استخدام شبكات بتري عالية المستوى في إنشاء خوارزمية مركزية لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد

عدي العبود[1] و عبد اللطيف هنانو[2] و محمد جمال اللبن[2]

تاريخ الإيداع 2013/08/22

قبل للنشر في 2014/07/17

الملخص

قدمنا في هذا البحث خوارزمية مركزية (centralized algorithm) لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد على شبكة اتصالات غير حلقية، بحيث تعتمد هذه الخوارزمية على تمثيل شبكة الاتصالات غير الحلقية باستخدام شبكات بتري عالية المستوى (High Level Petri Nets)، وبعد ذلك نختار متجهات الترميز للانتقالات في هذه الشبكة بحيث يمكن إنجاز عملية الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات الموافقة.

كما قدمنا خوارزمية تقوم بحساب حجم حقل غالوا (Galois field) اللازم لإنجاز الإرسال المتعدد، وذلك باستخدام شبكة بتري عالية المستوى التي تُمثِّل شبكة الاتصالات غير الحلقية، فضلاً عن تقديم طريقة لتقليص حجم حقل غالوا الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على نمط معين من الشبكات.

الكلمات المفتاحية: ترميز الشبكة، شبكات بتري عالية المستوى، الإرسال المتعدد.

التصنيف الرياضي العالمي 2010: 94A15، 94A24 .

[1] طالب دكتوراه، [2] أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Using High Level Petri Nets To Construct a Centralized Algorithm For Solving Multicast Network Coding Problem

O. Al Aboud [(1)]; A. Hanano[(2)] and M. J. Al Laban[(2)]

Received 22/08/2013
Accepted 17/07/2014

ABSTRACT

In this work we present a centralized algorithm for solving multicast network coding problem on acyclic communication network, which depends on representation of this communication network as a high level Petri net, and then finding the coding vectors for transitions in this high level Petri net in such a way that the multicast can be done on the communication network. After that we present an algorithm for determining the size of Galois field which is sufficient to solve the multicast network coding problem. Finally, we explain a technique to reduce the size of this Galois field for some communication networks.

Key Words: Network Coding, Multicast, High Level Petri Nets.

MSC 2010 Subject Classification: 94A15, 94A24.

[(1)] Ph., D. Student, [(2)] Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.

1- المقدمة:

ظهر مفهوم ترميز الشبكة في [1] إذْ تم تناول ترميز الشبكة في حالة عملية إرسال متعدد (multicast)، كما أظهرت الأعمال اللاحقة مثل [2] أنَّ من الممكن إنجاز عملية الإرسال المتعدد بمعدل إرسال w باستخدام ترميز الشبكة الخطي (linear network coding)، الأمر الذي سمح لـ Koetter و Medard بتقديم مقاربة جبرية لترميز الشبكة تستند إلى تصميم ترميز الشبكة كمسألة جبرية اعتماداً على بنية شبكة الاتصالات في بحثهما [3]، واعتماداً على هذه المقاربة قُدّمت مجموعة من الخوارزميات غير المركزية (Decentralized) لبناء ترميز الشبكة الخطي في حالة الإرسال المتعدد [5,4]، كما قُدّمتْ بعض الخوارزميات المركزية (Centralized) [6]، وكانت الأبجدية (Alphabet) المستخدمة في هذه الخوارزميات عبارة عن حقل منته (Finite Field) الذي يسمى بحقل غالوا، وقد بينَّ [4] بأنَّ حقلاً حجمه يساوي عدد عُقدَ المصب بالشبكة كاف لإنجاز عملية الإرسال المتعدد، ولما كان حجم الحقل المستخدم كأبجدية يؤدي دوراً مهماً في حجم الذاكرة المستخدمة للترميز ودرجة تعقيد العمليات فوق هذا الحقل إذْ يتناسب حجم الذاكرة ودرجة التعقيد طرداً مع هذا الحجم [7]، فإنَّ إجراء دراسات عن تقليص حجم هذا الحقل يعدُّ ذا أهمية قصوى.

قدمنا في البحث [8] مقاربة لنمذجة ترميز الشبكة على شبكة اتصالات غير حلقية باستخدام شبكات بتري عالية المستوى بصورتها العامة دون الحاجة لمعرفة البنية الكلية لشبكة الاتصالات، بل يكفي معرفة معلومات محلية عند تمثيل العُقد والقنوات في الشبكة، وفي بحثنا هذا قمنا بتجزئة شبكة الاتصالات التي نعلم بنيتها الكلية إلى مجموعة من الشبكات الجزئية وفقاً للبيانات التي تتدفق من خلالها وذلك بطريقة مشابهة لما ورد في [9]، ونُمثل هذه الشبكات باستخدام شبكات بتري عالية المستوى (HLPN)، ونُعرف المواضع والانتقالات المصدرية، وكذلك مواضع الترميز وانتقالاته ومتجهات الترميز للانتقالات، كما قُدّمتْ بعد ذلك خوارزمية مركزية لإسناد متجهات الترميز إلى الانتقالات بطريقة تمكننا من إنجاز عملية الإرسال المتعدد المطلوبة، ومن ثمَّ عُرضتْ كيفية تمثيل هذا الحل على شبكة الاتصالات غير الحلقية، ونظراً إلى أنَّ حجم الحقل المنتهي (حقل غالوا) اللازم لإنجاز هذا الإرسال يؤدي دوراً مهماً كما ذكرنا فقد قُدّمتْ خوارزمية تقوم بحساب حجم هذا الحقل، وبعد ذلك اقتُرحتْ طريقة لتقليص هذا الحجم لنمط معين من الشبكات.

2- تعاريف أساسية:

2-1- ترميز الشبكة:

بينَّ [1] أنَّ يمكن تمثيل شبكة الاتصالات ببيان موجه $G=(V,E)$ إذْ تُمثل (مجموعة رؤوس البيان) V مجموعة عُقد الشبكة جميعها وتُمثل (مجموعة أضلاع البيان) E

مجموعة قنوات الشبكة جميعها، وتُمَثَّل القناة بثنائية مرتبة (v_1, v_2) ويُرمَز **لــرأس القنــاة** $v = head(e)$ بـــ $e=(v',v)\in E$ **ولذيل القنــاة** $v' = tail(e)$ بـــ $(v',v)\in E$ ولكل عُقدة $v \in V$ تُعَرَّف المجموعتان:

$$In(v) = \{e \in E; head(e) = v\}$$

$$Out(v) = \{e \in E; tail(e) = v\}$$

2-1-1- تعريف[3]: تُعرَّف مجموعة عُقد المصدر S بالشكل $S = \{v \in V; |In(v)| = 0\}$ وتُعرَّف مجموعة عُقد المصب T بـــ $T = \{u \in V; |Out(u)| = 0\}$ ونكتب هذه المجموعة بالشكل $T = \{t_1, t_2, ..., t_{|T|}\}$.

افتُرضَ خلال البحث وجود عُقدة مصدر وحيدة S تريد أن ترسل البيانات التي تولدها إلى عُقد المصب جميعها بمعدل أصغر أو يساوي المقطع الأصغري بينها وبين أي مــن هذه العُقد ونرمز لهذا المعدل بـــw وتُسمى هذه المسألة بمسألة الإرسال متعدد (multicast problem).

يُرمز للمسارات منفصلة- الأضلاع من عُقدة المصدر إلى عُقدة المَصب ذات الترتيب q بـــ $P_{q,1},...,P_{q,w}$ إذْ $1 \le q \le h$ وη هو عدد عُقد المصب ويُقال عن شبكة الاتــصالات بأنها فعَّالة (active) إذا كان $G = \bigcup_{\substack{1\le q\le h \\ 1\le i\le w}} P_{q,i}$ [10]. افتُرضَ الشبكات جميعها فــي هــذا البحث فعَّالة لأنَّ القنوات التي لا تُستَخدَم لإنجاز عملية الإرسال يمكن حذفها.

2-1-2- تعريف[11]: يُقال عن الخوارزمية إنها مركزية (Centralized) إذا كــان إنجازها يتطلب معلومات عن البنية العامة للشبكة، أي معلومات عن عُقد الشبكة جميعهــا وطريقة ارتباطها مع بعضها بعضاً.

2-1-3- تعريف [11]: يُقال عن الخوارزمية إنها لا مركزية (Decentralized) إذا كان إنجازها يتطلب معلومات محلية فقط عن بنية الشبكة أي معلومات عن العُقدة الحالية والعُقد التي تسبقها وتليها في الشبكة وفقاً لترتيب نهري ما.

2-2- شبكات بتري:

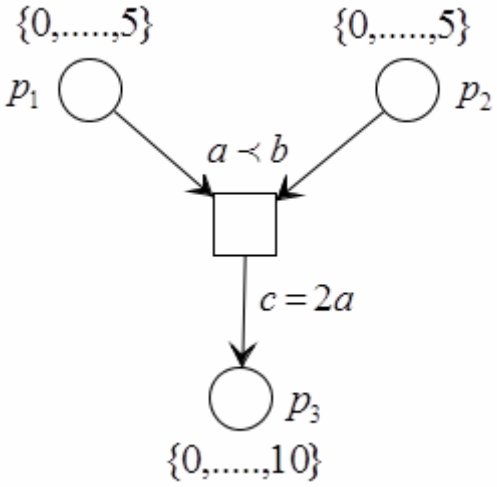
شبكات بتري هي أدوات نمذجة جبرية ومرئية يمكن تطبيقها على العديد من الأنظمــة وتعدُّ أدوات واعدة لوصف أنظمة معالجة البيانات ودراستها كما بينَّ البحث [12].

2-2-1-تعريــف [13]: تُعرف شبكات بتري عالية المــستوى (High Level Petri Nets) وتكتب اختصاراً (HLPN) بأنها بنية جبرية تتضمن:

مجموعة من المواضع (Places)، مجموعة من الانتقالات (Transitions) ،مجموعة من الأنماط (Types)، تطبيق يربط كل موضع بنمط معين، مجموعة من الصيغ (Modes) لكل انتقال، تطبيق السابق (Pre Function) الذي يحدد مجموعة العلامات المطلوبة في المواضع لأجل كل صيغة انتقال، تطبيق اللاحق (Post Function) الذي يحدد العلامات الناتجة من أجل كل صيغة انتقال، تعليم ابتدائي (Initial marking) يُبيّن العلامات الموجودة في كل موضع قبل حدوث أي عملية إطلاق في شبكة بتري عالية المستوى.

بينَّ [13] أنَّه يمكن تمثيل HLPN ببيان موجه ثنائي يتكون من:

مواضع (يرمز لها P) وانتقالات (يرمز لها T) وأقواس (يرمز لها A) تربط المواضع والانتقالات وكل انتقال يُزوَد بشرط (Condition) في حين يُزود كل قوس من هذا الانتقال إلى أحد المواضع بعملية (Operation) والشكل (1) الوارد في [13] يُمَثل HLPN تتألف من ثلاثة مواضع و انتقال:



الشكل(1)

- تُمثَل حالة شبكة بتري عالية المستوى بعلامات (Tokens) ترتبط بمواضع الشبكة، وكل موضع يحمل نمط (Type) كما هو موضح في [13]، ففي الشكل (1) نمط العلامات للموضع p_2 هو {0,.....,5} أي إنَّ العلامات الموجودة في الموضع p_2 هي عناصر من هذه المجموعة، ويمكن للموضع أن يحوي عدة نسخ من العلامة نفسها أي إنَّ المواضع تحوي مجموعات متعددة (Multi Sets) من العلامات.

2-2-2- تعريف[14]: تُعَرَّف المجموعات الآتية:

- $\Pr e(p) = \{t : t \in T \wedge (t, p) \in A\}$.
- $Post(p) = \{t : t \in T \wedge (p,t) \in A\}$.
- $\Pr e(t) = \{p : p \in P \wedge (p,t) \in A\}$.
- $Post(t) = \{p : p \in P \wedge (t, p) \in A\}$.

إذْ $p \in P$ و $t \in T$.

2-2-3- تعريف: إذا كانت P' مجموعة من المواضع و T' مجموعة من الانتقالات نُعرِّف المجموعات الآتية:

- $\Pr e(P') = \{t : \exists p \in P'; t \in \Pr e(p)\}$.
- $Post(P') = \{t : \exists p \in P'; t \in Post(p)\}$.
- $\Pr e(T') = \{p : \exists t \in T'; p \in \Pr e(t)\}$.
- $Post(T') = \{p : \exists t \in T'; p \in Post(t)\}$.

2-2-3- تعريف[14]: يُعرَف التعليم (Marking) بأنه تطبيق يُحدِد العلامات الموجودة في كل موضع من مواضع الشبكة في لحظة ما.

2-2-4- الشرط و العملية (Condition and Operation) [13]:

- لا يمكن أن يحدث الإطلاق في انتقال ما إلا إذا تحقق الشرط لهذا الانتقال ففي الشكل(1) إذا وُجدت علامة a في الموضع P_1 وعلامة b في الموضع P_2 يحدث الإطلاق فقط إذا كان $a \ \mathbf{p} \ b$.

- عند حدوث الإطلاق يُنَفذ الانتقال عملية رياضية مُعرَّفة على العلامات التي حَققت شرط الإطلاق، وذلك من أجلَ كل قوس من هذا الانتقال إلى موضع يليه، ففي المثال أعلاه العملية هي $c = 2a$، أي إنَّ العلامة التي ستضاف إلى p_3 بعد الإطلاق هو $2a$.

2- تمثيل شبكة الاتصالات باستخدام شبكات بتري عالية المستوى:

2-1- إيجاد مجموعة شبكات جزئية من شبكة الاتصالات:

بالبداية سنقوم بإيجاد مجموعة الشبكات الجزئية من شبكة الاتصالات، بحيث يتدفق عبر قنوات كل شبكة جزئية وحدة البيانات نفسها، علماً بأنَّ طريقة إيجاد الشبكات الجزئية هذه قد وردت في [9] بشكل مشابه، والجدير بالذكر أنّ معرفة البنية الكلية للشبكة أسهمت إسهاماً كبيراً في إيجاد مجموعة الشبكات الجزئية هذه.

2-2- تمثيل الشبكات الجزئية ببيان شبكة بتري عالية المستوى:

كل شبكة جزئية سوف تُمَثَّل بموضع وانتقال وقوس من الانتقال إلى الموضع في شبكة بتري عالية المستوى، أما القنوات في البيان الأصلي التي تصل عُقدة من إحدى الشبكات الجزئية بعُقدة من شبكة جزئية أُخرى فإننا نمثل هذه القنوات بقوس من الموضع الذي يُمَثِّل الشبكة الجزئية الأولى إلى الانتقال الذي يُمَثِّل الشبكة الجزئية الثانية في شبكة بتري عالية المستوى.

2-2-1- اصطلاح: من أجل الاختصار سنقول إنَّ الموضع (الانتقال) يُمَثِّل عُقد المصدر والمصب الموجودة في الشبكة الجزئية التي يمثلها بدلاً من ذكر كامل الشبكة الجزئية.

2-2-2- تعريف: نقول عن الموضع (الانتقال) إنَّه موضع (انتقال) **مصدري** إذا احتوت الشبكة الجزئية التي يُمثِّلها على عُقدة المصدر، في حين نقول عن الموضع (الانتقال): إنّه موضع (انتقال) **ترميز** إذا لم تحتوِ الشبكة الجزئية التي يُمثِّلها على عُقد المصدر.

2-3- الشرط و العملية لانتقالات شبكة بتري عالية المستوى التي تُنمذج مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد:

نفترض أنَّ المواضع جميعها في شبكة بتري عالية المستوى لها نمط العلامات نفسه وهو حقل غالوا (Galois Field) F_q الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات.

أما بالنسبة إلى شرط الإطلاق للانتقال t فإننا نميز حالتين:

- إذا كان t انتقالاً مصدرياً نفرض أنَّ شرط الإطلاق محقق دوماً.
- إذا كان t انتقال ترميز نفرض أنَّ شرط الإطلاق محقق إذا احتوت المواضع جميعها في $\mathrm{Pre}(t)$ علامات.

نُعرِّف العملية للانتقال t بأنها تركيب خطي لـ $\{x_1, x_2, ..., x_w\}$ بأمثال من الحقل F_q إذْ $\{x_1, x_2, ..., x_w\}$ هي الرسالة المولَّدَة في عقدة المصدر في شبكة الاتصالات أي إنَّ:

$c = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_w x_w$ إذْ $a_i \in F_q$ من أجل $1 \le i \le w$ ويمكن أن نكتب العملية بالشكل $c = v_t . x$ إذْ $v_t = (a_1 \quad a_2 \quad .... \quad a_w)^T$ متجه عمودي نسميه **متجه الترميز للانتقال** t.

بعد أن نقوم بتمثيل شبكة الاتصالات بشبكة بتري عالية المستوى على النحو الموصوف أعلاه، وإذا كنا قادرين على إيجاد متجهات الترميز للانتقالات في هذه الشبكة

بما يُمكننا من إنجاز الإرسال المتعدد الخطي، فإنَّه يمكن تمثيل هذا الحل لمسألة الإرسال المتعدد على البيان المُنمذج لشبكة الاتصالات بوضع متجهات الترميز المعممة (Global Coding Vectors)- المعرَّفة في [10] للقنوات جميعها في الشبكة الجزئية والقنوات التي تخرج من هذه الشبكة الجزئية مساوية لمتجه الترميز للانتقال الذي يمثل هذه الشبكة الجزئية في شبكة بتري عالية المستوى.

3- خوارزمية مركزية لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد:

3-1- الخوارزمية:

الدخل: شبكة الاتصالات $G=(V,E)$، الحقل F_q الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على $G=(V,E)$.

خطوات الخوارزمية:

1. من أجل كل عُقدة مصب R_i نحسب التدفق الأعظمي $w_i=\max flow(S,R_i)$.
2. نضع $w=\min_i(w_i)$
3. نوجد شبكة بتري H المكافئة لشبكة الاتصالات $G=(V,E)$ باستخدام التقنية الموضحة سابقاً.
4. نختار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية في H من الفضاء المتجهي $(F_q)^w$ بحيث تكون مستقلة خطياً.
5. من أجل كل انتقال ترميز t نختار متجه الترميز له من بين التراكيب الخطية لمتجهات الترميز للانتقالات في المجموعة $\Pr e(\Pr e(t))$ بحيث تكون متجهات الترميز للانتقالات التي تُمثل عُقدة المصب نفسها مستقلة خطياً ونميز حالتين:
   - o هذا الاختيار ممكن لانتقالات الترميز جميعها عندئذ ننهي الخوارزمية.
   - o يتعذَّر اختيار متجه الترميز لأحد انتقالات الترميز عندئذ نعود للخطوة 4 ونختار متجهات ترميز جديدة للانتقالات المصدرية.

الخرج: شبكة بتري H التي تمثل حلاً لمسألة ترميز الشبكة في حالة الإرسال المتعدد.

3-2- تأكيد صحة الخوارزمية:

يمكن إنجاز الإرسال المتعدد بمعدل w على شبكة اتصالات إذا كانت سعة المقطع الأصغري أكبر أو تساوي w [1] ومن ثمَّ يوجد على الأقل w مساراً منفصل الأضلاع بين عقدة المصدر وكل عُقدة من عُقد المصب [11] وتحت فرضية أنَّ شبكة الاتصالات فعالة (Active) فإنَّ كل عُقدة مصب تُمثّل بـ w انتقالاً مختلفاً، وهكذا إن أمكن اختيار

متجهات الترميز لهذه الانتقالات بحيث تكون مستقلة خطياً، فإنّ عقدة المصب ستكون قادرة على استرداد الرسالة المولدة في عُقد المصدر.

إذا كان حجم الحقل F_q كبيراً بشكل كاف فإنه يمكن اختيار متجهات الترميز للقنوات الأخيرة في المسارات منفصلة الأضلاع بين عُقدة المصدر وعُقدة المصب بحيث تكون مستقلة خطياً [10] ومن ثمَّ تكون متجهات الترميز للانتقالات التي تُمثل عُقدة المصب هذه مستقلة خطياً.

تقوم الخوارزمية بإيجاد متجهات الترميز هذه من خلال اختبار إمكانية اختيار متجهات الترميز للانتقالات التي تُمثل كل عُقدة مصباً بحيث تكون مستقلة خطياً، إذا كان هذا ممكناً تنتهي الخوارزمية، وإنْ لم يكن تقوم باختيار متجهات ترميز جديدة للانتقالات المصدرية وإعادة الاختبار، ووفقاً ما هو موضح أعلاه فإنَّ الخوارزمية ستتمكن في النهاية من إيجاد متجهات الترميز للانتقالات التي تمثل كل عُقدة من عُقد المصب بحيث تكون مستقلة خطياً.

3-3- تكلفة الخوارزمية:

تتألف الخوارزمية من ثلاث مراحل:

المرحلة الأولى هي تمثيل شبكة الاتصالات ببيان شبكة بتري عالية المستوى، ويعتمد هذا التمثيل على إيجاد تقابل بين الشبكات الجزئية التي تتدفق عبر قنواتها وحدة البيانات نفسها التي جرى إيجادها اعتمادا على معرفة البنية الكلية لشبكة الاتصالات نظراً إلى كون الخوارزمية مركزية ومن ثمَّ فإنَّ أي زيادة في حجم الشبكة قد تؤدي إلى زيادة نقاط الترميز وزيادة عدد الشبكات الجزئية التي يجري إيجادها بصورة مباشرة كما وضحنا سابقاً ومن ثمَّ تُنفّذ هذه المرحلة بزمن متعدد الحدود (Polynomial Time) .

المرحلة الثانية هو إيجاد التدفق الأعظمي بين عُقدة المصدر وعُقدة المصب وهذه المرحلة زمنها متعدد الحدود أيضاً [15].

المرحلة الثالثة هي اختبار الاستقلال الخطي لمتجهات الترميز للانتقالات التي تمثل عُقدة المصب وعملية الاختبار نفسها هذه زمنها متعدد الحدود[4].

ومن ثمَّ فالزمن الكلي لإنجاز الخوارزمية يكون متعدد الحدود.

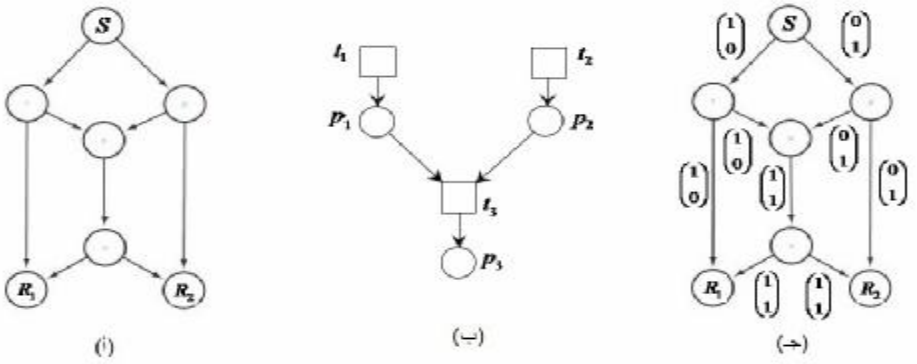
3-4- أمثلة:

3-4-1- مثال:

إذا كان دخل الخوارزمية(3-1) شبكة الاتصالات الموضحة بالشكل(2- أ):

1. نلاحظ أنَّ $w_1 = w_2 = 2$.
2. من ثمَّ $w = 2$.

3. شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(2- ب) تُمثل شبكة الاتــصالات الموضحة بالشكل (2- أ) (موجود في [1]) ونلاحظ أنَّ:



الشكل(2)

- t_1 (p_1) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعقدة المصب R_1.
- t_2 (p_2) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعقدة المصب R_2.
- t_3 (p_3) انتقال (موضع) ترميز يُمَثِّل عقدتي المصب R_1 وR_2.

4. سوف نُسند متجهات الترميز للانتقالات المصدرية t_1 و t_2 من الفضاء المتجهي F_{2^2} الذي أساسه $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ ويحوي ثلاث متجهات هــي $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ونظراً إلى أنَّ متجهات الترميز لــ t_1 و t_2 يجب أن تكــون مــستقلة خطيــاً نختــار $v_{t_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $v_{t_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

5. نختار $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1.v_{t_1} + 1.v_{t_2}$ وهذا الاختيار يحقق أنَّ متجهــات الترميــز للانتقالات التي تُمَثِّل عقدة المصب نفسها مستقلة خطياً.

هذا الاختيار يولد حلاً لمسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد ويمكن تمثيل هذا الحــل على شبكة الاتصالات، كما هو موضح بالشكل(2- جــ).

3-2-3-مثال:

إنَّ كان دخل الخوارزمية(3-1) شبكة الاتصالات الموضحة بالشكل(3- أ):

1.نلاحظ أنَّ $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 2$.

2.من ثمَّ $w=2$.

3.شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(3- جـ) تُمثل شبكة الاتصالات الموضحة بالشكل (3- أ) ونلاحظ أنَّ:

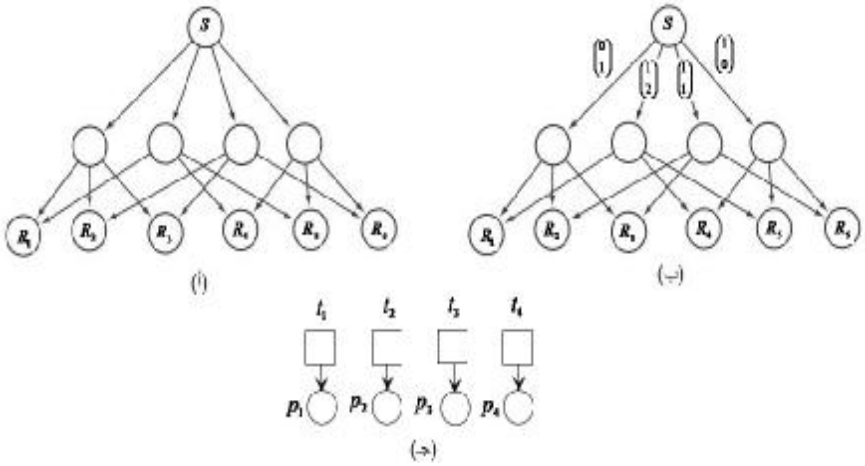
- t_1 (p_1) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعُقد المصب R_1 و R_2 و R_3.
- t_2 (p_2) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعُقد المصب R_1 و R_4 و R_5.
- t_3 (p_3) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعُقد المصب R_2 و R_3 و R_6.
- t_4 (p_4) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S وعُقد المصب R_4 و R_5 و R_6.

4.متجهات الترميز للانتقالات المصدرية t_1 وt_2 وt_3 وt_4 يجب أن تكون مستقلة خطياً؛ لذلك سنختار هذه المتجهات من الفضاء المتجهي F_{3^2} بالشكل الآتي:

$$v_{t_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad v_{t_2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad v_{t_3} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad v_{t_4} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

5.لا توجد انتقالات ترميز لذلك ننهي الخوارزمية.

إنَّ اختيار متجهات الترميز للانتقالات يولد حلاً لمسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد، كما هو موضّح بالشكل(3- ب).



الشكل (3)

4- خوارزمية لتعيين حقل غالوا الكافي لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد:

ذكرنا سابقاً أنَّ نمط العلامات للمواضع جميعها في شبكة بتري عالية المستوى المكافئة لشبكة الاتصالات هو حقل غالوا الكافي لإنجاز ترميز الشبكة للإرسال المتعدد الخطي عليها، ونظراً إلى أنَّ تعيين حجم هذا الحقل ذو أهمية كبيرة لذلك قدّمنا خوارزمية لحساب هذا الحجم .

اذا كان المقطع الأصغري في شبكة الاتصالات w فإنَّ كل عُقدة مصب في هذه الشبكة تُمثل بـ w موضعاً وw انتقالاً في شبكة بتري عالية المستوى المقابلة لشبكة الاتصالات هذه ومتجهات الترميز لهذه الانتقالات يجب أن تكون مستقلة خطياً عن بعضها بعضاً لأنّ نظرية Menger [16] تقول بوجوب وجود w من المسارات منفصلة الأضلاع بين المصدر وكل عُقدة من عُقد المصب، كما بيّنت البحوث [2,1] أنَّه يمكن إنجاز ترميز الشبكة للإرسال المتعدد إذا وفقط إذا كانت متجهات الترميز المعممة للـ w قناة التي تصل إلى كل عُقدة مصب في الشبكة مستقلة خطياً.

4-1- الخوارزمية:

الدخل: شبكة بتري عالية المستوى H التي تمثل شبكة الاتصالات $G=(V,E)$.

خطوات الخوارزمية:

1. في البداية نضع الحقل $F_q = F_2$ نمط العلامات للمواضع جميعها في شبكة بتري عالية المستوى.
2. بالنسبة إلى الانتقالات المصدرية نميز حالتين:

- يمكن اختيار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية في H من الفضاء المتجهي $(F_q)^w$ بحيث تكون مستقلة خطياً عندئذٍ ننتقل للخطوة التالية.
- لا يمكن اختيار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية في H من الفضاء المتجهي $(F_q)^w$ بحيث تكون مستقلة خطياً عندئذٍ نُسند قيمة جديدة إلى q وهي أصغر عدد صحيح أكبر تماماً من قيمتها الحالية، بحيث يمكن كتابة هذا العدد على شكل قوة لعدد أولي، ثم نكرر الخطوة 2 من البداية.

3. من أجل كل انتقال ترميز t نختار متجه الترميز له من بين التراكيب الخطية لمتجهات الترميز للانتقالات في المجموعة $\Pr e(\Pr e(t))$ بحيث تكون متجهات الترميز للانتقالات التي تُمثل عُقدة المصب نفسها مستقلة خطياً ونميز حالتين:

o هذا الاختيار ممكن لانتقالات الترميز جميعها عندئذٍ ننهي الخوارزمية ويكون حقل غالوا الكافي لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد هو F_q.

o يتعذر اختيار متجه الترميز لأحد انتقالات الترميز عندئذٍ نسند قيمة جديدة إلى q وهي أصغر عدد صحيح أكبر تماماً من قيمتها الحالية بحيث يمكن كتابة هذا العدد على شكل قوة لعدد أولي، ثم نكرر الخطوة 2 من البداية.

الخرج: F_q (حقل غالوا الكافي لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد).

لعند إخفاق عملية اختيار متجهات الترميز للانتقالات بحيث تكون مستقلة خطياً، تُحدِد الخوارزمية (4-1) آلية تمديد الحقل المنتهي إلى أصغر حقل منته يحوي الحقل الحالي، ويجري ذلك بخطوات مماثلة لخطوات الخوارزمية (3-1) ومن ثمَّ يمكن إثبات صحة الخوارزمية (4-1) بأسلوب إثبات الخوارزمية (3-1) نفسه ويكون لها التعقيد نفسه.

4-2-أمثلة:

4-2-1-مثال:

إذا كان دخل الخوارزمية (4-1) شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(2-ب)

1. في البداية نضع الحقل $F_q = F_2$.

2. نختار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية بالشكل الآتي $v_{t_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و$v_{t_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$، وهذا الاختيار يحقق شرط الاستقلال الخطي بينَّ متجهات ترميز الانتقالات المصدرية لذلك ننتقل للخطة التالية.

1. نظراً إلى أنَّ $\Pr e(\Pr e(t_3)) = \{t_1, t_2\}$ نختار متجه الترميز لـ t_3 بالشكل التالي $v_{t_3} = v_{t_1} + v_{t_2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$، وهذا الاختيار يحقق أنَّ متجهات الترميز للانتقالات التي تمثل عقدة المصب نفسه تكون مستقلة خطياً لذلك ننهي الخوارزمية.

ويكون حقل غالوا الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات التي تمثلها شبكة بتري عالية المستوى الموضّحة بالشكل (2- ب) هو F_2.

4-2-2- مثال:

إذا كان دخل الخوارزمية(4-1) شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(3-ب)

1. في البداية نضع الحقل $F_q = F_2$.

2. نختار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية بالشكل الآتي $v_{t_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $v_{t_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $v_{t_3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ولكن لا يمكن اختيار متجه ترميز v_{t_4} بحيث يحقق شرط الاستقلال الخطي بينَّ متجهات ترميز الانتقالات المصدرية، لذلك نضع $q = 3$ ونجري اختياراً جديداً لمتجهات الترميز للانتقالات المصدرية بالشكل الآتي $v_{t_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $v_{t_2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $v_{t_3} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $v_{t_4} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$، وهذا الاختيار يحقق شرط الاستقلال الخطي بينَّ متجهات ترميز الانتقالات المصدرية لذلك ننتقل للخطة التالية.

3. لا توجد انتقالات ترميز لذلك ننهي الخوارزمية.

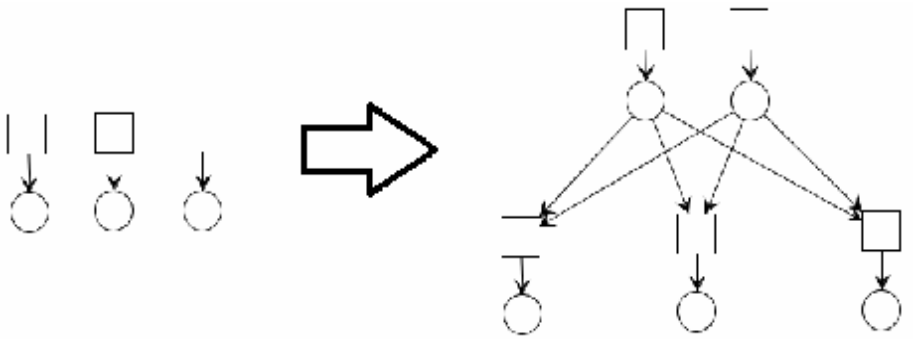
ويكون حقل غالوا الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات التي تمثلها شبكة بتري عالية المستوى الموضّحة بالشكل (3- ب) هو F_3.

5- اختزال حجم حقل غالوا الكافي لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد على نمط محدد من شبكات الاتصالات:

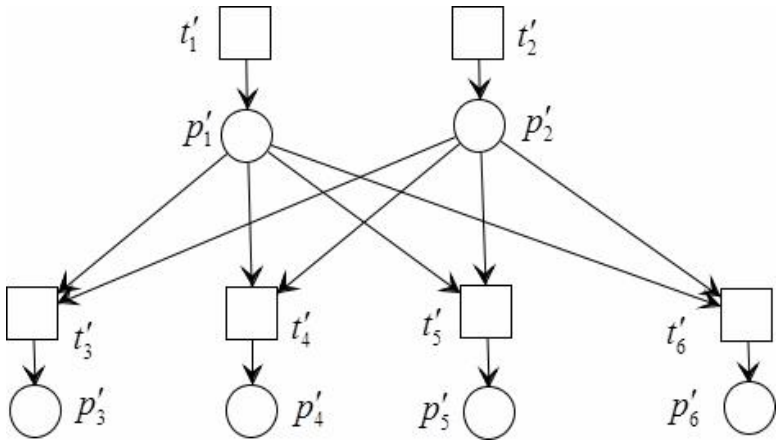
يمكن تصنيف شبكات بتري عالية المستوى التي تُمثِل شبكة اتصالات يمكن إنجاز إرسال متعدد عليها باختيار حقل غالوا مناسب إلى نمطين:

1. عدد الانتقالات المصدرية في شبكة بتري عالية المستوى يساوي w.
2. عدد الانتقالات المصدرية في شبكة بتري عالية المستوى أكبر تماماً من w.

سنهتم بالنمط الثاني من هذه الشبكات وفي هذه الحالة نضيف w زوجاً من المواضع والانتقالات المصدرية الجديدة (تُمثل عُقدة المصدر فقط)، وw قوساً من الانتقال إلى الموضع في الزوج نفسه، أمّا الانتقالات والمواضع المصدرية القديمة فنجعلها مواضع وانتقالات ترميز تُمثل عُقد المصدر التي كانت تُمثلها أصلاً، ومن أجل كل موضع مصدري جديد نضيف عدداً من الأقواس الجديدة بمعدل قوس واحد من هذا الموضع إلى كل انتقال مصدري قديم، كما هو موضح بالشكل (4)، وبعد إجراء هذا التحويل نطبق الخوارزمية (3-1) على شبكة بتري عالية المستوى الجديدة.



الشكل(4)



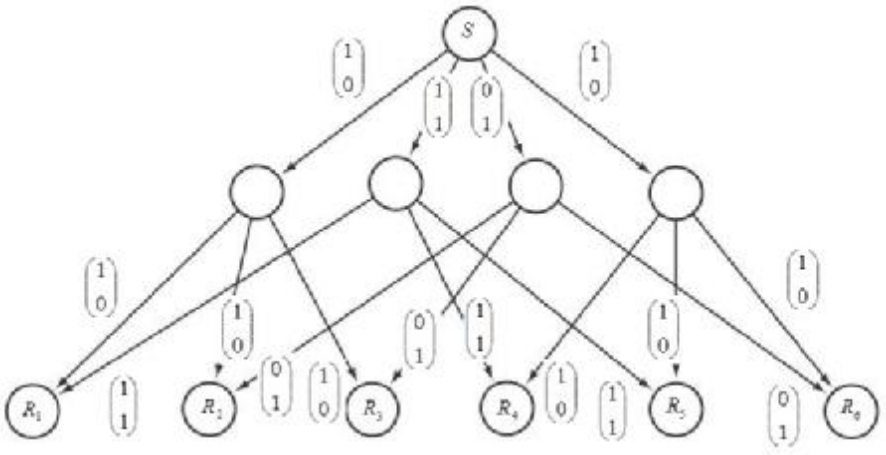
الشكل(5)

عند تمثيل الحل على شبكة الاتصالات نقوم أولاً بإسناد متجهات ترميز انتقالات الترميز في شبكة بتري الجديدة إلى مقابلاتها في شبكة بتري عالية المستوى القديمة، ثُمَّ نمثل الحل كما هو موضح سابقاً.

5-1- مثال:

نأخذ شبكة عالية المستوى الموضحة بالشكل(3- جـ) التي تُمثل شبكة الاتصالات الموضحة بالشكل(3- أ)، ونلاحظ أنَّ $w = 2$ في حين عدد انتقالات المصدر يساوي 4، في البداية نُطبق عملية التحويل الموضحة سابقاً على شبكة بتري عالية المستوى هذه، فتنتج لدينا شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل (5) ونلاحظ أنَّ:

- t'_1 (p'_1) انتقال (موضع) مصدري يمثل عُقدة المصدر S فقط.
- t'_2 (p'_2) انتقال (موضع) مصدري يُمَثِّل عُقدة المصدر S فقط.
- t'_3 (p'_3) انتقال (موضع) ترميز يُمَثِّل عُقد المصب R_1 و R_2 و R_3 .
- t'_4 (p'_4) انتقال (موضع) ترميز يُمَثِّل عُقد المصب R_1 و R_4 و R_5 .
- t'_5 (p'_5) انتقال (موضع) ترميز يُمَثِّل عُقد المصب R_2 و R_3 و R_6 .
- t'_6 (p'_6) انتقال (موضع) ترميز يُمَثِّل عُقد المصب R_4 و R_5 و R_6 .



الشكل(6)

ثُمَّ نُطبق الخوارزمية (4-1) على شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(5):

1. في البداية نضع الحقل $F_q = F_2$.

2. نختار متجهات الترميز للانتقالات المصدرية بالشكل الآتي $v_{t_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $v_{t_2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$، وهذا الاختيار يحقق شرط الاستقلال الخطي بينَّ متجهات ترميز الانتقالات المصدرية لذلك ننتقل للخطة التالية.

3. نظراً إلى أنَّ:

$$\Pr e(\Pr e(t_3')) = \Pr e(\Pr e(t_4')) = \Pr e(\Pr e(t_5')) = \Pr e(\Pr e(t_6')) = \{t_1', t_2'\}$$

نختار متجه الترميز لـ t_3' و t_4' و t_5' و t_6' كما يأتي

$$v_{t_3'} = 1.v_{t_1'} + 0.v_{t_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{t_4'} = 1.v_{t_1'} + 1.v_{t_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و $v_{t'_5} = 0.v_{t'_1} + 1.v_{t'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v_{t'_6} = 1.v_{t'_1} + 0.v_{t'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ وهذا الاختيار يحقق أنَّ متجهات الترميز للانتقالات التي تُمَثِّل عُقدة المصب نفسها تكون مستقلة خطياً لذلك ننهي الخوارزمية.

من ثمَّ فإنَّ حقل غالوا الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات التي تمثلها شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(3- ب) هو F_2.

نلاحظ أنّه تم اختزال حقل غالوا لإنجاز الإرسال المتعدد على شبكة الاتصالات التي تمثلها شبكة بتري عالية المستوى الموضحة بالشكل(3- ب) من F_3 إلى F_2 باستخدام عملية التحويل التي اقترحناها.

نظراً إلى أنَّ الانتقالات t_1 ، t_2 ، t_3 ، t_4 في الشكل(3- جـ) تقابل الانتقالات t'_3 ، t'_4 ، t'_5 ، t'_6 في الشكل(5) على الترتيب، فإنَّ حل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد الناتج عن هذا الاختيار يمكن تمثيله بالشكل(6).

الخلاصة

قدمنا في هذا البحث خوارزمية مركزية لحل مسألة ترميز الشبكة للإرسال المتعدد على شبكة اتصالات غير حلقية، كما قدمنا خوارزمية تقوم بحساب حجم حقل غالوا (Galois field) اللازم لإنجاز الإرسال المتعدد، فضلاً عن تقديم طريقة لتقليص حجم حقل غالوا الكافي لإنجاز الإرسال المتعدد على نمط معين من الشبكات، ولاحظنا أنَّ كل شبكة جزئية تُمَثَّل بانتقال واحد وإنَّ تحديد متجه الترميز لهذا الانتقال يحدد متجه الترميز للقنوات جميعها في الشبكة الجزئية، كما أنَّ تحديد حجم الحقل ومن ثم تقليصه من أجل نمط معين من الشبكات يعدُّ خطوة أولى في سبيل تعميم هذه الفكرة على أنماط أخرى من الشبكات. نأمل أن تفتح هذه الدراسة الباب أمام استخدام نموذج شبكات بتري عالية المستوى في إنجاز مسائل أكثر عمومية في ترميز الشبكة مثل ترميز الشبكة في الشبكات اللاسلكية وترميز الشبكة المتداخل (Intersession Network Coding) وغيرها من مسائل ترميز الشبكة.

REFERENCES المراجع

[1] Ahlswede, R. Cai, N. and Robert Li, S. 2000. Network Information Flow, Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Information Theory, Vol.46, No.4, pp. 1204 -1216.

[2] Li, S. Yeung. R.W. and Cai, N, 2003. Linear Network Coding, Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Information Theory, VOL.49, NO.2, pp. 371-381.

[3] Koetter, R. Medard, M. 2002. Beyond routing: An algebraic approach to network coding, 21st Annual Joint Conference of the Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer and Communications Societies (INFOCOMM), VOL.1, pp. 122-130.

[4] Sanders, P. Egner, S. and Tolhuizen, L. 2003. Polynomial Time Algorithms For Network Information Flow, 15th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures(SPAA),PP. 286-294.

[5] Jaggi, S., Chou. P. A, and Jain, K. 2003. Low complexity algebraic multicast network codes, IEEE International Symposium on Information Theory, Yokohama, Japan, p368.

[6] Chou, P. A. Effors, M. Egner, S. Jaggi, S. Jain, K. Sanders, P. and Tolhuizen, L, 2005. Polynomial time algorithms for multicast network code construction, IEEE Trans *on Information Theory*, Vol.51, No.6, pp.1973-1982.

[7] Karatsuba, A. and Ofman, Yu, 1962. Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers, " Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 145, pp. 293–294, Translation in Physics-Doklady, No.7, pp. 595-596.

[8] Al Aboud, O. Al Laban, M. J. and Hanano, A, 2013. An Algebraic Approach To Linear Network Coding Using High Level Petri Nets, Damascus University Journal For The Basic Sciences,(under review).

[9] Fragouli, C. Soljanin, E. and Shokrollahi, A, 2004. Network coding as a coloring problem, CISS 2004.

[10] Yeung, R.W, 2008. Information Theory and Network Coding, Springer, 582p.

[11] Fragouli, C. Soljanin, E, 2007. Network Coding Fundamentals, Foundations and Trends in Networking, Vol.2, No.1, pp.1-133.

[12] Murata, T, 1989. Petri nets: Properties, analysis and application, Proceedings of the IEEE, Vol.77, No.4 , pp. 541–580.

[13] Banks, R. Steggles, L. J, 2007. A High-Level Petri Net Framework for Genetic Regulatory Networks, Journal of Integrative Bioinformatics, Vol.4, No.3, 14p.

[14] Software Engineering, ISO/IEC/JTC1/SC7, 2002. High-Level Petri Net Concepts, Definitions and Graphical Notation, ISO/IEC 15909-1, Final Committee Draft.

[15] Ahuja, R. K. Magnanti, R. L. and Orlin, J. B, 1993. Network Flows. Englewood Cliffs, 850p.

[16] Aharoni, R, 1983. Menger's theorem for graphs containing no infinite paths, Europ. J. Combin.Vol.4, pp.201-204.