دراسة العلاقة بين حلقات التقييم المتقطع والتموضع عند مثالي أولي ومنطقة المثاليات الرئيسية

د. شوقي محمد الراشد*

الملخص

يقدم هذا البحث دراسة حول العلاقة بين حلقة تقييم "Valuation Ring"وكل من حلقة التموضع "Localization" لحلقة عند مثالي أولي ومنطقة مثاليات رئيسية"Principle Ideals Domain"، حيث تم عرض بعض التعاريف والخواص في الفقرة الأولى (المقدمة)، وفي الفقرة الثانية يُعرض تعريف تطبيق تقييم وحلقة تقييم و حلقة تقييم متقطع أو منفصل "Discrete Valuation Ring" ومن ثم نتيجة (2−2) والتي تبيّن أن حلقة التقييم R_v من أجل تطبيق تقييم v تكون حلقة جزئية من حقل القسمة Quot(R) وأنها حلقة تقييم بحد ذاتها بالإضافة إلى مبرهنة (2−3) والتي تقدم الشرط اللازم والكافي كي تكون R حلقة تقييم.إن العلاقة بين حلقة التقييم والتموضع قد تم عرضها في الفقرة الثالث حيث تم إثبات أن حلقة التموضع لمنطقة المثاليات الرئيسية عند مثالي أولي

* أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة (Arab International University) AIU ، عضو هيئة تدريسية في جامعة دمشق.

تشكل حلقة تقييم ،وأن كل حلقة تقييم هي حلقة تحوي مثالياً أعظمياً وحيداً وذلك من خلال المبرهنتين (3−2) و (3−3) على الترتيب بالإضافة إلى نتيجة (3−4) تبيّن أن كل حلقة تقييم R جزئية من منطقة تكاملية $\grave{R}$ يكون بُعدها "Krull's Dimension" أكبر من بُعد الحلقة التي تحويها، أما الفقرة الرابعة فتدرس العلاقة بين حلقة تقييم منفصل و منطقة المثاليات الرئيسية حيث أن كل حلقة تقييم منفصل هي منطقة مثاليات رئيسية، ويكون العكس صحيحاً بإضافة بعض الشروط وذلك من خلال المبرهنة (4−5).

الكلمات المفتاحية: حلقة تقييم، تموضع، منطقة مثاليات رئيسية. التصنيف الرياضياتي العالمي (2010): 13A18 .

A Study of Relationship between the Valuation Ring, the Localization of the Ring at a Prime Ideal, and the Principle Ideals Domain

Dr. Shawki. M. AL Rashed*

Abstract

This paper presents a study of the relationship between the Valuation Ring and both the localization of the ring at prime ideal and the Principle Ideals Domain, where it is introduced some of the definitions and properties in the first section (introduction), in the second section was presented the definitions of evaluation ring and discrete valuation ring, then the result (2-2) shows that the valuation ring for some valuation map is a subring of the fractal (Quotient) field $Quot\ (R)$ and valuation ring establish itself, in addition to the theorem (2-3) provided the necessary condition and sufficient in order to be a ring valuation ring.

The relationship between the valuation ring and localization were displayed in the third section where it was proof that the

*Associate Professor at Arab International University AIU, Academic Staff at Damascus University

local ring of the Principle Ideals Domain at a prime ideal will be evaluation ring and each evaluation ring is containing only one maximal ideal in theorems (3-2) and (3-3) respectively. In addition to the result (3-4) shows that each evaluation subring of integral domain has dimension "Krull's Dimension" greaterthen this contains. The fourth section studies the relationship between the discrete valuation ring and principle ideals domain, where the theorem (4-3) proof that each discrete evaluation ring is a principle ideal domain , and vice versa it is adding some conditions and through proven (4-5).

Key words: Valuation Ring, Localization, and Principle Ideals Domain.

Mathematics Subject Classification 2010: **13A18**.

1. مقدمة:

إن لحلقة التقييم وتطبيق التقييم المنفصل أهمية كبيرة في الجبر المجرد وذلك لأنه يحدد قيماً عددية صحيحة تقابل عناصر من حلقة ما، وذلك من خلال بناء تطبيق يكون مستقره مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، بالإضافة إلى أهمية التموضع ومنطقة المثاليات الرئيسية في الجبر التطبيقي وعلى وجه الخصوص الهندسة الجبرية "Algebraic Geometry" ونظرية الشواذ "Singularity Theory" حيث أن التموضع يسمح بدراسة بعض الخواص الجبرية عند نقطة ما من مجموعة جبرية "Algebraic Set" و منطقة المثاليات الرئيسية تسمح بدراسة عدد منته من العناصر التي تكون مُعرِّفة و موّلدة للمجموعة الجبرية. لذلك نقدم في هذا البحث دراسة حول العلاقة بين هذه المفاهيم من خلال بعض الخواص في الجبر التبادلي وعرضها بأسلوب سهل و مبسط لتكون أداة ووسيلة ربط بين هذه المفاهيم.

خلال هذا البحث سيُلاحظ القارئ أنه يفتقر إلى المراجع، وذلك لأنه ربما يكون الأول من نوعه في تقديم دراسة مبسطة لا تعتمد إلا على تعاريف ومفاهيم أساسية مألوفة ومعروفة في الجبر التبادلي حول العلاقة بين التموضع والمثاليات المنتهية التوليد وحلقات التقييم.

نعرض في هذه الفقرة بعض التعاريف و المبرهنات التي سيتم استخدامها في هذا البحث. لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد (أو اختصاراً حلقة واحدية تبديلية، في هذا البحث دائما R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ما لم يتم ذكر

خلاف ذلك صراحةً)، ونرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في R بالرمز $U(R)$. نقول إن[1,2,3,4,5]R:

1) منطقة تكاملية إذا وفقط إذا كانت Rلا تحوي قواسم للصفر، ونرمز لها بالرمز ID .

2) منطقة مثاليات رئيسية إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية وكل مثالي I في R مثالي رئيسي في R، (أي إنه من أجل أي مثالي I فيR يوجد عنصر $r \in R$ يحقق $I = rR$

ويسمى I مثالي رئيسي فيR)، ويُرمز لمنطقة المثاليات الرئيسية بالرمز PID.

3) منطقة تحليل وحيد إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية وكل عنصر غير صفري وغير قابل للقلب في R يُكتب كجداء منته لعناصر أولية في R، ويُرمز لها بالرمز UFD.

4) حلقة محلية"Local Ring" إذا وفقط إذا وجِد مثالي أعظمي وحيد، مثل μ، في Rويُرمز للحلقة المحلية بالرمز (R, μ).

5) حلقة نوثرية"Noetherian Ring" إذا وفقط إذا كان كل مثالي في R منتهٍ التوليد في R (أو أي سلسلة متزايدة من المثاليات في R تنقطع).

6) لتكن R حلقة تبديلية واحدية نعرف بعد الحلقة R بالشكل التالي:

$$\dim R \coloneqq \operatorname{Sup}\{n: P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq P_n; P_i \in \operatorname{Spec}(R), 1 \leq n\}$$

حيث $Spec(R)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في R، ويُسمى بُعد كرول"Krull's Dimension" .

نقدم فكرة عامة عن التموضع في الحالة العامة ومن ثم عند المثالي الأولي، وذلك من خلال التعريف التالي [1,8,9,10] .

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

- نقول عن المجموعة $\emptyset \neq S \subseteq R$ إنها مغلقة ضربياً إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall s_1, s_2 \in S: s_1.s_2 \in S \text{ و } 1 \in S \text{ و}^{1}\ 0 \notin S$$

- لتكن S مجموعة مغلقة ضربياً في R و لنعرف علاقة التكافؤ~ على الجداء الديكارتي$(R \times S)$ بالشكل:

$$\forall (r,s),(r`,s`) \in R \times S: (r,s) \sim (r`,s`) \Leftrightarrow \exists u \in S: u(rs` - sr`) = 0$$

و نرمز لصفوف التكافؤ بالرمز

$\left[\frac{r}{s}\right] = \{(r`,s`) \in R \times S: (r,s) \sim (r`,s`)\}$ واختصاراً بالرمز $\frac{r}{s}$.

ونرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز $S^{-1}R$ أي إن $S^{-1}R = \frac{R \times S}{\sim}$

نُعرف على مجموعة صفوف التكافؤ $S^{-1}R$ قانوني تشكيل داخليين:

$$\forall (r_1,s_1),(r_2,s_2) \in R \times S:$$

$$\left[\frac{r_1}{s_1}\right].\left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.r_2}{s_1.s_2}\right] \text{ و } \left[\frac{r_1}{s_1}\right] + \left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.s_2 + r_2.s_1}{s_1.s_2}\right]$$

[1] في حالة $0 \in S$ نحصل على حالة الحلقة $S^{-1}R = \{0\}$ (التموضع التافه).

عندئذ تكون $(S^{-1}R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية الحيادي فيها هو $\frac{1}{1}=1$.

وفي حالة $S=R\backslash P$ حيث $P\in \mathrm{Spec}(R)$ مثالي أولي في R، فإن الحلقة

$S^{-1}R=\left\{\frac{a}{b}: a\in R, b\notin P\right\}$ تُسمى حلقة التموضع لـ R عند المثالي الأولي P، و يُرمز لها بالرمز R_P ، مثال على ذلك

$$\mathbb{Z}_{\langle 2\rangle}:=S^{-1}R=\left\{\frac{a}{b}: a,\ b\in\mathbb{Z},\ \ b\notin<2>\right\}=\left\{\frac{a}{b}:\ a,\ b\in\mathbb{Z},\ 2\nmid b\right\}.$$

2. حلقات التقييم و حلقات التقييم المنفصل:

2-1. تعريف[4,5,7,8,10]: لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و$\leq$علاقة ترتيب كلي على G، و K حقل ما.

a. إن النظام الرياضي $(G,+,\leq)$ يُسمى زمرة مرتبة كلياً إذا وفقط إذا تحقق:

$$g\,,\grave{g}\in G: g\leq\grave{g}\ \Longrightarrow g+h\leq\grave{g}+h\ ;\ \forall\, h\in G$$

b. إذا كانت $(G,+,\leq)$ زمرة مرتبة كلياً، فإن تقييم الحقل K في الزمرة G يُعرف على أنه التشاكل الزمري$v:(K^*,\ .)\to(G,+)$ و الذي يحقق: أياً كان $a,b\in K^*$ فإن

$v(a+b)\geq\min\{v(a),v(b)\}$ وشرط التشاكل الزمري $v(a.b)=v(a)+v(b)$ ، ويسمى v تطبيق تقييم.

وفي حالة $G=\mathbb{Z}$ زمرة الأعداد الصحيحة، فيسمى v تطبيق تقييم منفصل أو متقطع و يُرمز له بالرمز DV .

c. إذا كانت R منطقة تكاملية ID ، فإن R تسمى حلقة تقييم "Valuation Ring" إذا وفقط إذا تحقق:

$$a \in \mathrm{Quot}(R): a \in R \text{ or } \frac{1}{a} \in R$$

حيث $\mathrm{Quot}(R) = \{\frac{x}{y} : x, y \in R, y \neq 0\}$ حقل القسمة للمنطقة التكاملية R ، و يُرمز لحلقة التقييم بالرمز VR .

d. إذا كانت R حلقة تقييم، فإن R تُسمى حلقة تقييم متقطع أو منفصل إذا وفقط إذا كانت R حلقة نوثرية وليست حقلاً، ويُرمز لها بالرمز DVR .

ملاحظة[2]: يمكن صياغة التعريف السابق من أجل الزمر الضربية$(G,.)$.

2-2. نتيجة[3][10]: إذا كانت R منطقة تكاملية و $K = \mathrm{Quot}(R)$ حقل القسمة و v تطبيق تقييم، فإن المجموعة $R_v = \{a\epsilon K^*: v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ تُشكل حلقة جزئية من K و حلقة تقييم.

الإثبات: إن $R_v \neq \emptyset$ و ذلك لأن $0 \in R_v$. أياً كان $a, b \in R_v$ فإن :

$$v(ab) = v(a) + v(b) \geq 0 \Rightarrow ab \in R_v$$

$$v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\} \geq 0 \Rightarrow a + b \in R_v$$

ومنه تكون R_v حلقة جزئية.

[2] التعريف (2-1) تم صياغته من أجل زمرة مزودة بالجمع كقانون تشكيل مُعرف عليها، أما لاحقاً في المبرهنة (2-3) ستكون الزمرة مزودة بالضرب كقانون تشكيل لها.
[3] معروضة في المرجع [10] دون إثبات.

بما أن R هي ID(لا تحوي قواسم للصفر و حسب تعريف حلقة تقيم (2−1)) فإن$K = \mathrm{Quot}(R) = \mathrm{Quot}(R_v)$ كما أن$1 \in R_v$ وذلك لأن

$$[v(1) = v(1.1) = v(1) + v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \Rightarrow 1 \in R_v].$$

وبالتالي أياً كان$a \in K^*$ فإنه إذا كان $a \in R_v$ ستكون R_v حلقة تقييم و في حالة $a \in K^* \backslash R_v$ يكون $v(a) < 0$ و $v\left(\frac{1}{a}\right) = v(1) - v(a) = 0 - v(a) > 0$، أي إن $\frac{1}{a} \in R_v$ وعليه تكون R_v حلقة تقييم VR، وفي هذه الحالة يسمى v تطبيق تقييم من أجل الحلقة R.

2−3. مبرهنة: لتكن Rمنطقة تكاملية ID. إن R حلقة تقييم VR إذا و فقط إذا وجِدَ تطبيق تقييم v يكون من أجله $R = R_v$ حلقة تقييم.

الإثبات: بدايةً نفرض أن R حلقة تقييم ولنبرهن على وجود تطبيق تقييم v من أجله يكون $R = R_v$ حلقة تقييم. كون R منطقة تكاملية ID ،$K = \mathrm{Quot}(R)$ حقل قسمة، نضع $G = \frac{K^*}{U(R)}$ عندئذٍ تكون زمرة القسمة$(G,.)$زمرة تبديلية.نعرّف العلاقة $\leq$ على G بالشكل:

$$\bar{a}, \bar{b} \in G:\ \bar{a} \geq \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in R$$

إن $\leq$ معرفة جيداً و ذلك لأنه إذا كان $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\grave{a}}, \bar{\grave{b}} \in G$ حيث $\bar{a} = \bar{\grave{a}}$, و $\bar{b} = \bar{\grave{b}}$ و منه يوجد $c, d \in U(R)$ يحققان :

$$\bar{a} \geq \bar{b}, \grave{a} = ac, \grave{b} = bd \Rightarrow \frac{a}{b} \in R,\ \ \frac{\grave{a}}{\grave{b}} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b}\frac{c}{d} \in R \Rightarrow \bar{\grave{a}} \geq \bar{\grave{b}}$$

إن$\geq$ علاقة ترتيب على G، وذلك لأن

1) $\geq$علاقة انعكاسية: $\bar{a} \in G: \frac{a}{a} = 1 \in R \Longrightarrow \bar{a} \geq \bar{a}$

2) $\geq$ علاقة تخالفية: $\bar{a}, \bar{b} \in G\,;\ \bar{a} \geq \bar{b}\,, \bar{b} \geq \bar{a} \Longrightarrow \frac{a}{b} \in R\,, \frac{b}{a} \in R \ \Longrightarrow \frac{a}{b} \in U(R)$

أي إن $\overline{1} = U(R) = U(R) . \frac{a}{b} = \overline{(\frac{a}{b})}$ حيث $U(R) = \overline{1}$ الحيادي في G ، ومنه $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \overline{1}$ وبالتالي $\bar{a} = \bar{b}$.

3) $\geq$علاقة متعدية:

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G\,;\ \bar{a} \geq \bar{b}\,,\ \bar{b} \geq \bar{c} \Longrightarrow \frac{a}{b} \in R\,,\ \frac{b}{c} \in R\ \Longrightarrow$ $\frac{a}{c} = \frac{a}{b}\frac{b}{c} \in R$ ، ومنه$\bar{a} \geq \bar{c}$.

كما أن $\geq$ علاقة ترتيب كلي على G و ذلك لأنه أياً كان $\bar{a}, \bar{b} \in G$ فأن $\frac{a}{b} \in K^*$ ، وكون R حلقة تقييم يكون إما $\frac{a}{b} \in R$ أو $\frac{b}{a} \in R$ ومنه $\bar{a} \geq \bar{b}$أو$\bar{b} \geq \bar{a}$.

وبالتالي $(G, \geq)$ مجموعة مرتبة كلياً، و علاقة الترتيب $\geq$تحقق :

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G;\ \bar{a} \geq \bar{b}\ \Longrightarrow\ \frac{a}{b} \in R\ \Longrightarrow\ \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \in R \Longrightarrow\ \overline{ac} \geq \overline{bc}$$

ومما سبق نجد أن $(G, ., \geq)$ زمرة مرتبة كلياً .

نُعرّف التشاكل الزمري$v: K^* \longrightarrow G$ بالعلاقة $\forall a \in K^*: v(a) = \bar{a}$. إذا كان $a, b \in K^*$ و بفرض $a + b \neq 0$ و دون المساس بالعمومية $v(a) \geq v(b)$أي$\bar{a} \geq \bar{b}$، فإن

$$\frac{a}{b} \in R \Longrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 \in R \Longrightarrow \overline{a+b} \geq \bar{b}$$

ومنه $v(a+b) \geq v(b) = \min\{v(a), v(b)\}$ ، وبالتاليv تطبيق تقييم.

ويكون لدينا $R_v = \{a \in K^*: v(a) \geq e_G\} \cup \{0\}$ حيث $e_G = \bar{1}$ حيادي الزمرة G.

ومن جهة ثانية:

$$a \in R_v \Leftrightarrow a \in K^*; v(a) \geq e_G = \bar{1} = v(1) \Leftrightarrow a = \frac{a}{1} \in R$$

ومنه $R_v = R$ حلقة تقييم VR.

العكس صحيح وذلك حسب النتيجة (2−2) وملاحظة أن $e_G = 0$ في النتيجة (2−2)، ومنه تكون R_v حلقة تقييم و لدينا $R_v = R$ وعليه تكون R حلقة تقييم من أجل تطبيق التقييم v.

3–العلاقة بين حلقة التقييم والتموضع " Localization " للحلقة عند مثالي أولي:

3–1. تمهيدية **[10]** : لتكن R منطقة تكاملية ID ، و$K = Quot(R)$ و $(G, +, \geq)$ زمرة مرتبة جيداً. إذا كان $v: R^* \longrightarrow G$ تطبيقاً يحقق: أياً كان $a, b \in R^*$

$v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ و $v(ab) = v(a) + v(b)$، فإن التطبيق $\hat{v}: K^* \longrightarrow G$ المعرف بالعلاقة $\forall \frac{a}{b} \in K^* : \hat{v}\left(\frac{a}{b}\right) = v(a) - v(b)$، تطبيق تقييم للحقل K.

يُسمى التطبيق v في التمهيدية السابقة (3–1) تطبيق تقييم للحلقة R.

3–2. مبرهنة: لتكن R منطقة مثاليات رئيسية و$K = Quot(R)$. إذا كان $P \in Spec(R)$ مثالي أولي في R و R_P حلقة التموضع للحلقة R عند المثالي P، فإنه يوجد تطبيق تقييم (متقطع)v من أجله يكون $R_v = R_P$ حلقة تقييم.

الإثبات: بما أن R منطقة مثاليات رئيسية فإنه يوجد عنصر أولي $p \in P$ يولد المثالي الأولي P، أي إن $P =< p >$. ونعلم أن كل منطقة مثاليات رئيسية هي منطقة تحليل وحيد[1,6]، و منه يمكن أن نُعرف التطبيق $v_p: R^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ بالعلاقة

$$\forall\, a \in R^*: v_p(a) = n_a \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} : a \text{ يقسم } p^n \}$$

أياً كان $a, b \in R^*$ فإنه يوجد $c, d \in R$ حيث يكون $a = cp^{n_a}, b = dp^{n_b}$ و دون المساس بالعمومية نفرض أن $n_a \geq n_b$.

- $v_p(ab) = v_p(cdp^{n_a+n_b}) = n_a + n_b$
- $v_p(a+b) = v_p\big((cp^{n_a-n_b} + d)p^{n_b}\big) \geq n_b = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$

وحسب التمهيدية السابقة $(1-3)$ يكون التطبيق $v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعرف بالعلاقة

$$\forall \frac{a}{b} \in K^* : \ v\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$$

تطبيق تقييم (متقطع) للحقل K حيث $K = Quot(R)$. و تكون حلقة تقييم هذا التطبيق

$$\begin{aligned}
R_v &= \left\{\frac{a}{b} \in K^* : \ v\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{a}{b} \in K^* : \ v_p(a) - v_p(b) \geq 0\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{a}{b} \in K^* : n_a \geq n_b\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{cp^{n_a}}{dp^{n_b}} \in K^* : \ n_a \geq n_b\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{cp^{n_a-n_b}}{d} : c, d \in R, d \text{ لا يقسم } p\right\} \\
&= \left\{\frac{s}{t} : s, t \in R, t \text{ لا يقسم } p\right\} \\
&= \left\{\frac{s}{t} : s, t \in R, t \notin < p >\right\} = R_{<p>} = R_P.
\end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (2− 3) تكون حلقة التموضع R_P للحلقة R عند المثالي P حلقة تقييم VR، و بذلك يتم المطلوب.

يمكن أن نستنتج مباشرةً بأنه إذا كانت R حلقة نوثرية وليست حقلاً[4] في المبرهنة السابقة فإن حلقة التموضع R_P للحلقة R عند المثالي P حلقة تقييم متقطعة DVR. مثال على ذلك:

إن $\mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة حلقة نوثرية [3,5,6]، فإذا كانت $R = \mathbb{Z}$ و$K = Quot(R) = \mathbb{Q}$ حقل الأعداد العادية ومن أجل المثالي الأولي $P =< 3 >$ المولد بالعدد الأولي $p = 3$ ، فتكون حلقة التموضع$R_P =$ $\mathbb{Z}_{<3>} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\, , b \notin < 3 >\right\} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\, , b\right.$ لا يقسم $\left.3\right\}$ للحلقة R عند المثالي $P =< 3 >$ حلقة تقييم متقطعة DVR.

نبيّن فيما يأتي بأن كل حلقة تقييم تملك مثالياً أعظمياً واحداً فقط، أي إنها ستكون حلقة محلية.

3−3. **مبرهنة[5][10]**: إذا كانت R حلقة تقييم VR، فإن (R, μ) حلقة تموضع (محلية) "Local Ring" حيث إنّ $\mu = \{a \in Quot(R) : \frac{1}{a} \notin R\}$ المثالي الأعظمي في R.

---

[4] كل حلقة مثاليات رئيسية هي حلقة نوثرية ولكن ليس بالضرورة ألاّ تكون حقلاً، مثال على ذلك: حلقة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ منطقة مثاليات رئيسية وحقل.

[5] تُعرض في المرجع [10]صفحة 34 ، بشكل مقتضب دون إثبات واضح .

الإثبات: إن $\mu = R\backslash U(R)$ مجموعة كل العناصر غير القابلة للقلب في R وذلك لأن:

$$a \in R\backslash U(R) \Leftrightarrow a \notin U(R) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \notin R \Leftrightarrow a \in \mu$$

كما أن $\mu = R\backslash U(R)$ مثالي في R:

- نفرض جدلاً أنه يوجد $a \in \mu = R\backslash U(R)$ و $r \in R$ حيث يكون $ra \notin \mu$ و منه

$$ra \in U(R) \Longrightarrow \frac{1}{ra} \in R \Longrightarrow \frac{1}{a} = r\frac{1}{ra} \in R$$

أي إن a قابل للقلب في R و هذا يناقض كون $a \in \mu = R\backslash U(R)$ ومنه يكون الفرض الجدلي خاطئاً و بالتالي $\forall\, a \in \mu\, , r \in R : ra \in \mu$.

- بالمثل نفرض جدلاً أنه يوجد $a, b \in \mu = R\backslash U(R)$ حيث $a + b \notin \mu$ ومنه $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، دون المساس بالعمومية ليكن $a \neq 0$ ومنه $\frac{b}{a} \in Quot(R)$ وكون R حلقة تقييم فإن $\frac{a}{b} \in R$ أو $\frac{b}{a} \in R$ ، ومنه $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \in R$ أو $\left(1 + \frac{a}{b}\right) \in R$، وعليه يكون

$a + b = \left(1 + \frac{b}{a}\right) a \in \mu$ أو $a + b = \left(\frac{a}{b} + 1\right) b \in \mu$ وفي كلتا الحالتين نجد أنّ هذا يناقض كون $a + b \notin \mu$ و عليه يكون الفرض الجدلي خاطئاً أي إنّ

$$a, b \in \mu = R\backslash U(R) : a + b \in \mu$$

وبالتالي يكون $\mu = R\backslash U(R)$ مثالياً في R. ومن الواضح أن μ مثالي أعظمي وحيد في R و ذلك لأن أي مثالي I في R يحوي المثالي μ ولا يساويه سيكون فيه عنصراً قابلاً للقلب و منه سيكون $I = R$ وهذا ما يبيّن أن μ مثالي أعظمي وفي حالة يوجد مثالي أعظمي آخر J لا يساوي μ فإنه سيحوي أيضاً عنصراً قابلاً للقلب و منه $J = R$ و هذا يناقض كون J مثالياً أعظمياً، أي إنه لا يوجد إلا مثالي أعظمي واحد فقط هو μ. وبالتالي تكون (R,μ) حلقة محلية.

3–4. نتيجة: لتكن R حلقة تقييم و $\grave{R}$ منطقة تكاملية . إذا كانت R حلقة جزئية من ` ولا تساويها و $\grave{R}$ حلقة جزئية من $K = Quot(\grave{R})(R \subsetneq$ (أي إن $\grave{R} \subseteq K$، فإن $\grave{R}$ حلقة تقييم و $\grave{\mu} \subset \mu$ و $\mu \neq \grave{\mu}$ ، حيث $\grave{\mu}$ و μ مثاليات أعظمية في $\grave{R}$ و R على الترتيب بالإضافة إلى أن $.dim(\grave{R}) < \dim(R)$

الإثبات: كون ` منطقة تكاملية و R حلقة جزئية منها فإن $.K = Quot(\grave{R}) = Quot(R)$ ومنه

$\forall a \in K: a \in R \subset \grave{R}\ or\ \frac{1}{a} \in R \subset \grave{R}$ وهذا لأن R حلقة تقييم، وعليه تكون ` حلقة تقييم.

حسب المبرهنة السابقة (3–3) تكون (R,μ) و $(\grave{R},\grave{\mu})$ حلقات محلية حيث $\mu = R\backslash U(R) = \{a \in K: \frac{1}{a} \notin R\}$ و $\grave{\mu} = \grave{R}\backslash U(\grave{R}) = \{a \in K: \frac{1}{a} \notin \grave{R}\}$ و بالتالي $\grave{\mu} \subset \mu$ و كون $R \neq \grave{R}$ فيكون $[\mu \neq \grave{\mu}$

في حالة فرضنا جدلاً أن $\mu = \grave{\mu}$ و حسب تعريف $\grave{\mu}$ و μ و كون $R \subsetneq \grave{R}$ فيوجد عنصر قابل للقلب في $\grave{R}$ و ليس قابل للقلب في R، أي إن $x \in \grave{R} \setminus R: \frac{1}{x} \in R \subsetneq \grave{R} \Longrightarrow \frac{1}{x} \in \mu = \grave{\mu}$، ومن جهة ثانية $\frac{1}{x} \in U(\grave{R})$ و هذا يعني أن $\frac{1}{x} \notin \grave{\mu}$ و هذا تناقض].

وبما أن كل مثالي أعظمي هو مثالي أوليفي الحلقة التبديلية الواحدية [1,6] يكون $dim(\grave{R}) < \dim(R)$ و ذلك لأننا قد أثبتنا أن $\grave{\mu} \subset \mu$ و $\mu \neq \grave{\mu}$.

4- **حلقة التقييم و منطقة المثاليات الرئيسية:** نبين في هذه الفقرة بأن كل حلقة تقييم متقطع هي منطقة مثاليات رئيسية و ذلك من خلال المبرهنة (3-4) ولكن العكس سيتطلب إضافة بعض الشروط التي سنعرضها في المبرهنة (4-5).

4-1. تمهيدية: لتكن R منطقة تكاملية ID. إن R حلقة تقييم VR إذا و فقط إذا كانت مجموعة كل المثاليات في R، $S = \{I : R \text{ مثالي في } I\}$، مجموعة مرتبة كلياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

الإثبات: نفرض أن حلقة تقييم VR ولنبرهن على أنه $\forall I, J \in S$ فإن $I \subseteq J$ أو $J \subset I$. في حالة $I \subseteq J$ يتم المطلوب. وفي حالة $I \nsubseteq J$ فأنه $\exists a \in, a \notin J$. إذا كان $J = \{0\}$ فإنّ $J \subseteq I$ يتم المطلوب، وفي حالة $J \neq \{0\}$ ، ليكن $0 \neq b \in J$. عندئذٍ

$$\text{حلقة تقييم}\ R \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{a}{b} \in R \Longrightarrow a = \frac{a}{b}.b \in J \quad \text{وهذا غير ممكن} \\ \text{أو} \\ \frac{b}{a} \in R \Longrightarrow b = \frac{b}{a}.a \in I \end{matrix}\right\} \Longrightarrow J \subset I$$

وبالمثل في حالة $J \nsubseteq I$ سيكون $I \subset J$، و بالتالي نجد $I \subseteq J$ أو $J \subset I$ مما يعني أن المجموعة S مرتبة كلياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء.

ولإثبات العكس نفرض أن مرتبة كلياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء ولنبرهن على أن R حلقة تقييم وفق ما يلي.

$$\forall \frac{a}{b} \in K = Quot(R): a, b \in R \Longrightarrow < a > \subseteq < b > \ \text{أو}\ < b > \subseteq < a >$$

وذلك لأن S مرتبة كلياً بالنسبة إلى علاقة الاحتواء. و منه يوجد $c, d \in R$ حيث $a = cb$ أو $b = da$. و من جهة ثانية $a = \frac{a}{b}b = cb$ ومنه

$$c = \frac{a}{b} \in R$$

أو $b = \frac{b}{a}a = da$ ومنه $d = \frac{b}{a} \in R$، و ذلك لأن R منطقة تكاملية (قانون الاختصار محقق)، و منه تكون R حلقة تقييم.

2-4. **تمهيدية[6][7]:** لتكن حلقة تقييم. إذا كان $I =< a_1, a_2, \dots \dots, a_r >$ مثالي مولد بالعناصر $a_1, a_2, \dots, a_r \in R$، فإنه يوجد $i \in$

[6] معروضة في المرجع [7] دون إثبات.

$\{1,2,\dots\dots,r\}$ حيث $I =< a_i >$ أي إن المثالي I سيكون مولداً بعنصر واحد.

الإثبات: إن $I =< a_1, a_2, \dots, a_r >$ و $< a_j >$ مثاليات في R من أجل كل $j \in \{1,2,\dots,r\}$ و حسب التمهيدية السابقة (4−1) فإنه

$\exists\, i \in \{1,2,\dots\dots,r\}: I \subseteq< a_i >$ و ذلك لأنه

$\forall j \in \{1,2,\dots\dots,r\}\,;\ \exists\, i \in \{1,2,\dots\dots,r\}: < a_j >\subseteq< a_i >$،

ومن جهة ثانية $a_i \in I$ و بالتالي

$$\exists\, \mathrm{i} \in \{1,2,\dots\dots,\mathrm{r}\}: < \mathrm{a_i} >\subseteq \mathrm{I} \subseteq< \mathrm{a_i} >$$

ومنه $\exists\, i \in \{1,2,\dots\dots,r\}: I =< a_i >$ وبذلك يتم المطلوب.

3−4. **مبرهنة:** إذا كانت R حلقة تقييم متقطع DVR، فإن R منطقة مثاليات رئيسية.

الإثبات: ليكن I مثالياً في الحلقة R و لنبرهن أنه مولد بعنصر واحد في R. حسب تعريف حلقة تقييم متقطع (2−1) تكون R منطقة تكاملية وحلقة تقييم و نوثرية وليست حقلاً. و بما أن كل مثالي في الحلقة النوثرية منتهي التوليد ، فأنه يوجد $a_1, a_2, \dots\dots, a_r \in R$ حيث $I =< a_1, a_2, \dots, a_r >$ وحسب التمهيدية السابقة (4−2) ، $\exists\, i \in \{1,2,\dots\dots,r\}: \ I =< a_i >$ ، أي إن المثالي I مثالي رئيسي في الحلقة R ومنه تكون R منطقة مثاليات رئيسية.

إن المبرهنة السابقة (4−3) تبيّن أن كل حلقة تقييم متقطع هي منطقة مثاليات رئيسية و لكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة و مثال على ذلك $R=\mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة منطقة مثاليات رئيسية و لكنها ليست حلقة تقييم و ذلك لأن $a=\frac{5}{2}\in\mathbb{Q}=Quot(R)$ ، و لكن $a\notin R$ و $\frac{1}{a}=\frac{2}{5}\notin R$ ، أي إن R ليست حلقة تقييم متقطع.يكون العكس صحيحاً بإضافة بعض الشروط التي سنعرضها في المبرهنة التالية (4−5). و لكن قبل ذلك نعرض تمهيدية.

4−4. تمهيدية: لتكن Rمنطقة تكاملية. إن R حلقة تقييم متقطع إذا و فقط إذا كانت R حلقة تقييم من أجل تطبيق تقيم متقطع (أي إنه يوجد تطبيق تقييم متقطع v من أجله يكون $R=R_v$حلقة تقييم).

الإثبات: نفرض بدايةً أن R حلقة تقييم متقطع و منه R حلقة محلية ومنطقة مثاليات رئيسية، حسب المبرهنة (3−3) و المبرهنة (4−3) على الترتيب، وبما أن كل مثالي أعظمي في الحلقة التبديلية الواحدية هو مثالي أولي، وحسب المبرهنة (3−2) يوجد تطبيق تقييم متقطع $v:K^*\longrightarrow\mathbb{Z}$من أجله $R_\mu=R_v$ حلقة تقييم، حيث $\mu=\{a\in K:\frac{1}{a}\notin R\}$ المثالي الأعظمي في R و$K=Quot(R)$، ولكن (R,μ) حلقة محلية أي إن $R=R_\mu=R_v$ حلقة تقييم.

ولإثبات العكس يكفي أن نبرهن على أن R نوثرية، و ذلك لأنه يوجد تطبيق تقييم متقطع $v:K^*\longrightarrow\mathbb{Z}$ من أجله $R=R_v$ حلقة تقييم. ليكن I مثالياً في R، نميز حالتين إذا كان $I=\{0\}$ المثالي الصفري فإنه منتهي التوليد في R، وفي

حالة $I \neq \{0\}$ وكون v تطبيق تقييم متقطع فإنه يوجد $0 \neq f \in I$ حيث يكون $v(f)$ أصغرياً ($v(f) \in \mathbb{Z}$ أصغري بالنسبة إلى علاقة الترتيب المألوفة على الأعداد) ومنه$I \subseteq < f >$. ليكن $0 \neq g \in I$، عندئذٍ

$$v(g) \geq v(f) \Rightarrow v\left(\frac{g}{f}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{g}{f} \in R_v \Rightarrow g = \frac{g}{f} f \in < f >_{R_v} = < f >_R$$

وبالتالي $< f > \subseteq I \subseteq < f >$ و منه $I = < f >$ منتهي التوليد، وبذلك يكون كل مثالي في R منتهي التوليد و منه R نوثرية، وبالتالي R حلقة تقييم متقطعDVR.

4-5. **مبرهنة:** لتكن (R, μ) حلقة محلية. إذا كانت R منطقة مثاليات رئيسية PID، فإن R حلقة تقييم متقطعDVR.

الإثبات: إن كل مثالي أعظمي هو مثالي أولي في الحلقة التبديلية الواحدية، ومنه μ مثالي أولي في R وحسب المبرهنة (3-2) يوجد تطبيق تقييم متقطع$v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ ، حيث $K = Quot(R)$، من أجله $R_v = R_\mu$.كما أن $R = {}_{\mu}$ و ذلك لأن (R, μ) حلقة محلية، و بالتالي يوجد تطبيق تقييم متقطع v من أجله $R = R_v$، وحسب التمهيدية السابقة (4-4) تكون R حلقة تقييم متقطع DVR.

المراجع العلمية :References

- Atiyah, M. F, Introduction to commutative Algebra. Universitry of Oxford. 1967.
- Braun, A., andWareld, R.B., Symmetry and Localization in Noetherian Prime PI Rings, Journal of Algebra 118, 322-335 (1988).
- Bruns, W. and Herzog, J. Cohen-Macaulay, Rings, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998.
- Eisenbud, D., Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry. Spriger-Verlay, 2008 .
- Eisenbud, D., Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of His 65th Birthday, 2013, ISBN 978-1-4614-5292-8.
- Fraleigh, J., A First course in Abstract Algebra. 7Edition. Spriger-Verlay. 2004.
- Max D. Larsen , Paul J. McCarthy: Multiplicative theory of ideals, Academic Press New york and London 1971.
- MÄuller, B. J., Localization in Fully Bounded Noetherian Rings, Pacic Journal of Mathematics 67, 233-245 (1976).
- Swanson,I., and Huneke, C.,Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series 336, Cambridge University Press.
- Zariski, O., Samuel, P. Commutative Algebra Volume II. Springer Verlag, New York, 1960.