بعض السمات التبولوجية الجديدة للطيوف الضبابية الأولية لجبور *BCI* الضمنية

ضحى العمار[1] وإيلي قدسي[2]

تاريخ الإيداع 2014/07/01
قبل للنشر في 2014/11/20

الملخص

نسمي جبر *BCI* ضمنياً كل مجموعة غير خالية *X* تحوي عنصراً مميزاً يرمز له بـ O، ومزودة بعملية ثنائية يرمز لها بـ* بحيث تتحقق مجموعة من الشروط ([2])، ونقول عن جبر *BCI* الضمني *X* إنه محدود إذا امتلك عنصراً مميزاً آخر يرمز له بـ 1 بحيث يحقق الخاصة: $x * 1 = 0$.

ليكن *X* جبر *BCI* ضمنياً، في [1] بُني الفضاء التبولوجي $Spec_F(X)$ "الطيف الضبابي الأولي لـ *X*" وجرى تبيان أن هذا الفضاء هو فضاء متراص وغير مترابط، في هذه الورقة العلمية قُدّمتْ سمات تبولوجية إضافية للفضاء $Spec_F(X)$، إذْ بيّنا أنه فضاء هاوسدورف، منتظم، ناظمي، ومنتظم تماماً.

كذلك، بُني في [1] الفضاء التبولوجي $Spec(X)$ "الطيف الأولي لـ *X*"، وإن الهدف الأساسي في هذه الورقة العلمية هو بناء هوميومورفيزم بين الفضاءين $Spec(X)$ و $Spec_F(X)$.

الكلمات المفتاحية: جبر *BCI* الضمني، المثالي الضبابي الأولي، تبولوجيا زاريسكي، فضاء هاوسدورف، فضاء منتظم، فضاء ناظمي، فضاء منتظم تماماً، هوميومورفيزم.

التصنيف الرياضياتي العالمي (MSC 2010): 06F35, 03E72, 11B05

[1] ماجستير في الرياضيات، [2] أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Some new topological properties of Fuzzy Prime Spectrums of Implicative BCI-Algebras

D. Al –Ammar[(1)] and E. Koudsi[(2)]

Received 01/07/2014
Accepted 20/11/2014

ABSTRACT

By an implicative BCI-algebra we mean a nonempty set *X* with a constant element 0 and a binary operation * satisfying numbers of conditions ([2]). And an implicative BCI-algebra *X* called bounded if it has an element 1 satisfying the condition: $x * 1 = 0$.

Let *X* be an implicative BCI-algebra, in [1] the Topological space $Spec_F(X)$ was constructed "The fuzzy prime spectrum of *X*", and it was proved that $Spec_F(X)$ is a compact and non-connected space.

In this paper we introduce other Topological properties of $Spec_F(X)$. We prove that $Spec_F(X)$ is a Hausdorff, regular, normal and completely regular space.

Moreover, in [1] the Topological space $Spec(X)$ was constructed "The prime spectrum of *X*", and the main aim of this paper is defining a homeomorphism between the spaces $Spec(X), Spec_F(X)$.

Key words: Implicative BCI-algebra, Fuzzy prime ideal, Zariski topology, Hausdorff space, Regular space, Normal space, Completely regular space, Homeomorphism.

Mathematical subjects classification(MSC 2010): 06F35,03E72,11B05

(1)MSC., Mathematics, (2) Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Damascus University, Syria.

1- جبور *BCI* الضمنية. *Implicative BCI-Algebras.*

1.1. تعريف ([2]): إن جبر *BCI* الضمني هو مجموعة X تحوي عنـصراً مميـزاً يرمز له بـ 0 وبعملية ثنائية يرمز لها بـ $*$ بحيث تتحقق الشروط الأربعة الآتية:

1. $x * 0 = x$
2. $x * (x * y) = y * (y * x)$
3. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$
4. $x * (y * x) = x$

وذلك مهما تكن x, y, z عناصر من X.

يقال عن جبر *BCI* الضمني X إنه محدود (Bounded) إذا امتلك عنصراً مميزاً آخر يرمز له بـ 1 بحيث يحقق الخاصة: $\ll x * 1 = 0\ ;\ \forall x \in X \gg$.

لنرمـــز بـ: $\ll e(x) = 1 * x \gg$، ولنأخـــذ العمليـــة الثنائيـــة: $\ll x \wedge y = x * (x * y)\ ;\ \forall x, y \in X \gg$.

عندئذٍ نجد أن: $x \wedge e(x) = 0$، كذلك: $(x \wedge y) * x = (x \wedge y) * y = 0$.

1.2. المثاليات في جبور *BCI* الضمنية: **[3]**

ليكن X جبر *BCI* ضمنياً، ولتكن I مجموعة جزئية غير خالية من X.

1. يقال عن I إنها مثالي *(Ideal)* في X إذا كان $0 \in I$ وإذا تحقق الشرط:

$$\ll x * y \in I \text{ and } y \in I \text{ imply } x \in I \gg ;\ \forall x, y \in X$$

2. يقال عن I إنه أولي (*Prime*) إذا تحقق الشرط:

$$\ll x \wedge y \in I \text{ imply } x \in I \text{ or } y \in I \gg ;\ \forall x, y \in X$$

2. المثاليات الضبابية. *Fuzzy ideals.*

2.1. تعاريف واصطلاحات أساسية: [5]

1. لتكن A مجموعة غير خالية.

إن المجموعة الضبابية (*Fuzzy set*) في A هي دالة μ من A إلى المجـال $[0,1]$، ويـــصطلح أنـــه إذا كانـــت μ, η مجمـــوعتين ضـــبابيتين فـــي A فـــإن: $\mu \subseteq \eta \Leftrightarrow \mu(x) \leq \eta(x)$، وذلك أياً كان $x \in A$.

2. لتكن *A* مجموعة غير خالية، ولتكن $x\in A$ و $t\in[0,t]$.

إن النقطة الضبابية *(Fuzzy point)* x_t هي مجموعة ضبابية في *A* معرفة بالشكل:

أياً كان $y \in A$ فإن:
$$x_t(y)=\begin{cases} t & ; y=x \\ 0 & ; \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

3. ليكن *X* جبر *BCI* ضمنياً، وليكن *I* مثالياً في *X*.

تعرف الدالة المميزة *(Characteristic function)* للمثالي *I* التي يرمز لها بـ $\mathcal{X}_I$، بأنها المجموعة الضبابية المعرفة بالشكل:

أياً كان $x \in X$ فإن:
$$\mathcal{X}_I(x)=\begin{cases} 1 & ; x\in I \\ 0 & ; x\notin I \end{cases}$$

2.2. المثاليات الضبابية في جبور *BCI* الضمنية : [4]

ليكن *X* جبر *BCI* ضمنياً، ولتكن μ مجموعة ضبابية في *X*.

1. يقال عن μ إنها مثالي ضبابي *(Fuzzy ideal)* في *X* إذا حققت الشرطين الآتيتين:

$$i.\ \ \mu(0)\geq\mu(x)\quad ; \forall x\in X$$
$$ii.\ \ \mu(x)\geq\min\{\mu(x*y),\mu(y)\}\ \ ; \forall x,y\in X$$

2. يقال عن مثالي ضبابي μ إنه أولي *(Prime)* إذا حقق الشرط الآتي:

من أجل أي مثاليين ضبابيين θ,σ في *X* بحيث $\theta.\sigma\subseteq\mu$ يكون إما $\theta\subseteq\mu$ أو $\sigma\subseteq\mu$.

2.3. توطئة ([4]): ليكن *X* جبر *BCI* ضمنياً، عندئذٍ:

1. لأجل أي مثالي ضبابي μ في *X* فإنه:

إذا كان: $x*y=0$ فإن: $\mu(x)\geq\mu(y)$ ، وذلك أياً كان x,y من *X*.

2. لأجل أي مثالي ضبابي أولي μ في *X* فإن:

$$\mu(x\wedge y)\leq\max\{\mu(x),\mu(y)\}\quad ; \forall x,y\in X$$

2.4. مبرهنة ([1]):

ليكن X جبر BCI وليكن I مثالياً في X، إن المجموعة الضبابية المعرفة بالشكل:

أياً كان $x \in X$ فإن: $$\mu(x) = \begin{cases} b \,; x \in I \\ \alpha \,; x \notin I \end{cases}$$

تكون مثالياً ضبابياً في X، وذلك أياً كانت $\alpha, \beta \in [0,1]$ بحيث $\alpha < \beta \neq 0$.

2.5. نتيجة ([1]):

ليكن p مثالياً في جبر BCI ضمني X، عندئذٍ:

p مثالي أولي في X إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{X}_p$ مثالياً ضبابياً أولياً في X.

2.6. توطئة ([1]):

ليكن μ مثالياً ضبابياً أولياً في جبر BCI ضمني X، إن المجموعة:

$\mu_0 = \{x \in X \,;\, \mu(x) = \mu(0)\}$ مثالي أولي في X.

2.7. مبرهنة ([1]):

ليكن μ مثالياً ضبابياً أولياً في جبر BCI ضمني محدود X، عندئذٍ:

(1). $\mu(0) = 1$

(2). أياً كان x من X، فإن: $\ll \mu(x) = \mu(0) \; or \; \mu(e(x)) = \mu(0) \gg$.

(3). أياً كان x من X، فإن: $\ll \mu(x) = \mu(0) \; or \; \mu(x) = \mu(1) \gg$.

3. الطيوف الضبابية الأولية في جبور BCI الضمنية وسماتها التبولوجية.

Fuzzy Prime Spectrums of Implication BCI-Algebras.

لتكن $Spec_F(X)$ مجموعة المثاليات الضبابية الأولية في جبر BCI الــضمني X، ولنسند إلى كل مثالي ضبابي η في X المجموعتين:

$$D(\eta) = \{\mu \in Spec_F(X) \,;\, \eta \nsubseteq \mu\} \,,\; V(\eta) = \{\mu \in Spec_F(X) \,;\, \eta \subseteq \mu\}$$

في [1] جرى تبيان أن المجموعة $\tau_X = \{D(\eta); \eta \text{ مثالي ضبابي في } X\}$ تشكل تبولوجيــا على $Spec_F(X)$ "تبولوجيا زاريسكي"، ومن ثمَّ تم الحصول على الفــضاء التبولــوجي

$(Spec_F(X), \tau_X)$ "الطيف الضبابي الأولي لجبر BCI الضمني X"، زد على ذلك تم البرهان على صحة السمات التبولوجية التالية للفضاء $Spec_F(X)$:

3.1. مبرهنة ([1]): ليكن X جبر BCI ضمنياً، إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X)$ فضاء T_0 .

3.2. مبرهنة ([1]): ليكن X جبر BCI ضمنياً محدوداً، إن المجموعة: $\mathfrak{B} = \{D(x_\beta);\ \beta \in K \subseteq]0,1]\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ_X على الفضاء $Spec_F(X)$.

3.3. مبرهنة ([1]): ليكن X جبر BCI ضمنياً محدوداً، إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X)$ فضاء متراص *(Compact)* وغير مترابط *(Disconnected)*.

في هذه الورقة العلمية نمضي إلى أبعد من ذلك، سوف نورد سمات تبولوجية أخرى لهذا الصنف الخاص من الفضاءات التبولوجية.

3.4. مبرهنة: ليكن X جبر BCI ضمنياً محدوداً، ولتكن $\beta_1, \beta_2 \in]0,1]$ و$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$، عندئذٍ: $D(x_{\beta_1}) \cap D(y_{\beta_2}) = D((x \wedge y)_\beta)$، وذلك أياً كانت $y \in X$, .

البرهان: ليكن $\mu \in D(x_{\beta_1}) \cap D(y_{\beta_2})$، عندئذ: « $\mu \in D(x_{\beta_1})$ and $\mu \in D(y_{\beta_2})$ »، ومن ثمَّ: « $\mu(x) < \beta_1 \leq \mu(0)$ and $\mu(y) < \beta_2 \leq \mu(0)$ »، وهذا يعني أن: « $\mu(x) \neq \mu(0)$ and $\mu(y) \neq \mu(0)$ »، ونظراً إلى أن μ مثالي ضبابي أولي ينتج أن: $\mu(x) = \mu(y) = \mu(1)$ ، كذلك نجد أن:

$$\mu(x \wedge y) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\} = \mu(1) = \min\{\mu(x), \mu(y)\} < \min\{\beta_1, \beta_2\} = \beta$$

يتضح من ذلك أن: $\mu \in D((x \wedge y)_\beta)$.

من جهة ثانية: ليكن $\mu \in D((x \wedge y)_\beta)$، يترتب على ذلك وفقاً للتوطئة (2.3) أن:

$$\text{« } \mu(x) \leq \mu(x \wedge y) < \beta \leq \beta_1 \ \text{and}\ \mu(y) \leq \mu(x \wedge y) < \beta \leq \beta_2 \text{ »}$$

ومن ثم: « $\mu \in D(x_{\beta_1})$ and $\mu \in D(y_{\beta_2})$ »، ومنه: $\mu \in D(x_{\beta_1}) \cap D(y_{\beta_2})$.

ليكن X_α جبر *BCI* ضمنياً محدوداً، وليكن $Spec_F(X_\alpha)$ الطيف الضبابي الأولي لـ *X*، ولنفرض أن $Spec_F(X_\alpha)$ يحقق الشرط الآتي:

أياً كان $\alpha \in [0,1[$ و $\mu \in Spec_F(X_\alpha)$ فإن: $\mu(1) = \alpha$.

عندئذ نستطيع أن نبرهن على صحة السمات التبولوجية التالية للفضاء $Spec_F(X_\alpha)$.

3.5. مبرهنة: إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء هاوسدورف (*Hausdorff*).

البرهان: ليكن μ, σ عنصرين مختلفين من الفضاء $Spec_F(X_\alpha)$ ولنثبت في البداية أن $\mu_0 \neq \sigma_0$.

لنفرض جدلاً أن $\mu_0 = \sigma_0$ عندئذ أياً كان $x \in X$ نجد أنه: إذا كان $x \in \mu_0 = \sigma_0$ فإن $\mu(x) = \mu(0) = 1 = \sigma(0) = \sigma(x)$، كذلك إذا كان $x \notin \mu_0 = \sigma_0$ فإن $\mu(x) = \mu(1) = \alpha = \sigma(1) = \sigma(x)$ وهذا يناقض كون $\mu \neq \sigma$، ومن ثمَّ لابدَّ أن يكون $\mu_0 \neq \sigma_0$، وهذا يعني أنّ ثمة عنصراً مثل $x \in \mu_0$ بحيث $x \notin \sigma_0$، وعليه يكون $\mu(x) = \mu(0)$، ومن ثمَّ $\mu(e(x)) \neq \mu(0)$، يترتب على ما سبق أن: « $e(x) \notin \mu_0 \ and \ x \notin \sigma_0$ »، ومنه: « $\mu(e(x)) = \mu(1) \ \ and \ \ \sigma(x) = \sigma(1)$ ».

من أجل $t_1 \in]\alpha, 1]$ نجد أن: $\left(\left(e(x)\right)_{t_1}\right)\left(e(x)\right) = t_1 > \alpha = \mu\left(e(x)\right)$

وهذا يعني أن: $\mu \in D\left(\left(e(x)\right)_{t_1}\right)$.

كذلك: من أجل $t_2 \in]\alpha, 1]$ نجد أن: $\left(x_{t_2}\right)(x) = t_2 > \alpha = \sigma(x)$،

وهذا يعني أن: $\sigma \in D\left(x_{t_2}\right)$.

زد على ذلك أنه من أجل $t = \min\{t_1, t_2\}$ نجد أن:

$$D\left(\left(e(x)\right)_{t_1}\right) \cap D\left(x_{t_2}\right) = D\left(\left(e(x) \wedge x\right)_t\right) = D(0_t) = \emptyset$$

وبذلك يكون الفضاء $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء هاوسدورف.

3.6. مبرهنـــة: إن الطيـــف الـــضبابي الأولـــي $Spec_F(X_\alpha)$ فـــضاء منـــتظم *(Regular)*.

البرهـــان: لتكن $V(\eta)$ مجموعة مغلقة في $Spec_F(X_\alpha)$ (إذْ η مثالي ضبابي في X_α)، وليكن μ مثالياً ضبابياً أولياً لا ينتمـــي إلـــى $V(\eta)$، عندئـــذٍ ونظـــراً إلـــى أن $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء هاوسدورف فإنه: أياً كان θ من $V(\eta)$ يوجد جوار W_θ لـ θ وجوار U_μ لـ μ بحيث: $U_\mu \cap W_\theta = \emptyset$، ونظراً إلـــى أن $Spec_F(X_\alpha)$ فـــضاء متراص فإن $V(\eta)$ مجموعة متراصة، ومن ثمَّ يمكننا أن نستنتج من التغطية المفتوحـــة $\{W_\theta\}_{\theta \in V(\eta)}$ لـ $V(\eta)$ تغطيـــة جزئيـــة منتهيـــة $\{W_{\theta_1}, W_{\theta_2}, \dots, W_{\theta_n}\}$ لـ $V(\eta)$، أي إنَّ: $V(\eta) \subseteq W_{\theta_1} \cup W_{\theta_2} \cup \dots \cup W_{\theta_n}$، مـــــع ملاحظـــــة أنّ: $U_{i\mu} \cap W_{\theta i} = \emptyset \, ; i = 1,2,\dots,n$.

لنضع: $W = W_{\theta_1} \cup W_{\theta_2} \cup \dots \cup W_{\theta_n}$ و $U = U_{1\mu} \cap U_{2\mu} \cap \dots \cap U_{n\mu}$.

إن W مجموعة مفتوحة في $Spec_F(X_\alpha)$ تحوي $V(\eta)$، كذلك إن U مجموعة مفتوحة في $Spec_F(X_\alpha)$ تحوي μ، فضلاً عن ذلـــك إن: $U \cap W = \emptyset$، وبـــذلك يكون الفضاء $Spec_F(X_\alpha)$ فضاءً منتظماً.

3.7. نتيجة: إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء T_3.

3.8. مبرهنـــة: إن الطيـــف الـــضبابي الأولـــي $Spec_F(X_\alpha)$ فـــضاء نـــاظمي *(Normal)*.

البرهان: لتكن $V(\eta), V(\mu)$ مجموعتين مغلقتين ومنفصلتين في $Spec_F(X_\alpha)$ (إذْ η, μ مثاليان ضبابيان في X_α)، نظراً إلى أن $Spec_F(X)$ فضاء منتظم فإنه أيـــاً كـــان $\theta \in V(\mu)$ فثمـــة جـــوار W_θ لـ $V(\eta)$ وجـــوار U_θ لـ θ بحيـــث: $U_\theta \cap W_\theta = \emptyset$، ولما كانت المجموعة $V(\mu)$ متراصـــة اســـتنتجنا مـــن التغطيـــة المفتوحة $\{U_\theta\}_{\theta \in V(\mu)}$ لـ $V(\mu)$ تغطية جزئية منتهيـــة $\{U_{\theta_1}, U_{\theta_2}, \dots, U_{\theta_n}\}$ لـ $V(\mu)$، مع ملاحظة أن: $W_{\theta i} \cap U_{\theta i} = \emptyset$.

لنضع: $W = W_{\theta_1} \cup W_{\theta_2} \cup \dots \cup W_{\theta_n}$ و $U = U_{\theta 1} \cap U_{\theta 2} \cap \dots \cap U_{\theta n}$

نلاحظ أن W و U مجموعتان مفتوحتان في $Spec_F(X_\alpha)$، كذلك: $V(\eta) \subseteq W$ و $V(\mu) \subseteq U$ فضلاً عن ذلك نجد أن: $W \cap U = \emptyset$.

وبذلك يكون الفضاء $Spec_F(X_\alpha)$ فضاءً ناظمياً.

3.9. نتيجة: إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء T_4 .

3.10. مبرهنة: إن الطيف الضبابي الأولي $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء منتظم تماماً *(Completely regular)*.

البرهان: لتكن $V(\eta)$ مجموعة مغلقة في $Spec_F(X_\alpha)$ (إذْ η مثالي ضبابي في X_α) وليكن μ مثالياً ضبابياً أولياً لا ينتمي إلى $V(\eta)$، إن المجموعة وحيدة العنصر $\{\mu\}$ مجموعة مغلقة في $Spec_F(X_\alpha)$ لأنّه فضاء T_1، ونظراً إلى أن $Spec_F(X_\alpha)$ فضاء ناظمي يتبيّن لنا وفقاً لتمهيدية يوريسون أنه يوجد تطبيق مستمر $f: Spec_F(X_\alpha) \to [0,1]$ بحيث: $f(\{\mu\}) = \{0\}$ و $f(V(\eta)) = \{1\}$، أي إنَّ: $f(\mu) = 0$ و $f(V(\eta)) = \{1\}$ ، وبذلك يكون $Spec_F(X_\alpha)$ فضاءً منتظماً تماماً.

ليكن X جبر BCI ضمنياً، ولتكن $Spec(X)$ مجموعة المثاليات الأولية في X، وإذا زودنا هذه المجموعة بتبولوجيا زاريسكي نحصل على الطيف الأولي للجبر X (انظر[1])، بينّا من خلال المبرهنة الآتية أن الفضاءين $Spec(X), Spec_F(X)$ متكافئان تبولوجياً في جبر BCI الضمني المحدود.

3.11. مبرهنة: ليكن X جبر BCI ضمنياً محدوداً، إن التطبيق: $f: Spec(X) \to Spec_F(X)$ المعرف بالصيغة: $f(p) = \mathcal{X}_p$ يكون هوميومورفيزماً *(Homeomorphism)*.

البرهان: من الواضح أن التطبيق f تقابل، ولنثبت فيما يأتي أنه مستمر.

لتكن $D(\eta)$ مجموعة مفتوحة في $Spec_F(X)$ ولنبيّن أن $f^{-1}(D(\eta))$ مجموعة مفتوحة في $Spec(X)$، ومن أجل ذلك يكفي أن نبيّن أن: $f^{-1}(D(\eta)) = \cup_{0<t<1} D(\eta_t)$.

من جهة أولى، ليكن $p \in f^{-1}((\eta))$، عندئذٍ $f(p) = \mathcal{X}_p \in D(\eta)$ ومنه $\eta \nsubseteq \mathcal{X}_p$ وهذا يعني أنه يوجد $x \in X$ بحيث $\mathcal{X}_p(x) < \eta(x)$، يترتب على ذلك أن: $\mathcal{X}_p(x) = 0$ ومن ثمَّ $x \notin p$، نستطيع عندئذٍ أن نأخذ t_1 بحيث $0 < t_1 < \eta(x)$ وعليه يكون $x \in \eta_{t1}$ ونظراً إلى أن $x \notin p$ نستنتج أن $\eta_{t1} \nsubseteq p$ ومن ثمَّ: $p \in D(\eta_{t1}) \subseteq \cup_{0<t<1} D(\eta_t)$.

من جهة أخرى، ليكن $p \in \cup_{0<t<1} D(\eta_t)$ عندئذٍ يوجد $0 < t < 1$ بحيث $p \in D(\eta_t)$ ومن ثمَّ $\eta_t \nsubseteq p$ وهذا يعني أنه يوجد $x \in \eta_t$ بحيث $x \notin p$، يترتب على ذلك أن: $\eta(x) \geq t > 0 = \mathcal{X}_p(x)$ ومنه $\eta \nsubseteq \mathcal{X}_p$، ومن ثمَّ: $f(p) = \mathcal{X}_p \in D(\eta)$ وهذا يعني أن: $p \in f^{-1}(D(\eta))$.

لنثبت الآن أن f^{-1} مستمر، ومن أجل ذلك يكفي أن نبين أن $f(D(I))$ مجموعة مفتوحة في $Spec_F(X)$ وذلك من أجل I مثالي في X.

في الواقع بينّا أن: $f(D(I)) = D(\mathcal{X}_I)$.

ليكن $\mu \in f(D(I))$ عندئذٍ يوجد $p \in D(I)$ ومنه $I \nsubseteq p$ بحيث $f(p) = \mu = \mathcal{X}_p$، وهذا يعني أنه يوجد $x \in I$ بحيث $x \notin p$، ومن ثمَّ $\mathcal{X}_p(x) = 0 < 1 = \mathcal{X}_I(x)$، يتضح من ذلك أن: $\mathcal{X}_I \nsubseteq \mathcal{X}_p = \mu$ ومنه: $\mu \in D(\mathcal{X}_I)$.

العكس: ليكن $\mu \in D(\mathcal{X}_I)$، عندئذٍ $\mathcal{X}_I \nsubseteq \mu$، كذلك يوجد $p \in Spec(X)$ بحيث $f(p) = \mu = \mathcal{X}_p$، يتضح مما سبق أنه يوجد $x \in X$ بحيث: $\mathcal{X}_I(x) > \mu(x) = \mathcal{X}_p(x)$ يترتب على ذلك أن $I \nsubseteq p$، ومن ثمَّ $p \in D(I)$، وعليه يكون: $\mu = f(p) \in f(D(I))$، وبذلك يكون f هوميومورفيزماً.

REFERENCES

[1]Al-ammar, D., 2014. Implicative BCI-Algebras, Master thesis University of Damascus.

[2]Huang, Y., 2006. BCI-Algebra, Science Press-Beijing.

[3]Koudsi, E., 2007. Theory of Algebras, University of Damascus-Sciences College.

[4]Liu, Y. and Meng, J., 2001. Fuzzy Ideals in BCI-Algebras, Fuzzy Sets and Systems. 123, 227-237.

[5]Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets, Inform. And Control. Vol.8, 338-353.