$M_i=\left\{(q,l)\middle|(q,l)\in\acute{M} \text{ و } q \text{ مضاعف فردي لـ } p_i\right\}$$

من أجل كل $i\in\{1,2,\dots,r\}$. من ثَمَّ

$$N=\acute{M}-\cup_{i=1}^{r}M_i$$

لنضع $s_1=2^{\alpha-1}\times p_1^{\alpha_1-1}\times p_2^{\alpha_2}\times\dots\times p_r^{\alpha_r}$ عندها نجد أنَّ (s_1-1) هو أكبر عدد يحقق المتراجحة $2p_1(s_1-1)<n$ ما يوضح أنَّ المضاعفات الفردية للعدد p_i والأصغر من n هي

$$p_i,p_i+2p_i,p_i+2(2p_i),\dots,p_i+(s_i-1)2p_i$$

و عددها يساوي $s_i=\frac{n+1}{2p_i}$ لذلك $Card\ M_i=\frac{n+1}{2p_i}$ من أجل كل $i\in\{1,2,\dots,r\}$. ويمكن ملاحظة أنَّ $M_i\cap M_j\neq\Phi$ كون $p_ip_j\in M_i\cap M_j$. و بنهاية هذه الحالة نجد

$$Card\ N=Card\left[\acute{M}-\cup_{i=1}^{r}M_i\right]=Card\ \acute{M}-Card\ \cup_{i=1}^{r}M_i$$

$=$
$Card\ \acute{M} -$
$\left[\sum_{i=1}^{r} Card\ (M_i) - \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r} Card\ \left(M_i \cap M_j\right) +\right.$
$\sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{k=j+1}^{r} Card\ \left(M_i \cap M_j \cap M_k\right) - \cdots +$
$(-1)^r \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3} \dots \sum_{i_{r-1}=i_{r-2}+1}^{r} Card\ \left(M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_{r-1}}\right) +$
$\left.(-1)^{r+1} Card\ (M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_r)\right]$
$= \frac{n-3}{2} - \sum_{i=1}^{r}\frac{n+1}{2p_i} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}\frac{n+1}{2p_ip_j} - \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{k=j+1}^{r}\frac{n+1}{2p_ip_jp_k} + \cdots +$
$(-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3}\dots\sum_{i_{r-1}=i_{r-2}+1}^{r}\frac{n+1}{2p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_{r-1}}} + (-1)^r\frac{n+1}{2p_1p_2\cdots p_r}$

ثانياً: n عدد زوجي في هذه الحالة $N = \left\{(t,u)\middle|(t,u) \in M \text{ و } t+u = 1 \bmod n\right\}$، ومن الواضح $N \subseteq M$ و $Card\ M = n-2$. كما بيَّنا سابقاً نجد أنَّ المجموعة N تساوي المجموعة M ماعدا الأزواج التي تملك في إحدى مركباتها مضاعفاً لعدد يقسم $n+1$. الآن من أجل كل $i \in \{1,2,\dots,r\}$ لنضع المجموعات

$$M_i = \left\{(q,l)\middle|(q,l) \in M \text{ و } q \text{ مضاعف لـ } p_i\right\}$$

و عندها نجد

$$N = M - \cup_{i=1}^{r} M_i$$

و بسهولة يمكن إيجاد أنَّ $Card\ M_i = \frac{n+1}{p_i} - 1$. لذلك

$Card\ N = Card[M - \cup_{i=1}^{r} M_i] = Card\ M - Card\ \cup_{i=1}^{r} M_i$
$=$
$Card\ M -$
$\left[\sum_{i=1}^{r} Card\ (M_i) - \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r} Card\ \left(M_i \cap M_j\right) +\right.$
$\sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{k=j+1}^{r} Card\ \left(M_i \cap M_j \cap M_k\right) - \cdots +$
$(-1)^r \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3} \dots \sum_{i_{r-1}=i_{r-2}+1}^{r} Card\ \left(M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_{r-1}}\right) +$
$\left.(-1)^{r+1} Card\ (M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_r)\right]$
$= n - 2 - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{n+1}{p_i} - 1\right) + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}\left(\frac{n+1}{p_ip_j} - 1\right) - \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=i+1}^{r-1}\sum_{k=j+1}^{r}\left(\frac{n+1}{p_ip_jp_k} - 1\right) +$
$\cdots + (-1)^{r-1}\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3}\dots\sum_{i_{r-1}=i_{r-2}+1}^{r}\left(\frac{n+1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_{r-1}}} - 1\right) + (-1)^r\left(\frac{n+1}{p_1p_2\cdots p_r} - 1\right)$

نتيجة 1.2. إن عدد غروبوئيدات سمارانداك في الصف $Z(n)$، إذا كان n أولياً، يساوي إلى العلاقة الأولى في المبرهنة الاخيرة، وهذا ما توضحه السابقة والمبرهنة 5.2. والجدول 1.2 يبيّن عدد غروبوئيدات سمارانداك لبعض الصفوف من الأعداد الأولية.

الجدول 1.2

العدد	r	$n+1$	الصف	العدد	r	$n+1$	الصف
4	1	18	$Z(17)$	0	لا يوجد	4	$Z(3)$
6	1	20	$Z(19)$	0	1	6	$Z(5)$
6	2	30	$Z(29)$	2	لا يوجد	8	$Z(7)$
118	3	462	$Z(461)$	2	1	12	$Z(11)$
238	2	744	$Z(743)$	4	1	14	$Z(13)$

مبرهنة 9.2. ليكن n عدداً زوجياً عندئذٍ $Z_n(t,u)$ هو غروبوئيد سمارانداك.

الإثبات:

لنضع $m=\frac{n}{2}$، و لنلاحظ أنَّ

$$m*0 = tm \bmod n = \begin{cases} 0\,; & t \text{ زوجي} \\ m\,; & t \text{ فردي} \end{cases} \quad \text{و} \quad 0*m = um \bmod n = \begin{cases} 0\,; & u \text{ زوجي} \\ m\,; & u \text{ فردي} \end{cases}$$

لذلك المجموعة $\{0,m\}$ تشكل غروبوئيداً جزئياً من $Z_n(t,u)$. و لإثبات أنَّ $\{0,m\}$ تشكل نصف زمرة سنميز الحالات الأربع الآتية:

الحالة 1. $0*m=0$ و $m*0=0$ و منه $m*m=0$ و المجموعة $\{0,m\}$ نصف زمرة.

الحالة 2. $0*m=0$ و $m*0=0$ و منه $m*m=m$ و المتطابقات التالية محققة

$$m*(m*m)=(m*m)*m\,;\ m*(m*0)=(m*m)*0m*(0*m)=(m*0)*m\,;0*(m*m)=(0*m)*m0*(0*m)=(0*0)*m\,;\ 0*(m*0)=(0*m)*0m*(0*0)=(m*0)*m\,;\ 0*(0*0)=(0*0)*0$$

الحالة 3. $0*m=0$ و $m*0=m$ و منه $m*m=m$ والمتطابقات السابقة محققة.

الحالة 4. $0*m=m$ و $m*0=m$ و منه $m*m=0$ والمتطابقات السابقة محققة أيضاً.

نتيجة 2.2. ليكن n عدداً زوجياً. إنَّ عدد غروبوئيدات سمارانداك في الصف $Z^{***}(n)(Z^{**}(n), Z^{*}(n))$ يساوي $n^2((n-1)^2, (n-1)(n-2))$ على الترتيب.

مبرهنة 10.2. ليكن $G = Z_n(t,u)$ غروبوئيد سمارانداك، عندئذٍ واحدة من الحالات الآتية محققة:

- يوجد x في G يحقق $t + u = 1 \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x)}\right)$.
- يوجد على الأقل $x, y \in G$ إذْ

$$t(t-1) = u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x)}\right)$$

و
$$t(t-1) = u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,y)}\right)$$

و
$$t(t-1) = u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x+y)}\right)$$

و
$$t(t-1) = -u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x-y)}\right)$$

الإثبات:

لتكن H نصف زمرة جزئية من الغروبوئيد G. إذا كان $Card\ H = 1$ فإنَّه يمكننا أن نكتب $H = \{x\}$ و $x * x = (t+u)x \bmod n = x \bmod n$ ما يعني أنَّ

$$t + u = 1 \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x)}\right)$$

وإذا كان $Card\ H > 1$ فإنَّ $x * (z * y) = (x * z) * y$ من أجل كل $x, y, z \in H$ ولذلك

$$tx + utz + u^2 y = t^2 x + utz + uz \bmod n \Rightarrow u^2 y - uy = t^2 x - tx \bmod n$$

$$u(u-1)y = t(t-1)x \bmod n \qquad (2.1)$$

وبسهولة بتبديل كل x بِـ y و كل y بِـ x نجد

$$t(t-1)y = u(u-1) \bmod n \qquad (2.2)$$

وبجمع (2.1) إلى (2.2) نجد

$$t(t-1) = u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n,x+y)}\right) \qquad (2.3)$$

وأيضاً

$$t(t-1) = -u(u-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n, x-y)}\right) \qquad (2.4)$$

وبوضع $x = y$ في (2.1) نجد

$$u(u-1) = t(t-1) \bmod \left(\frac{n}{\gcd(n, x)}\right) \qquad (2.5)$$

نتيجة 3.2. ليكن $G = Z_p(t, u)$ غروبوئيد سمارانداك، و p عدداً أولياً فردياً عندئذٍ كل نصف زمرة جزئية من G مرتبها تساوي 1.

الإثبات:

بفرض H نصف زمرة جزئية من G، و $x, y \in H$. من المبرهنة 5.2 لدينا $t + u = 1 \bmod p$ ومنه $t = 1 - u \bmod p$ ومن العلاقة (2.4) من المبرهنة السابقة نجد $u(u-1) = -u(u-1) \bmod p$ وهذا يناقض كون p أولياً ما يعني وفق المبرهنة السابقة أنَّ $Card\ H = 1$.

2.2. غروبوئيدات سمارانداك باستخدام $C(Z_n)$

وجدنا في المبرهنة 6.2 أنَّ الغروبوئيد $Z_n(t, u)$ يماثل الغروبوئيد $Z_{n_1}(t_1, u_1) \times Z_{n_2}(t_2, u_2)$ عندما $n = n_1 n_2$ و $\gcd(n_1, n_2) = 1$، وهذا ما توصله له من أجل الغروبوئيد $\{C(Z_n), *, (t, u)\}$، والمبرهنة الآتية توضّح ذلك، ولكن سَيُحْذَفُ الإثبات كونه يشبه إثبات المبرهنة 6.2.

مبرهنة 11.2. ليكن $n = n_1 n_2$ و $\gcd(n_1, n_2) = 1$ عندئذٍ

$$\{C(Z_n), *, (t, u)\} \cong \{C(Z_{n_1}), *_1, (t \bmod n_1, u \bmod n_1)\} \times \{C(Z_{n_2}), *_2, (t \bmod n_2, u \bmod n_2)\}$$

مبرهنة 12.2. الغروبوئيد $G = \{C(Z_n), * \ (1,1)\}$ هو SG.

الإثبات:

بسهولة يمكن إثبات أنَّ كلاً من المجموعتين $\{0, i, 2i, \dots, (n-1)i\}, \{0,1, \dots n-1\}$ هي نصف زمرة جزئية من الغروبوئيد G.

نتيجة 4.2. إذا كان الغروبوئيد $Z_n(t,u)$ هو SG فإنَّ $\{C(Z_n),*,(t,u)\}$ هو غروبوئيد سمارانداك أيضاً.

مبرهنة 13.2. ليكن $G = \{C(Z_n),*,(t,u)\}$ غروبوئيد سمارنداك و n عدداً أوليّاً، عندئذٍ $t + u = 1 \bmod n$ أو $t = u \bmod n$.

الإثبات:

لتكن H نصف زمرة جزئية من G و $0 \neq z = x + iy \in H$ عندئذٍ

$$z*(z*z) = (t + ut + u^2)x \bmod n + i(t + ut + u^2)y \bmod n$$

$$(z*z)*z = (t^2 + ut + u)x \bmod n + i(t^2 + ut + u)y \bmod n$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(t + ut + u^2)x = (t^2 + ut + u)x \bmod n \\ (t + ut + u^2)y = (t^2 + ut + u)y \bmod n\end{cases}$$

$$\Rightarrow (t + ut + u^2) = (t^2 + ut + u) \bmod n \Rightarrow u(u-1) = t(t-1) \bmod n$$

$$\Rightarrow u = t \bmod n \text{ أو } t + u = 1 \bmod n$$

نتيجة 5.2. ليكن n أوليّاً و $G = \{C(Z_n),*,(t,u)\}$ غروبوئيداً من النوع الأول أو الثاني. عندئذٍ G هو غروبوئيد سمارانداك إذا وفقط إذا $t + u = 1 \bmod n$. أكثر من ذلك، إنَّ عدد غروبوئيدات سمارانداك من النوع الثاني يساوي عدد غروبوئيدات سمارانداك في $Z(n)$.

ملاحظة 4.2. المجموعة Z_n ليست نصف زمرة جزئية من $G = \{C(Z_n),*,(t,u)\}$. فعلى سبيل المثال، في الغروبوئيد $\{C(Z_4),*,(1,3)\}$ لدينا

$(2*1)*3 = 1*3 = 2 \bmod 4$ ولكن $2*(1*3) = 2*2 = 0 \bmod 4$.

References

[1] F. Smarandache and W. B. Vasantha Kandasamy, 2012. Non Associative Algebraic Structures Using Finite Complex Numbers, ZIP Publishing, Ohio, USA,.

[2] F. Smarandache, 2000. Special Algebraic Structures, In Collected Papers, Abaddaba, Oradea, Vol. 3, pp. 78-81,.

[3] R. H. Bruck, 1958. A Survey Of Binary Systems, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[4] R. Padilla, 1998. Smarandache Algebraic Structures, Bulletin Of Pure And Applied Sciences, Delhi, Vol. 17E, No. 1, pp. 119-121,.

[5] R. Padilla, 1998. Smarandache Algebraic Structures, Smarandache Notions Journal, Vol 9, No. 1-2-3, 36-38,.

[6] W. B. Vasantha Kandasamy, 2002. Groupoids And Smarandache Groupoids, American Research Press, Rehoboth, NM, USA,.

[7] W. B. Vasantha Kandasamy, 2001. New Classes Of Finite Groupoids using Z_n, Varahmihir Journal Of Mathematical Sciences, Vol. 1, pp. 135-143.

[8] W. B. Vasantha Kandasamy, 2002. Smarandache Groupoids, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, India, 9pp,.