مسألة الـ $n-$ ملكة

محمد أبو صافي* د. شوقي الراشد**

الملخص

تعد مسألة الـ ($n-$ ملكة) من المسائل التي يمكن إيجاد حلول لها باستخدام مفاهيم رياضية (حيث $n \geq 4$ عدد صحيح موجب)، حيث يوجد العديد من الطرق لحل هذه المسألة كتقنية البحث بالتراجع[9 ,2] وباستخدام خوارزمية جينية متوازية[3] وباستخدام البرمجة الديناميكية[10] وباستخدام خوارزميات DFS وBFS [12] والكثير من الطرق الأخرى. في هذه الورقة العلمية تم دراسة بعض الحسابات المتعلقة برقعة الشطرنج وتوصلنا إلى حساب عدد المربعات المرتبطة وغير المرتبطة بمربع ما (i,j) على رقعة شطرنج من المرتبة $n \times n$ وفق حركة الملكة، وذلك من خلال المبرهنات (1) و(2) و(3)، وتوضيح ذلك بالتطبيق على مثال تكون فيه الرقعة من المرتبة 10×10، ولعرض التوصيف الجبري للمسألة تم استخدام بعض المفاهيم في الحساب في الجبر التبادلي لحل مسألة الـ ($n-$ ملكة)، وهي مفهوم التدرج والتدرج القياسي للحلقات ومفهوم متسلسلة هلبرت للحلقات المدرجة ومفهوم البعد والتعددية للحلقة انطلاقاً من متسلسلة هلبرت لها، بالإضافة إلى مفهوم البعد التركيبي للجبور الأفينية، كما تم الربط بين حركة الملكة على رقعة الشطرنج والبيان من خلال تعريف بيان الملكة وتلوينه في حالة خاصة، وباستخدام نظام جبر

* طالب ماجستير - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق.

** أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة، عضو هيئة تدريسية في كلية العلوم–جامعة دمشق.

الكمبيوتر SINGULAR [15] ومفهوم البعد التركيبي تم إيجاد العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى وذلك في الحالة العامة.

الكلمات المفتاحية: الحلقة المدرجة القياسية، المودول المدرج، متسلسلة هلبرت، حدودية بسوط هلبرت (المبسطة)، البعد، التعددية، البعد التركيبي، الجبر الأفيني، بيان الملكة.

التصنيف AMS: 14A20

n- Queen Problem

Mohamad Abo-Safi* **Dr. Shawki Al-Rashed****

Abstract

The n-queen problem is one of the problems that can be solved using mathematical concepts, (where $n \geq 4$ is a positive integer), where there are many methods to solve this problem as backtracking search technique[2, 9] and using global parallel genetic algorithm[3] and dynamic programming[10] and using DFS and BFS algorithms[12]. In this paper, we have studied some computation related to the chessboard, and we computed the number of squares associated and disassociated with square (i, j) on a chessboard of size $n \times n$ according to the queen's movement throught the theorms (1),(2) and (3) and apply it by the implementation on example for a chessboard of size 10×10, to represent this problem algebraically we used some concepts of computation in commutative algebra to solve the n-queen problem which are the concept of graded and the standard graded of rings, the hilbert series of graded rings, the dimension and multiplicity of the ring, additionally to the concept of the combinatorial dimension of an affine algebras. we connected between queen's movement on the chessboard and the graph by the definition of the queen's graph and coloring it in special case. using the computer algebra system SINGULAR[15], combinatorial dimension and we found the maximum number of queens can be placed on a chessboard so that no two of them attack one another in general case.

Keywords: Standard graded ring, Graded modul, Hilbert series, Hilbert numerator polynomial(simplified), Dimension, Multiplicity, Combinatorial Dimension, Affine algebra, Queen graph.
AMS Subject Classification: **14A20**

* Master student Department of Mathematics - Faculty of Sciences - Damascus University.
** Associated Professor at Arab International University, Academic Staff at Damascus University.

مقدمة:

تعد مسألة الـ(8− ملكات) والتي تنص على إيجاد عدد طرق توضع 8 ملكات على رقعة الشطرنج من المرتبة 8×8 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى والمقترحة من قبل لاعب الشطرنج الألماني $Max\ Bezzel$ من المسائل االقديمة والمعروفة علماً أن الملكة تتحرك على رقعة الشطرنج بشكل أفقي وشاقولي وقطري[6]، حيث قام بنشر مقالة عام 1848 حولها في برلين في صحيفة الشطرنج الألمانية "$Schachzeitung$"[4]. وأول الحلول الذي قُدم لها من قبل $Franz\ Nauck$ عام 1850، والذي عاد ليؤكد وجود 92 حل لهذه المسألة. ثم بعد ذلك تمت دراسة هذه المسألة من قبل العالم الرياضي$Georg\ Cantor$ والعالم الرياضي $Carl\ Gauss$ بعد أن قرأ مقالة $Franz\ Nauck$[14]. وكان أول من عمم هذه المسألة إلى مسألة الـ($n-$ ملكة) حيث $n\geq4$ هو $Franz\ Nauck$[14] والتي تنص على إيجاد عدد الملكات من جهة وعدد طرق توضع هذه الملكات من جهة أخرى على رقعة الشطرنج بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى، كما تم تعميمها من قبل $Carl\ Gauss$[6]، وقد أثارت مسألة الـ($n-$ ملكة) اهتمام العديد من علماء الرياضيات ولاعبي الشطرنج ومؤخراً علماء الحاسوب. وفي عام 1874 اقترح $S.Gunther$ طرقاً لإيجاد الحلول مستخدماً المقرّرون ($determinants$) وقد عاد $J.W.L.Glaisher$ ليؤيد استخدام هذه الطريقة [14]. كما درست مسألة الـ($n-$ ملكة) من قبل $Takefuji$ وSzu عام 1989 كتطبيق على محاكاة كوشي الصلبة ($Cauchy\ Simulated\ Annealing$)[11]، ومن قبل $Adorf$ و$Johnston$ عام 1989 كتطبيق على شبكات النت العشوائية المتقطعة المحمية ($Guarded\ Discrete\ Stochastic\ Network$)[11]، ومن قبل $Kajiura$ و$Akiyama$ و$Anzi$ عام 1989 كتطبيق على آلة بولتزمان[11].

1. تعاريف ومفاهيم أساسية في الجبر التبادلي ونظرية البيان:

تعريف1.1:[7] لتكن G مجموعة غير خالية. يقال عن البنية $(G,*)$ أنها مونوئيد إذا حققت الشروط:

1) العملية $(*)$ داخلية .

2) العملية $(*)$ تجميعية

3) المجموعة G تحوي عنصراً حيادياً بالنسبة لـ $(*)$.

ويقال عن المونوئيد إنه تبديلي إذا كانت العملية $(*)$ تبديلية.

تعريف2.1:[7] لتكن R حلقة وليكن G مونوئيد عندئذ يقال عن الحلقة R إنها $G-$ حلقة مدرجة إذا وجدت أسرة من الزمر الجزئية $\{R_n\}_{n\in G}$ تحقق:

1) $R =\bigoplus_n R_n$(كزمر تبديلية).

2) $R_n.R_m \subseteq R_{n+m}$ لأجل أي $n\,,m$ من G.

وكل عنصر $a\in R_n$ يدعى عنصر متجانس من المرتبة n ويرمز لذلك $\deg(a)=n$

تعريف3.1:[8] لتكن $R =\bigoplus_{i\in G} R_i$ حلقة مدرجة يقال عن R إنها مدرجة قياسية إذا كانت G مونوئيداً $\mathbb{N}$(مجموعة الأعداد الطبيعية) و R مولدة بالعناصر من الدرجة 1 فوق R_0 أي أن $R=R_0[R_1]$.

وهذا التعريف محقق إذا اعتبرنا R هي $K-$ جبر مدرج على الحقل K.

تعريف4.1:[8] لتكن R هي $K-$ جبر مدرج قياسي عندئذ فإن R تملك الشكل $R\cong P\,/\,I$ حيث $\left[\ _1\,,x_2,\dots\dots x_n\right]$ $P=K$ هي $\mathbb{N}-graded$ وكل متغير x_i متجانس من الدرجة 1 ، و I مثالي متجانس في P . وبالمقابل كل جبر من الشكل $P\,/\,I$ هو $K-$ جبر مدرج قياسي.

تعريف5.1:[7] لتكن R هي $G-$ حلقة مدرجة و M مودول على الحلقة R يقال عن M أنه مودول مدرج على الحلقة R إذا وجدت أسرة من الزمر الجزئية $\{M_n\}_{n\in G}$ من M تحقق:

1) $M = \oplus_n M_n$ (كزمر تبديلية) $2R_n . M_m \subseteq M_{n+m}$ لأجل أي n, m من G.
وكل عنصر $a \in M_n$ يدعى عنصراً متجانساً من المرتبة n.

تعريف6.1:[8] ليكن K حقلاً ولتكن $P = K[x_1, x_2, \dots \dots x_n]$ حلقة مدرجة قياسية و M مودول مدرج منتهي التوليد على الحلقة P يعرف تابع هلبرت على M بأنه التطبيق:

$$HF_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$i \longrightarrow dim_K(M_i)$$

حيث $dim_K(M_i)$ بعد المودول الجزئي M_i على الحقل K .

تعريف7.1:[8] ليكن M هو $P-$ مودول مدرج منتهي التوليد و $P = K[x_1, x_2, \dots \dots x_n]$ تعرَّف متسلسة هلبرت على M بأنها متسلسلة قوى وحيدة المتغير تعطى بالشكل:

$$HS_M(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} HF_M(i) z^i$$

تعريف8.1:[8] ليكن K حقلاً و $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة مدرجة قياسية و I مثالي في P يدعى الـ $K-$ جبر من الشكل $P/_I$ بالجبر الأفيني على الحقل K أو $K-$ جبر أفيني.

تعريف9.1:[8] لتكن R حلقة عندئذ يعرف بعد كرول للحلقة R بأنه:

$$\sup\{n : p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n \; ; \; p_i \text{ مثاليات أولية في } R\}$$

ونرمز له بالرمز $Kdim(R)$.

تعريف10.1:[8] ليكن K حقلاً ولتكن $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل K و I مثالي فعلي في P و $Y \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة من المتغيرات يقال عن المجموعة Y أنها مستقلة بالمقاس I إذا كان التطبيق $K[Y] \longrightarrow P/_I$ تطبيق التباين القانوني. ويدعى الحجم الأعظمي لهذه المجموعة المستقلة من المتغيرات بالبعد التركيبي

$(combinatorial\ dimension)$ لـ $P/_I$.

تعريف11.1:[8] ليكن K حقلاً و $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة كثيرات الحدود على الحقل K و I مثالي فعلي من P ولتكن $Y \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة من المتغيرات عندئذ:

1) يقال عن المجموعة Y أنها مستقلة بالمقاس I أو مجموعة مستقلة من المتغيرات بالمقاس I إذا كان: $I \cap K[Y] = 0$.

2) يقال عن المجموعة Y أنها مجموعة مستقلة عظمى بالمقاس I إذا تحقق الشرطان:

- Y مجموعة مستقلة بالمقاس I .
- لا يوجد مجموعة جزئية Z من $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ بالمقاس I تحقق أن $Y \subset Z$

3) يدعى العدد الأعظمي من العناصر للمجموعة المستقلة من المتغيرات بالمقاس I بالبعد التركيبي لـ $P/_I$ ويرمز له بالرمز $cdim(P/_I)$.

تعريف12.1:[1] يعرف البيان G بأنه الثنائية (V, E) حيث:

$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة غير خالية وتسمى مجموعة رؤوس البيان و $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ مجموعة من الأضلاع التي تربط بين هذه الرؤوس فمثلاً الرمز $e_1 = [v_2, v_5]$ يعبر عن أن الضلع e_1 يصل بين الرأسين v_2 و v_5 . ويرمز للبيان الذي مجموعة رؤوسه V ومجموعة أضلاعه E بالرمز $G(V, E)$.

تعريف13.1:[1] يقال عن الرأسين u و v أنهما متجاوران إذا وجد $e \in E$ بحيث يكون $e = [u, v]$.

تعريف14.1:[1] يقال عن البيان G أنه قابل للتلوين من المرتبة k إذا كان بالإمكان تحديد لون واحد من الـ k لون لكل رأس بحيث أن الرؤوس المتجاورة تأخذ ألواناً مختلفة.

تعريف15.1: [1] يقال عن البيان G أنه لوني $(chromatic)$ من المرتبة k إذا كان قابلاً للتلوين من المرتبة k وغير قابل للتلوين من المرتبة $k-1$ ويعبر عن ذلك بالرمز : $\chi(G)=k$.

تعريف16.1:[13] بيان الملكة: بيان الملكة المقابل لرقعة شطرنج من المرتبة $n\times n$ يرمز له بالرمز Q_n وهو بيان ذو n^2 رأس، رؤوسه هي مربعات رقعة الشطرنج حيث إن كل رأسين متجاورين يجب ألا يقعا في السطر نفسه أو في العمود نفسه أو في القطر الرئيس نفسه أو في القطر الثانوي نفسه.

تعريف17.1: إذا كان Q_n بيان الملكة لرقعة شطرنج من المرتبة $n\times n$ فإن كل مربع (i,j) من الرقعة يعبر عن رأس من رؤوس بيان الملكة الموافق لهذه الرقعة حيث $,j\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

2. تمهيديات ومبرهنات أساسية:

مبرهنة1.2: [8] ليكن M هو $P-$ مودول مدرج منتهي التوليد غير صفري و$\alpha(M)=min\{i\in\mathbb{Z}\ \backslash\ M$ مودول جزئي من $M_i\neq\{0\}\}$ عندئذ تعطى متسلسلة هلبرت على M بالشكل:

$$HS_M(z)=\frac{z^{\alpha(M)}HN_M(z)}{(1-z)^n}$$

حيث: $HN_M(z)\in\mathbb{Z}[z]$ تدعى حدودية بسوط هلبرت على M وتحقق $HN_M(0)=HF_M(\alpha(M))>0$ و n عدد المتغيرات في P .

نستطيع من متسلسلة هلبرت السابقة تبسيط الكسر باختزال $(1-z)$ من البسط والمقام قدر الإمكان فتصبح متسلسلة هلبرت بالشكل :

$$HS_M(z)=\frac{z^{\alpha(M)}hn_M(z)}{(1-z)^d}$$

- تدعى الحدودية $hn_M(z)\in\mathbb{Z}[z]$ حدودية بسوط هلبرت المبسطة، وهي من الشكل $hn_M(z)=h_0+h_1z+\cdots+h_kz^k$.

- يدعى العدد $d = dim(M)$ بعد المودول M .
- يدعى العدد $hn_M(1) = mult(M)$ تعددية المودول M .

مبرهنة2.2:[8] ليكن I مثالياً في $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ عندئذ الجبر الأفيني $P/_I$ يحقق:

$$dim(P/_I) = Kdim(P/_I)$$

تمهيدية3.2: [8] لتكن $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و I مثالي فعلي في P ولتكن Y مجموعة جزئية من $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. إن القضايا الآتية صحيحة:

1) $dim(P/_I) = 0 \iff cdim(P/_I) = 0$

2) ليكن $J \subseteq I$ مثالي آخر من P عندئّذ إذا كانت Y مجموعة مستقلة بالمقاس I فإن Y مجموعة مستقلة بالمقاس J ولذلك يكون لدينا:

$$cdim\left(P/_J\right) \geq cdim(P/_I)$$

3) ليكن ^{n} مجموعة علاقات الترتيب على المتغيرات $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و σ علاقة ترتيب من $\mathbb{T}^n$ عندئذ إذا كانت Y مجموعة مستقلة بالمقاس $\mathrm{LT}_\sigma(I)$ فإنها مجموعة مستقلة بالمقاس I ويكون: $cdim(\mathrm{LT}_\sigma(I)) \leq cdim(P/_I)$

4) ليكن $i \geq 1$ عندئذ يتحقق:

المجموعة Y مجموعة مستقلة بالمقاس I **إذا وفقط إذا** كانت Y مجموعة مستقلة بالمقاس ^{i} . ويتحقق $cdim\left(P/_{I^i}\right) = cdim(P/_I) = cdim\left(P/_{\sqrt{I}}\right)$.

5) ليكن L مثالي فعلي آخر في P عندئذ يكون:

المجموعة Y مجموعة مستقلة بالمقاس $I \cap L$ **إذا وفقط إذا** كانت Y مجموعة مستقلة بالمقاس I أو مجموعة مستقلة بالمقاس J . و من ثمَّ يكون:

$$cdim\left(P/_{I \cap J}\right) = \max\{cdim(P/_I), cdim\left(P/_J\right)\}$$

تمهيدية 4.2: [8] ليكن I مثالي فعلي مولد بكثيرات حدود أحادية الحد من P عندئذ:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{Y\subseteq\{x_1,x_2,\dots,x_n\},\sqrt{I}\subseteq<Y>} <Y> \qquad (1$$

$$cdim(P/_I) = n - \min\{\#Y \ / \ I \subseteq< Y >\subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} \qquad (2$$

$$cdim(P/_I) = dim(P/_I) \qquad (3.$$

تمهيدية5.2: [8] ليكن I مثالي فعلي من $P = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ عندئذ:

$$dim(P/_I) = Kdim(P/_I) = cdim(P/_I)$$

مبرهنة6.2: كل بيان ملكة Q_n لرقعة شطرنج من المرتبة $n \times n$ يحقق $n\ (mod)\ 6$ يساوي 1 أو 5 يكون لونياً من المرتبة n وخوارزمية تلوين رؤوسه (i,j) هي $(j-2i)\ mod\ n$ حيث $i,j \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

3. النتائج.

1.3. استنتاجات حسابية على رقعة الشطرنج .

تعريف(1): لتكن لدينا الرقعة من المرتبة $n \times n$، نقول إنه لدينا رقعة جزئية من هذه الرقعة إذا كانت من المرتبة $a \times a$ حيث a عدد صحيح موجب يحقق أن $a \le n$.

تعريف(2): الغلاف هو عبارة عن مجموعة المربعات المحيطة بأي رقعة جزئية من الرقعة الأساسية من المرتبة $n \times n$. من التعريفين السابقين تكون رقعة الشطرنج من المرتبة $n \times n$ عبارة عن مجموعة أغلفة جميع الرقعات الجزئية للرقعة الأساسية من المرتبة $n \times n$ وعدد هذه الأغلفة m يحسب بالاعتماد على n كما يأتي:

1) إذا كان n زوجي فإن : $m = \frac{n}{2}$ غلاف

2) إذا كان n فردي فإن : $m = \frac{n+1}{2}$ غلاف

إن المربعات التي ترتبط بالملكة المتوضعة ضمن أي مربع من الرقعة هي المربعات الموجودة بالسطر نفسه وبالعمود نفسه وبالقطر الرئيسي نفسه وبالقطر الثانوي نفسه.

لنرمز بـ $(i\,,j)$ للمربع من الرقعة الواقع في السطر i وفي العمود j حيث:

$$i,j\epsilon\{1,2,\cdots,n\}$$

لنرمز بـ $n_1(i,j)$ لعدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بالمربع (i,j) والموجودة بالسطر نفسه باستثناء المربع (i,j) نفسه.

لنرمز بـ $n_2(i,j)$ لعدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بالمربع (i,j) والموجودة بالعمود نفسه باستثناء المربع (i,j) نفسه.

لنرمز بـ $n_3(i,j)$ لعدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بالمربع (i,j) والموجودة بالقطر الرئيس نفسه باستثناء المربع (i,j) نفسه.

لنرمز بـ $n_4(i,j)$ لعدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بالمربع (i,j) والموجودة بالقطر الثانوي نفسه باستثناء المربع (i,j) نفسه.

لنرمز بـ $k(i,j)$ لعدد جميع المربعات من رقعة الشطرنج المرتبطة بالملكة المتوضعة بالمربع (i,j) باستثناء المربع (i,j) نفسه واستناداً لما سبق يكون لدينا:

$$k(i,j) = n_1(i,j) + n_2(i,j) + n_3(i,j) + n_4(i,j)$$

مبرهنة$(\mathbf{1})$: إن عدد المربعات $k(i,j)$ المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن غلاف ما ستكون متساوية حيث $i,j\epsilon\{1,2,\cdots,n\}$.

الإثبات: لنأخذ الغلاف الخارجي لرقعة الشطرنج المؤلف من السطر العلوي والسطر السفلي والعمود الأيمن والعمود الأيسر ولنبدأ بالسطر العلوي ولنبرهن أن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع من هذا السطر متساوية كما يلي:

$$n_1(1,1) = n-1 \quad , \quad n_2(1,1) = n-1$$
$$n_3(1,1) = n-1 \quad , \quad n_4(1,1) = 0$$
$$\Longrightarrow k(1,1) = n-1+n-1+n-1+0 = 3n-3$$

$$n_1(1,2) = n-1 \quad , \quad n_2(1,2) = n-1$$
$$n_3(1,2) = n-2 \quad , \quad n_4(1,2) = 1$$
$$\Longrightarrow k(1,2) = n-1+n-1+n-2+1 = 3n-3$$

$$n_1(1,3) = n-1 \quad , \quad n_2(1,3) = n-1$$
$$n_3(1,3) = n-3 \quad , \quad n_4(1,3) = 2$$
$$\Longrightarrow k(1,3) = n-1+n-1+n-3+2 = 3n-3$$

وهكذا حتى نصل إلى:

$$n_1(1,n) = n-1 \quad , \quad n_2(1,n) = n-1$$

$$n_3(1,n) = 0 \quad , \ n_4(1,n) = n-1$$
$$\Longrightarrow k(1,n) = n-1+n-1+0+n-1 = 3n-3$$

ومنه نجد أن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع من السطر العلوي متساوية، وتساوي $3n-3$.

وبالنسبة للعمود الأيسر يعامل معاملة السطر العلوي بتدوير الرقعة بزاوية 90° لليمين وبالنسبة للسطر السفلي يعامل معاملة السطر العلوي بتدوير الرقعة 180° لليمين وبالنسبة للعمود الأيمن يعامل معامل السطر العلوي بتدوير الرقعة بزاوية 90° لليسار . مما سبق نستنتج أن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع من الغلاف الخارجي متساوية وتساوي $3n-3$. وبالنسبة لباقي الأغلفة يتم برهانها بالطريقة نفسها.

ملاحظة: سنعتبر رقم الغلاف الخارجي 0 ورقم الغلاف الذي يليه إلى الداخل 1 وهكذا حتى نصل الى الغلاف الأخير الذي رقمه $p = m-1$ حيث m عدد أغلفة الرقعة أي أن ترقيم الأغلفة يتم من الخارج إلى الداخل.

مبرهنة(2): إن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن أي غلاف يزيد بـ 2 على عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن الغلاف الذي يسبقه إلى الخارج.

الإثبات: لدينا المربع (1,1) ينتمي للغلاف الخارجي(0) والمربع (2,2) ينتمي للغلاف الذي يليه إلى الداخل الذي رقمه 1 وهكذا حتى المربع (m,m) الذي ينتمي إلى الغلاف الأخير الذي رقمه $m-1$ إلى الداخل ونلحظ أنه دائماً في المربع (i,i) والمربع الذي قبله $(i-1,i-1)$ لأجل أي $i \in \{2,3,\cdots m\}$ يتحقق لدينا:

$$n_1(i,i) = n_1(i-1,i-1) = n-1$$
$$n_2(i,i) = n_2(i-1,i-1) = n-1$$
$$n_3(i,i) = n_3(i-1,i-1) = n-1$$
$$n_4(i,i) = n_4(i-1,i-1) + 2$$

وبجمع الطرف الأول من العلاقات والطرف الثاني منها يكون:

$$k(i,i) = k(i-1,i-1) + 2$$

ومنه يمكننا القول إن عدد المربعات المرتبطة بالمربع (i,i) يزيد بـ 2 على عدد المربعات المرتبطة بالمربع $(i-1,i-1)$ الموجود ضمن الغلاف الذي يسبق الغلاف الذي ينتمي إليه المربع (i,i) .

وبما أن $k(i,i)$ يساوي $k(a,b)$ وذلك لأجل أي مربع (a,b) موجود ضمن الغلاف نفسه الموجود به المربع (i,i) حسب المبرهنة(1).

وبما أن $k(i-1,i-1)$ يساوي $k(c,d)$ وذلك لأجل أي مربع (c,d) موجود ضمن الغلاف نفسه الموجود به المربع $(i-1,i-1)$ حسب المبرهنة (1).

يمكننا القول إن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن أي غلاف يزيد بـ 2 على عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن الغلاف الذي يسبقه.

مبرهنة(3): إن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع (i,j) من الرقعة يساوي:

$$k(i,j)=3n-3+2p(i,j)$$

حيث (i,j) المربع و n عدد أسطر أو أعمدة الرقعة و $p(i,j)$ رقم الغلاف الذي ينتمي إليه المربع (i,j) حيث $p(i,j)\in\{0,1,\cdots,m-1\}$.

الإثبات:

سنبرهن ذلك بالاستقراء الرياضي على p .

من أجل $p(i,j)=0$ أي لأجل أي مربع موجود ضمن الغلاف الخارجي فعلاً تم الإثبات في المبرهنة(1) أن عدد المربعات يساوي $3n-3$ ومنه العلاقة صحيحة من أجل الغلاف الخارجي.

لنفرض صحة العلاقة من أجل $p(i,j)=m-1$ أي لأجل أي مربع (i,j) موجود ضمن الغلاف الذي رقمه$m-1$ يتحقق لدينا أن $k(i,j)=3n-3+2(m-1)$

ولنبرهن صحتها من أجل $p(i',j')=m$ أي لأجل أي مربع (i',j') موجود ضمن الغلاف الذي رقمه m يجب أن نبرهن أن

$$k(i',j') = 3n - 3 + 2m$$

لدينا استناداً **للمبرهنة** (**2**) أن عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن أي غلاف يزيد بـ 2 على عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة بأي مربع ضمن الغلاف الذي يسبقه وعليه يكون:

$$\begin{aligned} k(i',j') &= k(i,j) + 2 = 3n - 3 + 2(m-1) + 2 \\ &= 3n - 3 + 2m - 2 + 2 \\ &= 3n - 3 + 2m \end{aligned}$$

ومنه العلاقة صحيحة.

نتيجة(**1**): بما أننا نستطيع تحديد عدد المربعات $k(i,j)$ المرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن أي مربع (i,j) حيث $i,j\epsilon\{1,2,\cdots,n\}$ نستطيع تحديدعدد المربعات $k'(i,j)$ غيرالمرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن المربع(i,j) حيث أن:

$$k(i,j) + k'(i,j) = n^2 - 1$$

مثال تطبيقي(**1**): لتكن لدينا رقعة الشطرنج من المرتبة 10×10 عندئذ يكون لدينا:

1) عدد أغلفة هذه الرقعة $\quad m = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$

2) يوجد لدينا 5 أغلفة مرقمة بالشكل 0,1,2,3,4 واستناداً إلى المبرهنة (1) يكون عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة في أي مربع ضمن غلاف ما متساوية وتساوي:

عدد المربعات المرتبطة ضمن أي مربع في الغلاف الذي رقمه 0 $= 3(10) - 3 + 2(0) = 27$ مربع

عدد المربعات المرتبطة ضمن أي مربع في الغلاف الذي رقمه 1 $= 3(10) - 3 + 2(1) = 29$ مربع

عدد المربعات المرتبطة ضمن أي مربع في الغلاف الذي رقمه 2 $= 3(10) - 3 + 2(2) = 31$ مربع

عدد المربعات المرتبطة ضمن أي مربع في الغلاف الذي رقمه 3 $= 3(10) - 3 + 2(6) = 33$ مربع

$$\underset{\text{أي مربع في الغلاف الذي رقمه 4}}{\overset{\text{عدد المربعات المرتبطة ضمن}}{}} = 3(10) - 3 + 2(4) = 35 \quad \text{مربع}$$

3) لنأخذ المربع (3,5) مثلاً الذي ينتمي للغلاف الذي رقمه 2 عندئذ استناداً للمبرهنة (3) يكون عدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن هذا المربع تساوي:

$$k(3,5) = 3(10) - 3 + 2(2) = 31 \text{ مربع}$$

4) استناداً للنتيجة(1) يكون عدد المربعات غير المرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن المربع (3,5) تساوي:

$$k'(3,5) = (10)^2 - 1 - k(3,5) = 100 - 1 - 31 = 68 \quad \text{مربع}$$

البرنامج(1): هذا البرنامج بلغة *code Blocks* يقوم بإيجاد مربعات رقعة من المرتبة $n \times n$ وعدد المربعات المرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن أي مربع (i,j)، حيث n عدد طبيعي مدخل يحقق $n \geq 4$ كما يلي:

```
#include < iostream >
using namespace std;
int main( )
{int n ;
do{cout "n = ";  cin >> n ;}
while( n < 4);
int m = 3 * n - 3;
for(int i = 0 ; i < n ; i + +)
 {cout << "Squares That Connecting With" << m
                << "Squares Are:\n"
 for(int j = i ; j < n ; j + +)
cout << "(" << i + 1 << "," << j + 1 << ")" << "  " ;
 for(int j = i + 1 ; j < n ; j + +)
      if(i! = j)   cout << "(" << j + 1 << "," << i + 1 << ")" << "  " ;
 for(int j = i + 1 ; j < n ; j + +)
                         cout << "(" << n << "," << j + 1 << ")" << "  " ;
 for(int j = i + 1 ; j < n - 1 ; j + +)
```

$if(j! = n) \quad cout \ll "(" \ll j+1 \ll "," \ll n \ll ")" \ll " \ " ;$
$m = m + 2; n = n - 1; \ \}$
$return\, 0 ; \quad \}$

<u>2.3. عرض المسألة $n - Queen\ Problem$ والخطوات المتبعة لحلها جبرياً:</u>

<u>1.2.3. نص المسألة:</u>

تنص هذه المسألة على إيجاد عدد الملكات من جهة وعدد طرق توضع هذه الملكات على رقعة الشطرنج من المرتبة $n \times n$ بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى مع العلم أن المربعات التي ترتبط بالملكة المتوضعة ضمن أي مربع من الرقعة هي المربعات الموجودة بالسطر نفسه وبالعمود نفسه وبالقطر الرئيسي نفسه وبالقطر الثانوي نفسه.

<u>2.2.3. الخطوات التي تم اتباعها لحل هذه المسألة:</u>

الخطوة(1): سنتعامل مع الرقعة من المرتبة $n \times n$ على أنها حلقة كثيرات حدود من الشكل $\mathbb{Z}/<2>[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}]$ معرفة على الحقل $\mathbb{Z}/<2>$ ومدرجة قياسية ومتغيراتها موزعة على الرقعة كما يلي:

x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	....	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nn}

الخطوة(2): سنربط حركة أي ملكة متوضعة بالمربع ذي المتغير x_{ij} مثلاً بأي مربع مرتبط بها ذي المتغير x_{lk} من الرقعة بجداء المتغيرين المقابلين لهذين المربعين أي بالشكل:

$x_{ij}x_{lk} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{المربع المقابل للمتغير } x_{ij} \text{ مرتبط بالمربع} \\ \text{المقابل للمتغير } x_{lk} \text{ وفق حركة الملكة} \end{cases}$

وهذه الجداءات عبارة عن كثيرات حدود متجانسة من الدرجة 2. مع الأخذ بعين الاعتبار أن عملية الضرب تبديلية ، فمثلاً عند المرور على المتغير x_{11} فإنه سوف يرتبط بالمتغير x_{15} مثلاً لأنه موجود بالسطر نفسه، فنعبر عن ذلك بالجداء $x_{11}x_{15}$، ولكن عند المرور على المتغير x_{15} نهمل الجداء $x_{15}x_{11}$ لأنه نفسه $x_{11}x_{15}$ الذي تم أخذه ضمن العناصر المرتبطة بـ x_{11}.

نوجد جميع الجداءات للمتغيرات(كثيرات الحدود) على الرقعة كما في الخطوة السابقة التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مرتبطين مع بعضهما وفق حركة الملكة(السطر نفسه، والعمود نفسه، والقطر الرئيسي نفسه، والقطر الثانوي نفسه).

ليكن $_{ij}$ متغير من الرقعة التي مرتبتها $n \times n$ حيث $i,j \in \{1,2,\dots\dots n\}$ عندئذ فإن المتغيرات من هذه الرقعة التي ترتبط مع المتغير x_{ij} وفق حركة الملكة هي المتغيرات التي تحقق:

1– متغيرات موجودة بالسطر نفسه وهي من الشكل: x_{ik} حيث $k \in \{1,2,\dots\dots n\}$

2– متغيرات موجودة بالعمود نفسه وهي من الشكل: x_{lj} حيث $l \in \{1,2,\dots\dots n\}$

3– متغيرات موجودة بالقطر الرئيس نفسه لـ x_{ij} وهي من الشكل :

$$\dots\dots\dots, x_{i-1\,j-1}, x_{i+1\,j+1}, \dots\dots\dots$$

4– متغيرات موجودة بالقطر الثانوي نفسه لـ $_{ij}$ وهي المتغيرات من الشكل x_{mp} حيث:

$$m,p \in \{1,2,\dots\dots n\} \quad \text{و} \quad m+p=i+j$$

البرنامج(2): هذا البرنامج بلغة *code Blocks* يقوم بإدخال n عدد أسطر وأعمدة رقعة الشطرنج وإيجاد جميع الجداءات المختلفة للمتغيرات(كثيرات الحدود) التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مرتبطين مع بعضهما وفق حركة الملكة كما يأتي:

```
#include < iostream >
using namespace std;
int main( )
{ int n ;
```

```
do{cout << "n = "; cin >> n;}
while(n < 4);
for(int i = 0 ; i < n ; i++)
for(int j = 0 ; j < n ; j++)
                                        {for(int k = 0 ; k < n ; k++)
for(int l = j + 1 ; l < n ; l++)
if(i == k)
cout << "x" << i + 1 << j + 1 << "x" << k + 1 << l + 1 << endl ;
 for(int a = i + 1 ; a < n ; a++)
 for(int b = 0 ; b < n ; b++)
if(j == b)
cout << "x" << i + 1 << j + 1 << "x" << a + 1 << b + 1 << endl ;
int c = i + 1;
for(int d = j - 1 ; d >= 0 ; d--)
{
if(i + j = c + d&&i + j < n&&c + d < n)
cout << "x" << i + 1 << j + 1 << "x" << c + 1 << d + 1 << endl ;
c = c + 1;
} int m = i + 1 ;
int p = j + 1 ;
for(int s = 1 ; s < n ; s++)
{ if(m + s <= n&&p + s <= n )
cout << "x" << i + 1 << j + 1 << "x" << m + s << p + s << endl ;
}
return 0 ;}
```

الخطوة(3): بعد أن أوجدنا جميع كثيرات الحدود في الخطوة السابقة نوجد المثالي I المولد بجميع كثيرات الحدود السابقة ، أي بجميع الجداءات المختلفة للمتغيرات التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مرتبطين مع بعضهما وفق حركة الملكة على كامل الرقعة وسيكون هذا المثالي مولداً بكثيرات حدود أحادية الحد متجانسة من المرتبة 2.

الخطوة(4): لنأخذ الحقل $\mathbb{Z}/<2>$ ولتكن $P = \mathbb{Z}/<2>[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}]$ حلقة مدرجة قياسية حيث $n \geq 4$ وليكن $I \subseteq P$ المثالي المعرف بالخطوة السابقة عندئذ استناداً للتعريف(8) نجد أن $\left({}^{P}/_{I}\right)$ هو $\mathbb{Z}/<2>-$جبر أفيني ويكون

المثالي I هو المثالي المولد بجميع الجداءات المختلفة للمتغيرات التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مرتبطين مع بعضهما وفق حركة الملكة على كامل الرقعة ونميز الحالتين:

- **حالة(1)**: إذا كان تقاطع $\mathbb{Z}/< 2 > [Y]$ مع المثالي I لا يساوي المثالي الصفري $< 0 >$ فإنه يوجد في Y متغيران على الأقل مرتبطان ببعضهما وفق حركة الملكة، حيث Y أي مجموعة جزئية من مجموعة كل المتغيرات $[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}]$.
- **حالة(2)**: إذا كان تقاطع $\mathbb{Z}/< 2 > [Y]$ مع المثالي I يساوي المثالي الصفري $< 0 >$ فإنه لا يوجد في Y أي متغيرين مرتبطين ببعضهما وفق حركة الملكة لأنه لوكان ذلك لكان التقاطع يساوي جداء المتغيرين وذلك لأن I يمثل جميع الجداءات لأي متغيرين مرتبطين مع بعضهما وفق حركة الملكة.

ومن ثمَّ يكون لدينا أكبر مجموعة جزئية $Y \subset \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}\}$ تحقق:
$\mathbb{Z}/< 2 > [Y] \cap I =< 0 >$ تشكل مجموعة مستقلة عظمى بالمقاس I ويعبر عدد عناصرها عن العدد الأعظمي للمتغيرات غير المرتبطة ببعضها وفق حركة الملكة، وبما أن كل متغير مقابل لمربع مشغول بملكة فيكون عدد عناصر Y هو العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى.

ومن جهة أخرى حسب التعريف 11.1 العدد الأعظمي من العناصر للمجموعة Y المستقلة من المتغيرات بالمقاس I يدعى البعد التركيبي لـ $P/_I$ ويرمز له بالرمز $cdim(P/_I)$. وبما أن I مثالي مولد بكثيرات حدود أحادية الحد صحيح في P فإن:

$$cdim(P/_I) = dim(P/_I)$$

مما سبق نستنتج أن العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى يساوي $dim(P/_I)$ وتكون عناصر Y المجموعة العظمى المستقلة بالمقاس I تعبر عن توضع الملكات المقابلة لمربعات المتغيرات في Y.

نتيجة(2): إن العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة من المرتبة $n \times n$ بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى لن يتجاوز n . لأنه لو فرضنا جدلاً أن عددها $n+1$ فإنه ستتوضع ملكتين على الأقل في السطر نفسه أو في العمود نفسه مما يناقض عدم مهاجمة الملكات لبعضها.

نتيجة(3):إن عدد المجموعات المستقلة العظمى بالمقاس I هو نفسه عدد الطرق المختلفة لتوضع الملكات على الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى حيث إن كل مجموعة من هذه المجموعات تعبر عن طريقة مختلفة لتوضع الملكات المقابلة لمربعات المتغيرات.

نتيجة(4): استناداً للتعريف (14.1) و(15.1) يمكننا القول إن العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة الشطرنج من المرتبة $n \times n$ بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى هو نفسه لونية هذا البيان بمعنى آخر إذا كان Q_n هو بيان الملكة المقابل لرقعة شطرنج من المرتبة $n \times n$ حيث $n > 4$ فإنه يكون:

[Q_n لوني من المرتبة n] $\Longleftarrow$ [العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة الشطرنج من المرتبة $n \times n$ بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى هو n]

واستناداً للمبرهنة (6.2) فإن العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على أي رقعة من المرتبة $n \times n$ بحيث يتحقق أن $n \bmod 6$ يساوي 1 أو 5 هو n ملكة.

مثال تطبيقي(2): لنأخذ الرقعة من المرتبة 5×5 ولنوجد العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على هذه الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى كما يأتي:

طريقة(1): لدينا $5 = 5(mod\ 6)$ ومنه استناداً للمبرهنة (6.2) فإن بيان الملكة $_5$ لوني من المرتبة 5 وخوارزمية تلوينه بالألوان 0,1,2,3,4 كما يأتي:

$$
\begin{aligned}
(i,j) &= (0,0) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 0\ mod\ 5 = 0\\
(i,j) &= (0,1) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 1\ mod\ 5 = 1\\
(i,j) &= (0,2) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 2\ mod\ 5 = 2\\
(i,j) &= (0,3) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 3\ mod\ 5 = 3\\
(i,j) &= (0,4) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 4\ mod\ 5 = 4\\
(i,j) &= (1,0) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -2\ mod\ 5 = 3\\
(i,j) &= (1,1) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -1\ mod\ 5 = 4\\
(i,j) &= (1,2) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 0\ mod\ 5 = 0\\
(i,j) &= (1,3) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 1\ mod\ 5 = 1\\
(i,j) &= (1,4) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 2\ mod\ 5 = 2\\
(i,j) &= (2,0) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -4\ mod\ 5 = 1\\
(i,j) &= (2,1) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -3\ mod\ 5 = 2\\
(i,j) &= (2,2) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -2\ mod\ 5 = 3\\
(i,j) &= (2,3) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -1\ mod\ 5 = 4\\
(i,j) &= (2,4) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = 0\ mod\ 5 = 0\\
(i,j) &= (3,0) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -6\ mod\ 5 = 4\\
(i,j) &= (3,1) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -5\ mod\ 5 = 0\\
(i,j) &= (3,2) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -4\ mod\ 5 = 1\\
(i,j) &= (3,3) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -3\ mod\ 5 = 2\\
(i,j) &= (3,4) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -2\ mod\ 5 = 3\\
(i,j) &= (4,0) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -8\ mod\ 5 = 2\\
(i,j) &= (4,1) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -7\ mod\ 5 = 3\\
(i,j) &= (4,2) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -6\ mod\ 5 = 4\\
(i,j) &= (4,3) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -5\ mod\ 5 = 0\\
(i,j) &= (4,4) &\Longrightarrow\quad & (j-2i)\ mod\ 5 = -4\ mod\ 5 = 1
\end{aligned}
$$

والرقعة التالية تبين تلوين بيان الملكة $_5$ باستخدام هذه الخوارزمية كما يأتي:

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

واستناداً للنتيجة (3) وبما أن Q_5 لوني من المرتبة 5 يكون لدينا العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة الشطرنج من المرتبة 5×5 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى هو 5 ملكات.

الآن لنأخذ الحقل $\mathbb{Z}/<2>$ ولتكن $P = \mathbb{Z}/<2>[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{55}]$ حلقة مدرجة قياسية وليكن $I \subseteq P$ المثالي المولد بجميع الجداءات على الرقعة التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مع بعضهما وفق حركة الملكة والذي يتم حساب عناصره استناداً للبرنامج(2).

طريقة(**2**): باستخدام برنامج SINGULAR[1] نجد أن متسلسلة هلبرت للحلقة $P/_I$ هي:

$$HS_{P/_I}(z) = \frac{\begin{gathered}1 - 160z^2 + 1584z^3 - 6936z^4 + 9992z^5 + 57060z^6 \\ -441560z^7 + 1668789z^8 - 4377296z^9 + 8728752z^{10} \\ -13746880z^{11} + 17403240z^{12} - 17814096z^{13} + \\ 14679704z^{14} - 9565968z^{15} + 4710955z^{16} - 1532160z^{17} \\ +118864z^{18} + 214224z^{19} - 157168z^{20} + 63240z^{21} - \\ 16860z^{22} + 2984z^{23} - 321z^{24} + 16z^{25}\end{gathered}}{(1-z)^{25}}$$

إن بسط هذه المتسلسلة ما هو إلا حدودية بسوط هلبرت $HN_{P/_I}(Z)$.

وباختزال البسط والمقام على $(1 - Z)$ قدر الإمكان تصبح متسلسلة هلبرت بالشكل:

[1] هو نظام جبر الكمبيوتر يستخدم للحساب في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية.

$$HS_{P/_I}(z) = \frac{1 + 20z + 50z^2 - 76z^3 - z^4 + 16z^5}{(1 - z)^5}$$

بحيث أن حدودية بسوط هلبرت المبسطة هي:

$$hn_{P/_I}(Z) = 1 + 20z + 50z^2 - 76z^3 - z^4 + 16z^5$$

وبحسب المبرهنة(1.2) نجد أن $dim(P/_I) = 5$ وبحسب الخطوة(4) يكون:

العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة من المرتبة 5×5 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى $= dim(P/_I) = 5$ ملكات

طريقة(3): استناداً للخطوة (4) والتمهيدية (4.2) وباستخدام برنامج SINGULAR

يكون $cdim(P/_I) =$ العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة من المرتبة 5×5 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى

$= dim(P/_I) = 5$ ملكات

مثال تطبيقي(3): لنأخذ الرقعة من المرتبة 11×11 ولنوجد العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على هذه الرقعة بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى كما يأتي:

طريقة(1): لدينا $11(mod\ 6) = 5$ ومنه استناداً للمبرهنة (6) فإن بيان الملكة $_{11}$ لوني من المرتبة 11 وخوارزمية تلوينه بالألوان 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 وبشكل مشابه للمثال التطبيقي (2) السابق يكون:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6
5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4
3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7
6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5
4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3
2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1

واستناداً للنتيجة (3) وبما أن Q_{11} لوني من المرتبة 11 يكون لدينا العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة الشطرنج من المرتبة 11×11 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى هو 11 ملكة.

الآن لنأخذ الحقل $\mathbb{Z}/<2>$ ولتكن $P = \mathbb{Z}/<2>[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1111}]$ حلقة مدرجة قياسية وليكن $I \subseteq P$ المثالي المولد بجميع الجداءات على الرقعة التي تعبر عن ارتباط أي مربعين مع بعضهما وفق حركة الملكة .

طريقة(2):

باستخدام برنامج SINGULAR وبالعملية نفسها في الطريقة(2) من المثال السابق بإيجاد متسلسلة هلبرت نجد أن $dim(P/_I) = 11$ وبحسب الخطوة(4) يكون:

العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة من المرتبة 11×11 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى $= dim(P/_I) = 11$ ملكة

طريقة(3): استناداً للخطوة(4) والتمهيدية (4.1) وباستخدام برنامج SINGULAR يكون

العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة من المرتبة 11×11 بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى $= cdim(P/_I)$

$= dim(P/_I) = 11$ ملكة

النظرة المستقبلية

في هذه الورقة العلمية تم مناقشة مسألة مفتوحة وإيجاد عدد المربعات المرتبطة وغير المرتبطة بالملكة المتوضعة ضمن أي مربع وفق حركة الملكة، كما تمكنَّا جبرياً من إيجاد العدد الأعظمي للملكات الممكن توضعها على رقعة الشطرنج بحيث لا تهاجم أي منها الملكات الأخرى، وستكون وجهتنا المستقبلية هي إيجاد عدد طرق توضع الملكات على رقعة الشطرنج جبرياً.

المراجع العلمية

[1] علي، علي. (1983). *مقدمة في نظرية البيانات*. الموصل.

[2] Bitnar J. R., & Reingold E. M. (1975). Backtracking programming techniques. *Communications of the ACM*. 18(11). 56-651.

[3] Božikovic M., Golub M., & Budin L. (2003). Solving n-Queen problem using global parallel genetic algorithm. *EUROCON 2003 Ljubljana*, Slovenia.

[4] Dealy S. (2004). *Common Search Strategies and Heuristics With Respect to the N-Queens Problem*.

[5] Gert-Martin G., & Gerhard P. (2007, July). *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Berlin.

[6] Hu N. (2016). An Integer Coding Based Optimization Model for Queen Problems. *American Journal of Computational Mathematics*, 32-36.

[7] Kreuzer M., & Robbiano, L. (2000).*Computional Commutative Algebra 1*. Berlin.

[8] KreuzerM., & RobbianoL. (2005).*Computional Commutative Algebra 2*. Dortmund and Genova.

[9] Purdom P. W., & Brown C. A. (1983). An analysis of backtracking with search rearrangement. *SIAM Journal of Computing*, 12(4), 33-717.

[10] Rivin I., & Zabih R. (1992, April). A dynamic programming solution to the n-queens problem. *Information Processing Letters 41*, 253-256.

[11] Shonkwiler, R., & Ghannadian, F. (1993). *Parallel Simulated Annealing for the n-Queen Problem*, 690-694.

[12] Soleimanian F., Seyyedi F., & Golriz Feyzipour. (2014, September). A New Solution for N-Queens Problem using Blind Approaches: DFS and BFS Algorithms. *International Journal of Computer Applications (0975 – 8887)*, 53(1), 45-48.

[13] Vasquez M. & Habet, D. Complete and Incomplete Algorithm for the Queen Graph Coloring Problem (2004).

[14] N-Queens Counting Challenge (2007).
http://www.etsi.org/plugtests/Upcoming/GRID2007/GRID2007.htm

[15] http://www.singular.uni-kl.de/ .