بناء المصفوفات الجامدة في فضاء الإسقاط باستخدام نظرية الحذف

بشرى جادالله* **د. شوقي الراشد****

الملخص

من أجل المصفوفة A نُعرِّف درجة صلابة المصفوفة أنَّها أصغر عدد من مدخلات المصفوفة نحتاج لتغيرها لتصبح رتبتها r على الأكثر.

في هذه الورقة ناقشنا التعميم لبناء مجموعة مصفوفات بدرجة صلابة محدَّدة وبعض الأفكار التي تمت دراستها حول ذلك في الفضاء الآفيني.

الكلمات المفتاحية: نظرية الحذف، فضاء الإسقاط، المصفوفات الجامدة.

* طالبة ماجستير – قسم الرياضيات– جامعة دمشق.

** أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة – عضو هيئة تدريسية في كلية العلوم–جامعة دمشق.

Construction of Rigid Matrices in Projective Space by using Elimination theory

Bushra Gadallal* **Dr. Shawki, M.Al- Rashed****

Abstract

The rigidity of a matrix A for target rank r is the minimum number of entries of A that must be changed to ensure that the rank of the altered matrix is at most r.

In this paper, we discuss generalization of structure a set of specific rigidity matrices and some ideas that have been studied around in the Affine case.

Key Words and Phrases: Elimination Theory, Projective space, Rigid Matrices

* MA student at Damascus University, Department of Mathematics

** Associated Professor at Arab International University, Academic Staff at Damascus University

1−مُقدِّمة:

منذ أن بدأ Valiant العمل بدوال الصلابة للمصفوفات وجد لها العديد من التطبيقات في
- circuit complexity.
- communication complexity.
- learning complexity.

تقريباً كل المصفوفات من البعد $n \times n$ فوق حقل غير منتهٍ تملك صلابة $(n - r)^2$.

ومن جهة أخرى فإنَّ نظرية الحذف تبحث في حذف مجموعة جزئية من المتغيرات من مجموعة معادلات كثيرات حدود معطاة وإيجاد المجموعة المخفَّضة من معادلات كثيرات الحدود (لاتتضمَّن المتغيرات المحذوفة).

أهم نتائج نظرية الحذف، وخصوصاً مبرهنة الإغلاق تصف علاقة دقيقة بين المثالي المخفَّض والمثالي المعطى والتفسير الهندسي المقابل له.

استخدم كل من Abhinav Kumar، Satyanarayana V. Lokam، Vijay M. Patankar وJayalal Sarma مبرهنة الإغلاق ومثالي الحذف للتحقق من بنية مجموعة مصفوفات ذات صلابة محدّدة وغلاقة زارسكي لها. (2014)

قمنا بتمديد بعض الأفكار التي تمت دراستها في هذا البحث إلى فضاء الإسقاط واستخدام مثالي الحذف الإسقاطي ومبرهنة التمديد الإسقاطي لمناقشة هيكل مجموعة مصفوفات ذات صلابة محددة والاعتماد على مبرهنة Valiant لتحديد عدد عناصرها في حالة خاصَّة.

أيضاً ولأجل مصفوفة عناصرها متغيرات ولأجل مواضع محددة فيها درسنا التخفيض للمثاليات المحدِّدة الإسقاطية.

2-تعاريف:

(2-1) رموز واصطلاحات:

- ليكن F حقلاً و $\overline{\mathrm{F}}$ الغلاقة الجبرية له، ولتكن $x_1, \dots, x_n$ هي n من المتغيرات المستقلة جبرياً فوق F عندئذٍ:

من أجل مجموعة جزئية معطاة S من $\overline{\mathrm{F}}^n$ غلاقة زارسكي لـ Sسنرمز لها $\overline{S}$ هي أصغر متنوعة لـ $\overline{\mathrm{F}}^n$ تحوي S ، بعبارة اخرى:

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}))$$

- رتبة مصفوفة هي عدد الأسطر غير الصفرية في المصفوفة المدرجة المكافئة.
- سنستخدم الرموز الآتية:

- $M_n(F)$ مجموعة المصفوفات المربعة من البعد n على الحقل F.
- $M_{m\times n}(F)$ مجموعة المصفوفات من البعد $m \times n$ على الحقل F.
- $supp(A)$ دعامة مصفوفة A هي المواضع غير الصفرية في هذه المصفوفة من أجل عناصر من الحقل F.
- $S(K)$ من أجل K عدد صحيح معطى هي مجموعة المصفوفات التي قدرة دعامتها أصغر أو تساوي K.
- النمط π هو مجموعة جزئية من المواضع لمصفوفة مربعة.
- $S(\pi)$ مجموعة المصفوفات A التي دعامتها جزء من π أي $SUPP(A) \subseteq \pi$
- ومنه نحصل على المساواة $S(K) = \bigcup_{|\pi|=k} S(\pi)$

(2-2) تعريف:[3]

من أجل المصفوفة A تُعرَّف درجة صلابة المصفوفة أًنها أصغر عدد من مدخلات المصفوفة نحتاج لتغيرها لتصبح رتبتها r على الأكثر، أي:

$$R_A(r) = \min\{|T| : rank(A+T) \leq r\}$$

حيث $|T|$ ترمز إلى عدد المدخلات غير الصفرية للمصفوفة T.

(يسمح في بعض الأحيان اختيار المصفوفة T من $M_n(L)$ حيث L حقل تمديد للحقل F)

في هذه الحالة نرمز لدالة الصلابة بالشكل $R_A(r,L)$.

- سنرمز بـ $RIG(n,r,K)$ لمجموعة المصفوفات A المربعة ذات الصلابة K.
- وبالمثل $RIG(n,r,\geq K)$ مجموعة المصفوفات A ذات الصلابة K على الأقل.
- وبالمثل $RIG(n,r,\leq K)$ مجموعة المصفوفات ذات الصلابة K على الأكثر.
- ومن أجل النمط π من الحجم K سنرمز $RIG(n,r,\pi)$ لمجموعة المصفوفات A بحيث من أجل بعض العناصر $T_\pi \in S(\pi)$ لدينا الرتبة $(A+T_\pi) \leq r$
  ومنه نحصل على المساواة:

$$\mathrm{RIG}(\mathrm{n},\mathrm{r},\leq \mathrm{K}) = \bigcup_{\pi,|\pi|=k} \mathrm{RIG}(\mathrm{n},\mathrm{r},\pi)$$

3–استخدام نظرية الحذف:

لتكن A مصفوفة مربعة من البعد n عناصرها المتغيرات $x_1,\dots,x_{n^2}$ لأجل النمط π من المواضع k ولتكن T_π مصفوفة مربعة من البعد n عناصرها المتغيرات $t_1,\dots,t_k$ في المواضع المعطاة وفق π .

القول بأنَّ المصفوفة $A+T_\pi$ تملك رتبة r على الأكثر يعادل القول بأنَّ كل مصغرات المصفوفة لها من البعد $(r+1)(r+1)$ تنعدم.

(3-1) تعريف:[1][2]

إذا كان $I \subset F[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ مثالياً عندئذٍ من أجل أعداد صحيحة e كبيرة كفاية لدينا

$$\hat{I} = (I:<x_0^e,\dots,x_n^e>) \cap K[y_1,\dots,y_m])$$

هو مثالي الحذف الإسقاطي للمثالي I حيث:

$f \in (I:<x_0^e,\dots,x_n^e>) \Rightarrow x_i^e f \in I$ لأجل جميع $0 \leq i \leq n$.

(3-2) مبرهنة (مبرهنة التمديد الإسقاطية) :[1]:

نفرض K حقلاً مغلقاً جبرياً و $V = V(F_1, \dots, F_s) \in \mathbb{P}^n \times K^m$ معرَّفة بكثيرات الحدود المتجانسة بالنسبة لـِ $(x_0, \dots, x_n)$ في $K[x_0, \dots, x_n, y_1, \dots y_m]$.

ليكن $I = (F_1, \dots, F_s)$ وليكن $\hat{I} \subset K[y_1, \dots, y_m]$ مثالي الحذف الإسقاطي لـِ I

إذا كان $\pi: \mathbb{P}^n \times K^m \to K^m$

الإسقاط على ال m مسقط الأخيرة عندها:

$$\pi(V) = V(\hat{I})$$

(3-3) الحالة الإسقاطية:

سنعدُّ المثالي I موَّلداً بمصغَّرات المصفوفة $A + T_\pi$:

$$I(n, r, \pi) = < minors_{(r+1)(r+1)}(A + T_\pi) > \subseteq F[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]$$

سنأخذ تطبيق الإسقاط:

$$\pi: \mathbb{P}^k \times K^{n^2} \longrightarrow K^{n^2}$$
$$V(I(n, r, \pi)) \longmapsto \Omega(n, r, \pi)$$

حسب مبرهنة التمديد الإسقاطية:

$$\pi\Big(V\big(I(n, r, \pi)\big)\Big) = V\big(\hat{I}(n, r, \pi)\big)$$

ومن ثمَّ نحصل على النتيجة الآتية:

$$\Omega(n, r, \pi) = V(\hat{I}(n, r, \pi))$$

ونحصل أيضاً على: $\Omega(n, r, \leq K) = \bigcup_{\pi, |\pi| = k} \Omega(n, r, \pi)$

(3-4) مبرهنة $Valiant$:

(3-4-1) الحالة الآفينية :[4]

في الحالة الآفينية تم إثبات أنَّه لأجل:

$$n \geq 1, 0 < r < n \ \ and\ \ 0 \leq k < (n - r)^2$$

ولأجل:

$$W = W(n, r, \leq k) = \bigcup_{\pi, |\pi| = k} W(n, r, \pi)$$

حيث: $W(n, r, \leq k) = \overline{RIG(\mathrm{n, r, \leq k}, \overline{\mathrm{F}})}$ غلاقة زارسكي

$W(n,r,\pi)=\overline{RIG(n,r,\pi,\overline{F})}$ غلاقة زارسكي

ويتحقَّق أنَّ: $\dim(\Omega)<n^2$

وهذا يفيد بتحديد بعد المتنوعة W.

(3-4-2) الحالة الإسقاطية:

في فضاء الإسقاط نفرض أنَّ I^h هو التجانس لـ I عندها

$$\Omega(n,r,\pi)=V\left(\widehat{I^h}(n,r,\pi)\right)=V\big(I_n(n,r,\pi)\big)(4-6)=W(n,r,\pi)$$

$$\overline{RIG\big(\mathrm{n},\mathrm{r},\leq\mathrm{k},\overline{\mathrm{F}}\big)}=\Omega(n,r,\leq K)$$

$$\dim(\Omega(n,r,\leq k))<n^2$$

و من ثمَّ استطعنا تحديد عدد عناصر المجموعة $\Omega(n,r,\leq k)$ في فضاء الإسقاط .

4- التخفيض للمثاليات المحدِّدة :

لتكن A مصفوفة مربعة من البعد $n\times n$ مدخلاتها هي المتغيرات $x_1,\dots,x_{n^2}$.

(المقصود $x_{11},x_{12},\dots,x_{1n},x_{21},\dots,x_{nn}$)

-من أجل النمط π من المواضع K (أي حجم النمط عدد عناصره K) لتكن T_πمصفوفة مربعة من البعد $n\times n$ عناصرها المتغيرات $t_1,\dots,t_k$ في المواضع المعطاة وفق π.

لدينا $A\in M_n(F)$ ، T_π مختارة وفق π ويسمح في بعض الأحيان أن تكون $T_\pi\in M_n(L)$ حيث L حقل التمديد لِ F.

لتكن لدينا: $x=\{x_1,x_2,\dots,x_{n^2}\}=x_\pi\cup x_{\overline{\pi}}$

حيث إنَّ x_π هي مجموعة متغيرات يتم فهرستها من قبل π

و $x_{\overline{\pi}}$ هي مجموعة المتغيرات المتبقية.

ليكن:

$$J=I(n,r,\pi)=<Minors_{(r+1)(r+1)}(A+T_\pi)>$$

المثالي في $\mathbb{Q}[x,t]=\mathbb{Q}[x_\pi,x_{\overline{\pi}},t_\pi]$ المولَّد بمصغرات المصفوفة $A+T_\pi$ من البعد $(r+1)\times(\mathrm{r}+1)$ وليكن:

$$J_1 = J \cap \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\bar{\pi}}] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]$$
$$J_2 = J_1 \cap \mathbb{Q}[x_{\bar{\pi}}]$$
$$I_{r+1} =< Minors_{(r+1)(r+1)}(A) > \subseteq \mathbb{Q}[x]$$
$$E\ I_{r+1} = I_{r+1} \cap \mathbb{Q}[x_{\bar{\pi}}] \subseteq \mathbb{Q}[x_{\bar{\pi}}]$$

وطالما أنَّ J_1 هو مثالي الحذف للمثالي J بحذف المتغيرات t_π فإنَّ مصفوفة A تتوضَّع في

$W(n,r,\pi) = \overline{RIG(n,r,\pi,\bar{F})}$ إذا وفقط إذا توضعت مدخلاتها في المتنوعة المعرَّفة بمثالي الحذف J_1 .

أيضا EI_{r+1} هو مثالي مولَّد بمصغرات المصفوفة A من البعد$(r+1) \times (r+1)$

و EI_{r+1} هو مثالي الحذف له لأجل حلقة كثيرات الحدود فوق الأعداد العادية المعرّفة بالمتغيرات $x_{\bar{\pi}}$.

(4-1) قضية:

(4-1-1) الحالة الآفينية: [4]

$J_1 = J_2\mathbb{Q}[x]$ (المثالي المولَّد بـ J_2 في $\mathbb{Q}[x]$) و $J_2 = EI_{r+1}$

بحالة خاصَّة :

$$EI(n,r,\pi) = EI_{r+1}\mathbb{Q}[x]$$

الإثبات:

بدايةً نلحظ أنَّه في مصغرات المصفوفة $A + T_\pi$ من البعد $(r+1) \times (r+1)$ المتغيِّر $t_{i,j}$ لأجل $(i,j) \in \pi$ دائماً يظهر في المجموع التوفيقي مع $x_{i,j}$ بالشكل $t_{i,j} + x_{i,j}$، لذلك فإنَّ حذف المتغيرات t_π سيؤدي تلقائياً إلى حذف المتغيرات x_π وإعطاء المساواة لمولدات المثاليات J_1و J_2 أيضاً $J_1 = J_2\mathbb{Q}[x]$

نعدُّ φ تشاكلاً تقابلياً لِ $\mathbb{Q}[x_\pi, x_{\bar{\pi}}, t_\pi]$ معرَّف بالشكل:

$$\varphi: \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\bar{\pi}}, t_\pi] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\bar{\pi}}, t_\pi]$$
$$\forall (i,j) \in \pi \qquad t_{i,j} \longmapsto x_{i,j} + t_{i,j}$$
$$\forall (i,j) \qquad x_{i,j} \longmapsto x_{i,j}$$

المثالي: $J_1 = J \cap \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\overline{\pi}}] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]$ يجب أن يساوي المثالي :

$$\varphi(\varphi^{-1}(J) \cap \varphi^{-1}(Q[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}])$$

طالما أنَّ φ هو تماثل.

ولكنَّ $\varphi^{-1}(J)$ مولَّد بمصغرات المصفوفات التي تحوي فقط المتغيرات T_π و $x_{\overline{\pi}}$

في حين أنَّ $\varphi^{-1}(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]) = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]$

لهذا السبب فإنَّ:

$\varphi^{-1}(J) \cap \varphi^{-1}(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]$ مولَّد فقط بكثيرات الحدود التي تحوي المتغيرات $x_{\overline{\pi}}$ ولذا فإنَّ:

$$\varphi^{-1}(J_1) = \varphi^{-1}(J) \cap \varphi^{-1}(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}] = J_2\mathbb{Q}[x]$$

وبأخذ الصورة وفق φ نجد:

$$J_1 = J_2\mathbb{Q}[x]$$

المعادلة $J_2 = EI_{r+1}$ تنتج باعتبارات متماثلة بملاحظة أنَّ المتغيرات $x_{i,j}$ لأجل $(i,j) \in \pi$ تظهر دائما في المجموع التوفيقي $x_{i,j} + t_{i,j}$ في مصغرات المصفوفة التي تولِّد J، و من ثمَّ فإنَّ حذف هذه المتغيرات يؤدي إلى حذف $t_{i,j}$ كذلك.

نعدُّ التماثل المعرَّف بالشكل :

$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\psi: \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\overline{\pi}}, t_\pi] \longrightarrow \mathbb{Q}[x_\pi, x_{\overline{\pi}}, t_\pi]} \\ \forall (i,j) \in \pi & x_{i,j} \longmapsto x_{i,j} + t_{i,j} \\ \forall (i,j) \in \pi & t_{i,j} \longmapsto t_{i,j} \\ \forall (i,j) \notin \pi & x_{i,j} \longmapsto x_{i,j} \end{array}$$

ثم مرة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} J_2 = J_1 \cap \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}] = J \cap \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}] &= \psi(\psi^{-1}(J) \cap \psi^{-1}(\mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}]) \\ &= \varphi(I_{r+1}\mathbb{Q}[x, t_\pi] \cap \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}]) \\ &= \varphi(EI_{r+1}) = EI_{r+1} \subset \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}] \end{aligned}$$

لدينا مثالي الحذف EI_{r+1} هو مثالي أوَّلي فهو جذري أيضاً $J_2 = EI_{r+1}$ ومنه J_2 مثالي أوَّلي فهو جذري.

(4-1-2) الحالة الإسقاطية:

لتكن لدينا المصفوفة: $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{pmatrix}$ فإنَّ مصغَّرات A من المرتبة 2×2 هي:

$$m_1=\begin{vmatrix} a_5 & a_6\\ a_8 & a_9\end{vmatrix}=f_1,\ m_2=\begin{vmatrix} a_4 & a_6\\ a_7 & a_9\end{vmatrix}=f_2, m_3=\begin{vmatrix} a_4 & a_5\\ a_7 & a_8\end{vmatrix}=f_3$$
$$m_4=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ a_8 & a_9\end{vmatrix}=f_4,\ m_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_7 & a_9\end{vmatrix}=f_5,\ m_6=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ a_7 & a_8\end{vmatrix}=f_6$$
$$m_7=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ a_5 & a_6\end{vmatrix}=f_7,\ m_8=\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_4 & a_6\end{vmatrix}=f_8,\ m_9=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ a_4 & a_5\end{vmatrix}=f_9$$

إذا كانت رتبة A هي $full\ rank$ فإنَّ $rank\ A=3$ عندها فإنَّ التجانس لـِ A هو المصفوفة:

$$A^h=\begin{pmatrix} x_{00} & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & (A) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$$A^h=\begin{pmatrix} x_{00} & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_7 & a_8 & a_9\end{pmatrix} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$$|A^h|=\begin{vmatrix} x_{00} & 0\\ 0 & A\end{vmatrix}=x_{00}.|A|$$

حيث $|A|\neq 0$.

إذا كانت رتبة A هي 2 فإنَّ محدد A هو صفر وتكون مصغَّرات A من المرتبة 2 هي غير صفرية.

التجانس لـِ A هو المصفوفة A^h المعرّفة بالشكل:

$$A^h=\begin{pmatrix} x_{00} & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & (A) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$$|A^h|=\begin{vmatrix} x_{00} & 0\\ 0 & A\end{vmatrix}=x_{00}.|A|=0$$

مصغَّرات A^h من المرتبة 3×3 هي:

$$m_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = 0, m_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = 0, m_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_7 & a_9 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_4 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_7 & a_8 \end{vmatrix} = 0, m_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = 0$$

$$m_6 = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. f_1$$

$$m_7 = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_7 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. f_2$$

$$m_8 = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_7 & a_8 \end{vmatrix} = x_{00}. \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} = x_{00}. f_3$$

$$m_9 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = 0, m_{10} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. f_4$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_7 & a_9 \end{vmatrix} = x_{00}. f_5 , m_{12} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_7 & a_8 \end{vmatrix} = x_{00}. f_6$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0, m_{14} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = x_{00}. f_7$$

$$m_{15} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_6 \end{vmatrix} = x_{00}. f_8, m_{16} = \begin{vmatrix} x_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = x_{00}. f_9$$

أي إنَّ التجانس لِ A في هذه الحالة هو التجانس لمصغرات المصفوفة A ذات المرتبة 2×2.

وتعميم ذلك لأجل n إذا كانت A مصفوفة من المرتبة $n \times n$ عندها:

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

أيضاً إذا كانت A هي $full\ rank$ فإنَّ:

$$A^h=\begin{pmatrix} x_{00} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, |A^h|=x_{00}.|A| \quad , det\neq 0$$

إذا كانت رتبة A هي r فإنَّ جميع المصغَّرات من المرتبة $(r+1)\times(r+1)$ تنعدم.

ومن ثمَّ التجانس لِ A هو التجانس لمصغرات A من المرتبة $r\times r$.

(4-2) تعريف : [1]

كثير الحدود $F\in K[x_0,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ هو متجانس من الدرجة d في $x_0,\dots,x_n$ إذا تحقق :

$$F=\sum_{|\alpha|=d} x^{\alpha}\, h_{\alpha}(y_1,\dots,y_m)$$

حيث إنَّ $h_{\alpha}\in K[y_1,\dots,y_m]$

(4-3) تعريف (المثالي المتجانس):[1][2]

كل كثير حدود $f\in K[x_0,\dots,x_n]$ يمكن تحليله إلى مركباته المتجانسة بالشكل:

$$f=F_0+F_1+\cdots+F_d \quad , \quad d=\deg(f)$$

كل F_j متجانس من الدرجة j في $x_0,\dots,x_n$.

المثالي $J\in K[x_0,\dots,x_n]$ متجانس إذا تحقق:

f كثير حدود في المثالي المتجانس عندها فإنَّ كل من مكوناته المتجانسة هي في هذا المثالي.

أغلب المثاليات لاتملك هذه الخاصَّة

مثال: ليكن $I=<y-x^2>\subset K[x,y]$

المكوِّنات المتجانسة لِ $f=y-x^2$ هي: $f_1=-x^2 \ , \quad f_2=y$

كلاهما كثيرات حدود غير موجودة في I وكلاهما ليس مضاعفاً لِ $y-x^2$

من هنا نجد أنَّ I هو مثالي غير متجانس.

(4-4) تعريف:[2]

يُعرَّف التجانس لكثير حدود f بالنسبة لِ x_i بالشكل:

$$F(x_0,\dots,x_n)=x_i^{\deg(f)}f\left({}^{x_0}/_{x_i},\dots,{}^{x_{i-1}}/_{x_i},{}^{x_{i+1}}/_{x_i},\dots,{}^{x_n}/_{x_i}\right)$$

(4-5) تعريف: [2][1]

التجانس لمثالي $I\subset K[y_0,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n]$ هو المثالي المولَّد بالتجانسات لكل $f\in I$.

لأجل مجموعة معيَّنة مولِّدة منتهية $f_1,\dots,f_s$ لِ $I\subset K[x_1,\dots,x_n]$ فإنَّه دائماً صحيح أنَّ $< f_1^h,\dots,f_s^h >$ هو مثالي متجانس محتوى في I^h.

(4-6) قضية : [1]

لأجل المثالي المعطى $I\subset K[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$، ليكن I^h التجانس له بالنسبة للمتغيرات $(x_0,\dots,x_n)$ عندها فإنَّ مثالي الحذف الإسقاطي لِ I^h يساوي مثالي الحذف للمثالي I من المرتبة n أي $\widehat{I^h}=I_n\subset k[y_1,\dots,y_m]$.

(4-7) قضية: [2]

من أجل المجموعة المعطاة $F=\{f_j\}_{j\in J}$ المولدة للمثالي $I=< f_j >_{j\in J}$ لدينا $V(F)=V(I)$.

(4-8) مبرهنة: [5]

نعدُّ المصفوفة $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn}\end{pmatrix}$

التي مدخلاتها هي المتغيرات المستقلة فوق B، إذا كانت B منطقة تكاملية عندها فإنَّ $I_m(X)$ هو مثالي أوَّلي.

حيث إنَّ B هي حلقة تبديلية، $B[X]$ ترمز إلى حلقة كثيرات الحدود $B[X_{ij}: i=1,\dots,m\ , j=1,\dots,n]$، المثالي $I_m(X)$ في $B[X]$ مولَّد بالمصغرات الأعظمية لِ X.

(4-1-2-1) الحالة الأولى:

سنعدُّ المثالي J^h هو التجانس للمثالي J المعرَّف سابقاً:

$$J^h = I^h(n,r,\pi) =< minors_{(r+1)(r+1)}\left(A^h + T_\pi^h\right) >\subseteq Q[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]$$

فإنَّ: بالاعتماد على المبرهنة $\widehat{I^h} = I_n$

$$\widehat{J^h} = \widehat{I^h}(n,r,\pi) = J_1 \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n^2}]$$
$$J_2 = J_1 \cap \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}] \subseteq \mathbb{Q}[x_{\overline{\pi}}]$$

وفي هذه الحالة يتحقق المطلوب ويكون J_2 هو المثالي المولِّد للمثالي J_1 في الحلقة $\mathbb{Q}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]$ وذلك بالاعتماد على ما تمَّ إثباته في الحالة الآفينية أنَّ J_1 المثالي المولَّد بـ J_2 في $\mathbb{Q}[x]$ ($J_1 = J_2\mathbb{Q}[x]$)

حيث $\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{Q}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]$

(4-1-2-2) الحالة الثانية:

سندرس الحالة الثانية فوق الحقل $\mathbb{C}$

نعدُّ المثالي:

$$\hat{J} = \hat{I}(n,r,\pi) =< minors_{(r+1)(r+1)}(A + T_\pi) > \subseteq \mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]$$

هو مثالي متجانس مولَّد بمصغرات المصفوفة $A + T_\pi$ (التي هي كثيرات حدود متجانسة)

(في الحالة العامّة إذا كانت مصغَّرات المصفوفة A كثيرات حدود متجانسة ومصغرات المصفوفة T_π أيضاً متجانسة عندها المجموع لن يكون متجانساً بالضرورة)

$$\widehat{J_1} = \hat{J} \cap \mathbb{C}[x_\pi, x_{\overline{\pi}}] \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n^2}]$$
$$\widehat{J_2} = \widehat{J_1} \cap \mathbb{C}[x_{\overline{\pi}}]$$

وطالما أنَّ $\widehat{J_1}$ هو مثالي الحذف للمثالي $\hat{J}$ بحذف المتغيرات t_π، فإنَّ مصفوفة A تتوضَّع في المجموعة $\Omega(n,r,\pi)$ إذا وفقط إذا توضعت مدخلاتها في المتنوعة المعرَّفة بمثالي الحذف $\widehat{J_1}$.

سنعرِّف تطبيق الإسقاط:

$$\pi_1 : \mathbb{p}^k \times \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$$
$$(t_0 : \dots : t_k, x_1, \dots, x_{n^2}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n^2})$$

وكذلك تطبيق الإسقاط:

$$\pi_2 : \mathbb{p}^k \times \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$$
$$(1 : \dots : 1, x_1, \dots, x_{n^2}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n^2})$$

وهو تطبيق متباين وغامر.

لدينا:

$$\pi_2^{-1}\left(V\left(\widehat{J_2}\right)\right) = \{(1 : \dots : 1, x_1, \dots, x_{n^2}) : f(x_1, \dots, x_{n^2}) = 0$$

وذلك $\forall \mathrm{f} \in J_2$ أي $\forall f$ تحوي متغيرات $x_{\overline{\pi}}$.

ومن ثمَّ $\pi_2^{-1}\left(\left(\widehat{J_2}\right)\right)$ هي متنوعة في $\mathbb{p}^k \times \mathbb{C}^{n^2}$ معرَّفة بواسطة $\widehat{J_2}$ حيث

$$\widehat{J_2} \subset \mathbb{C}[x_{\overline{\pi}}\ ] \subset \mathbb{C}[x, t]$$

لدينا المبرهنة :

لأجل المجموعة $F = \{f_j\}_{j \in J}$ التي تولِّد المثالي $I =< f_j >_{j \in J}$ عندها:

$$V(F) = V(I)$$

ومنه:

$$(*) \ [\quad \pi_2^{-1}\left(V\left(\widehat{J_2}\right)\right) = V\left(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\right) \qquad]$$

أيضاً حسب مبرهنة التمديد الإسقاطية:

$$(**) \quad [\ \pi_2\left(V\left(\widehat{J_1}\right)\right) = V\left(\widehat{J_2}\right)\ ]$$

بتطبيق π_2 على $(*)$:

$$\pi_2\ (\pi_2^{-1}\left(V\left(\widehat{J_2}\right)\right)) = \pi_2(V\left(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\right))$$

وكون π_2 متبايناً وغامراً:

$$\Rightarrow\ V\big(\widehat{J_2}\big) = \pi_2(V\big(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\big)\big)$$

بالمقارنة مع $(**)$ نجد:

$$\pi_2\left(V\big(\widehat{J_1}\big)\right) = \pi_2(V\left(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\right)\big)$$

وكون π_2 متبايناً :

$$V(\widehat{J_1}) = V\left(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\right)$$

وباستخدام مبرهنة (4.8) لدينا $\hat{J}$ مثالي أوَّلي، أيضاً كل مثالي حذف لمثالي اوَّلي هو أيضاً أوَّلي ومنه يكون $\widehat{J_1}$ و $\widehat{J_2}$ هي مثاليات أوَّلية.

$$\Longrightarrow (\widehat{J_1} = \widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}])$$

وذلك بسبب وجود تقابل بين المثاليات الأوَّلية والمتنوعات الجبرية غير القابلة للاختزال في فضاء الإسقاط.

(حيث كل من $V\left(\widehat{J_2}\mathbb{C}[t_0, \dots, t_k, x_1, \dots, x_{n^2}]\right)$ و $V(\widehat{J_1})$ متنوعات غير قابلة للاختزال)

المراجع:

1. Cox D.,Little,J. and O'shea,D. , (1996). Ideals, varieties and Algorithms, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg.
2. Hasset b., (2007). Introduction to Algebraic Geometry, Rice University, Houston.
3. Satyanarayana V. Lokam., (1999).Note On the rigidity of Vandermonde matrices.
4. Kumar A., Lokam S., Patankar V. and Sarma J.,(2014). Using Elimination Theory to construct Rigid Matrices.
5. Bruns W., and Vetter U., (1980). Determinantal Rings, volume 1327 of Lecture Notes in Mathematics.