تطبيق مبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيديات "Nakayama" وبُعد "Krull" في دراسة العلاقة بين مناطق برفير والحلقات الناظمية محلياً

د. شوقي محمد الراشد*

الملخص

يعرض هذا البحث العلاقة بين مناطق "Pruefer" وحلقات التموضع عند مثالي أعظمي (الحلقات الناظمية محلياً، وحلقات التقييم محلياً)، فقد تم عرض فكرة عامة عن أهمية مناطق "Pruefer"، والحلقات الناظمية محلياً، وحلقات التقييم، وتعاريف ومفاهيم أساسية من الجبر التبادلي في الفقرة الأولى (المقدمة)، وفي الفقرة الثانية مبرهنة "Cayley-Hamilton"، وتمهيديات"Nakayama" في المودولات (المقاسات) منتهية التوليد، بالإضافة إلى مفهوم التموضع "Localization" لحلقة عند مثالي أولي فيها . في الفقرة الثالثة عرض العلاقة بين مناطق "Pruefer" وحلقات التقييم محلياً من خلال المبرهنة (3–2)[16,9]، وفي الجزء الأخير من هذه المقالة تم إثبات مبرهنة (4–3) تبيّن أن كل حلقة ناظمية محلياً تُكافئ حلقة تقييم محلياً ضمن

* أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة AIU Arab International University، عضو هيئة تدريسية في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق .

شروط، حيث تم استخدام بُعد "Krull"، ومفهوم المثالي الابتدائي "$\mu - Primary$"، ومبرهنة "Cayley-Hamilton"، وتمهيديات "Nakayama"، ومن ثم نتيجة (4−4) تبيّن أن كل منطقة "Pruefer" تكافئ حلقة الناظمية محلياً ،وذلك بالاستفادة من الشروط في المبرهنة (4−3).

الكلمات المفتاحية: مناطق برفير، بُعد "Krull"، حلقة ناظمية، مبرهنة "Cayley-Hamilton"، تمهيدية"Nakayama"، حلقة تقييم.
التصنيف الرياضياتي العالمي (2010): **13A18** .

Apply Cayley-Hamilton's Theorem, Nakayama's Lemma and Krull's Dimension to Study the Relationship between the Pruefer's Domains and Locally Normal Rings

Dr. Shawki. M. AL Rashed*

Abstract

This paper presents the relationship between the Pruefer's Domains and the localization of rings at maximal ideal(locally normal rings and locally valuation rings), where it is introduced some of the definitions and basic properties from commutative algebra in the first section (introduction), in the second section was presented the Cayley-Hamilton's theorem and Nakayama's lemma for finitely generated modules and the concept of the localization at prime ideal. In the third section, it is presented the relationship between Pruefer's Domain and locally valuation ring in theorem(3-2) [16,9]. In the last section it is proved in the theorem (4-3) that every locally normal ring equivalent to locally valuation ring, where it used the Krull's dimension, the concept of the primary ideal, Cayley-Hamilton's theorem and Nakayama's lemma, then it is presented a result (4-4) which shows that Pruefer's Domain equivalent to locally normal ring, by using the conditions in theorem (4-3).

Key words: Pruefer's Domain, Krull's Dimension, Normal Ring, Cayley-Hamilton's Theorem, Nakayama's Lemma, Valuation Ring.

Mathematics Subject Classification 2010: **13A18**.

* Associate Professor at Arab International University, and Academic Staff at Damascus University

1. مقدمة:

إن أهمية دراسة مناطق بريفر في الجبر المجرد تكمن في عرض قابلية القلب لمثالي "Invertible Ideals"، وأهمية دراسة الحلقات الناظمية في معرفة الغلاقة أي العناصر الجبرية التي تمثل أصفار معادلات كثيرات حدود وتشكل المتنوعات الآفينية "Affine Varieties"، أو ما تُسمى المجموعات الجبرية " Algebraic Sets"، بينما حلقات التقييم تكون أهميتها في إعطاء تقييم لعناصر حلقة، حيث إن بعض الأبحاث عرضت العلاقة بين حلقات التقييم وأنواع أخرى من الحلقات، وذلك لسهولة التعامل معها (مثلاً [1] عرض دراسة العلاقة بين حلقات ناظمية وحلقات التقييم المتقطع وحلقات التموضع). وبالنسبة إلى أهمية صفة الناظمية محلياً، أي إن حلقة التموضع لهذه الحلقة عند هذه النقطة تكون منطقة مغلقة جبرياً، وهذا ما يُساعد في دراسة بعض الخواص الجبرية والتبولوجيا في مجموعة جبرية تحوي هذه النقطة كجوار مغلق جبرياً لهذه النقطة، ولهذا أهمية كبيرة في الهندسة الجبرية " Algebraic Geometry" ونظرية الشواذ "Singularity Theory". وعلى سبيل المثال إن بعض الصفات لا تكون محققة على كامل الحلقة، وإنما محققة على حلقة التموضع، حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ليست حلقة آرتينية، ولكن حلقة التموضع لها عند مجموعة مغلقة ضربياً $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$، تكون حلقة آرتينية.

هذا البحث يُعد متابعةً وامتداداً لما هو معروض في [1] وربطه بمفهوم مناطق "Pruefer"، ويقدم دراسة حول العلاقة بين هذه المفاهيم اعتماداً على بُعْدِ "Krull" ومبرهنة "Cayley-Hamilton" وتمهيدية "Nakayama"، بالإضافة إلى المثاليات الابتدائية، ومفهوم الحلقة المحلية، لتكون أداة، ووسيلة ربط بين هذه المفاهيم.

1. تعاريف، ومبرهنات أساسية.

1-1. تعريف [1,2,3,4,5,7,14,16]: لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد(أو اختصاراً حلقة واحدية تبديلية)، ونرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في R بالرمز $U(R)$. نقول إن الحلقة R:

1) منطقة تكاملية إذا وفقط إذا كانت R لا تحوي قواسم للصفر "zero- divisor" ($0 \neq a \in R$ قاسم للصفر في R إذا وفقط إذا تحقق $[b \in R: ab = 0 \Longrightarrow b = 0]$)، ونرمز لها بالرمز ID .

2) منطقة مثاليات رئيسة إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية، وكل مثالي I في R مثالي رئيسي في R، أي إنه من أجل أي مثالي I في R يوجد عنصر $r \in R$ يولد المثالي I في R، ونعبر عن ذلك بالشكل $x \in I =< r >_R \Leftrightarrow \exists a \in R: x = ra$ ويسمى I مثالي رئيسي في R، ونرمز لمنطقة المثاليات الرئيسة بالرمز PID.

3) حلقة محلية إذا وفقط إذا وجِد مثالي أعظمي وحيد، مثل μ في R، ويُرمز للحلقة المحلية بالرمز (R, μ).

4) يُسمى العنصر $\alpha \in Quot(R)$ جبري على R إذا وفقط إذا وُجِد حدودية واحدية "monic Polynomial" (أمثال الحد ذي الدرجة الأكبر يساوي الواحد) $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in R[x]$ تحقق $f(\alpha) = 0$، حيث $K = \mathrm{Quot}(R) = \{\frac{a}{b}: a, b \in R, b \neq 0\}$ حقل القسمة للحلقة R.

5) حلقة عادية أو ناظمية "Normal Ring" إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية ID و $R = \mathrm{Int}_K(R)$، حيث $\mathrm{Int}_K(R) = \{x \in K: R$ عنصر جبري على $x\}$ تسمى غُلاقة الحلقة R في K.

6) حلقة نوثرية "Noetherian Ring " إذا وفقط إذا كان كل مثالي في R منتهي التوليد في R (أو أي سلسلة متزايدة من المثاليات في R تنقطع).

7) إذا كان I مثالي في الحلقة R، فإن جذر المثالي I يُعرف على أنه المثالي

$$\sqrt{I} = \{r \in R: \exists n \in \mathbb{N}; r^n \in I\}$$

1−2. تعريف[1,2,6,14]: لتكن R حلقة تبديلية واحدية نعرف بعد "Krull" للحلقة R بالشكل التالي:

$$\dim \mathrm{R} = \mathrm{Sup}\{\mathrm{n}: \mathrm{P}_0 \subsetneq \mathrm{P}_1 \subsetneq \mathrm{P}_2 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq \mathrm{P}_\mathrm{n}; \mathrm{P}_\mathrm{i} \in \mathrm{Spec(R)}, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}$$

حيث Spec(R) مجموعة كل المثاليات الأولية في الحلقة R.

أمثلة على ذلك: إذا كانت R حقلاً فإن $\dim \mathrm{R} = 0$، وفي حالة R هيPID وليست حقلاً فإن $\dim \mathrm{R} = 1$، ومن أجل حلقة كثيرات الحدود $\mathrm{R} = \mathbb{R}[\mathrm{x}, \mathrm{y}, z]$ المُعرفة على حقل الأعداد الحقيقية فإن بُعدها $\dim \mathrm{R} = 3$.

1−3. تعريف**[2,6,14,16]:** لتكن R حلقة تبديلية واحدية، وليكنI و Q مثاليات في R عندئذ:

- نقول عن المثالي I إنه متلاشٍ (قابل للعدم) "nilpotent" إذا وجد $n \in \mathbb{N}$ يحقق $I^n = \{0\}$.
- نقول عن Q إنه مثالي ابتدائي في R إذا وفقط إذا تحقق **أحد** الشروط الآتية:

1) $\mathrm{Q} \neq \mathrm{R}, \mathrm{a.b} \in \mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{a} \in \mathrm{Q} \vee \mathrm{b} \in \sqrt{\mathrm{Q}}$
2) $\mathrm{Q} \neq \mathrm{R}, \mathrm{a.b} \in \mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{a} \in \mathrm{Q} \vee \exists \mathrm{n} \geq 1: \mathrm{b}^\mathrm{n} \in \mathrm{Q}$
3) $\mathrm{R}/\mathrm{Q} \neq \bar{0}, \bar{\mathrm{b}} \in \mathrm{R}/\mathrm{Q}\ \mathrm{zero-divisor} \Rightarrow \bar{\mathrm{b}} \in \mathrm{N}\left(\mathrm{R}/\mathrm{Q}\right) = \sqrt{\mathrm{Q}}/\mathrm{Q}$

- إذا كان Q مثالي ابتدائي في R فإننا نرمز له بالرمز $\mathrm{P-primay}$ حيث $\mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{Q}}$.
- تسمى المجموعة المنتهية من المثاليات الابتدائية $\{Q_1, Q_2, \dots\dots, Q_r\}$ في R أنها تحليل ابتدائي مختزل "Irreducible Decomposition" للمثالي I إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتي:

$$\bigcap_{j\neq i} \mathrm{Q_j} \not\subseteq \mathrm{Q_i} \text{ و } \sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}\ ,\ i \neq j \text{ و } I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$$

1−4. نتيجة **[2,6,14]:** إذا كان Q مثالي ابتدائي في حلقة واحدية تبديلية R، فإن $P = \sqrt{Q} \in Spec(R)$ أصغر مثالي أولي يحوي Q.

1−5. مبرهنة **[2,6,8,14]:** إذا كانت R حلقة نوثرية فإن الجذر الأساسي$N(R)$ متلاشٍ.

1−6. مبرهنة **[2,5,6,8,14]:** إذا كانت R حلقة نوثرية فإن أي مثالي غير صفري في R يملك تحليلاً ابتدائياً مختزلاً .

2. مبرهنة "Cayley-Hamilton" وتمهيديات "Nakayama" في المودولات (المقاسات) منتهية التوليد.

2−1. مبرهنة [2,3,6,11] "Cayley-Hamilton": لتكن R حلقة واحدية تبديلية و M هو $R-module$ منتهي التوليد و I مثالي في R و $\varphi \in Hom_R(M, M)$. عندئذ:

إذا كان $\varphi(M) \subseteq I.M$ ، فإنه توجد حدودية

$$\psi_\varphi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in R[x]$$

تحقق $\psi_\varphi(\varphi) = 0$ و $\forall i \in \{1,2, \dots, n\}, a_i \in I^i$.

نعرض تمهيدية "Nakayama" الأساسية، وبعض نتائجها [2,3,11,12,13,14].

2−2. تمهيدية "Nakayama" الأساسية: ليكن M هو $R-module$ مودول منته التوليد و I مثالي في R يحقق $I \subseteq J(R)$، حيث $J(R)$ أساس جاكبسون (تقاطع كل المثاليات الأعظمية في R).

عندئذ: إذا كان $I.M = M$ فإن $M = \{0\}$ المودول الصفري .

2−3. نتيجة" $Nak(1)$": لتكن (R, μ) حلقة محلية وليكن M هو $R-module$ منتهي التوليد. عندئذ: إذا كان $\mu.M = M$ فإن $M = \{0\}$ المودول الصفري .

2−5. نتيجة" $Nak(2)$": لتكن (R, μ) حلقة محلية و M هو $R-module$ منتهي التوليد غير صفري. إن $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ مجموعة أصغرية (بالنسبة لعدد العناصر) مولِّدة للمودول M إذا وفقط إذا كانت $\{\overline{m_1}, \overline{m_2}, \dots, \overline{m_n}\}$ تشكل قاعدة للفضاء الشعاعي $M/_{\mu.M}$ المعرف على الحقل $R/_\mu$ حيث

$.\forall\ \mathbf{i}\ \in\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ldots.,\ \mathbf{n}\}\ :\quad \overline{m_i}=m_i+\mu.M$

نقدم فكرة عامة عن التموضع في الحالة العامة ومن ثم عند المثالي الأولي، و ذلك من خلال التعريف التالي [1,2,8,10,14,16] .

2–6. تعريف: لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

- نقول عن المجموعة $\emptyset\neq S\subseteq R$ إنها مغلقة ضربياً إذا وفقط إذا تحقق:

$$1\in S \text{ و } \forall s_1,s_2\in S: s_1.s_2\in S$$

- لتكن S مجموعة مغلقة ضربياً في R و لنعرف علاقة تكافؤ ~ على الجداء الديكارتي$(R\times S)$ بالشكل:

$$\forall(r,s),(r`,s`)\in R\times S:(r,s)\sim(r`,s`)\Leftrightarrow\exists u\in S:u(rs`-sr`)=0$$

نرمز لصفوف التكافؤ بالرمز $\left[\frac{r}{s}\right]=\{(r`,s`)\in R\times S:(r,s)\sim(r`,s`)\}$ واختصاراً بالرمز $\frac{r}{s}$.

ونرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز $S^{-1}R$ أي إن:

$$S^{-1}R=\frac{R\times S}{\sim}$$

نُعرف على مجموعة صفوف التكافؤ$S^{-1}R$ قانونَي تشكيل داخليين:

$$\forall(r_1,s_1),(r_2,s_2)\in R\times S:$$
$$\left[\frac{r_1}{s_1}\right].\left[\frac{r_2}{s_2}\right]=\left[\frac{r_1.r_2}{s_1.s_2}\right] \text{ و } \left[\frac{r_1}{s_1}\right]+\left[\frac{r_2}{s_2}\right]=\left[\frac{r_1.s_2+r_2.s_1}{s_1.s_2}\right]$$

عندئذ تكون $(S^{-1}R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية الحيادي فيها هو $\frac{1}{1}=1$.

(في حالة $0\in S$ نحصل على التموضع التافه $S^{-1}R=\{0\}$)

8) وفي حالة $S=R\backslash P$ حيث $P\in Spec(R)$ مثالي أولي في R، فإن الحلقة $S^{-1}R=\left\{\frac{a}{b}:a\in R,b\notin P\right\}$ تُسمى حلقة التموضع لـ R عند المثالي الأولي P، ويُرمز لها بالرمز R_P.

9) يُقال عن خاصة ما للحلقة R إنها محلية إذا وفقط إذا كانت حلقة التموضع R_μ تحقق هذه الخاصة من أجل أي مثالي أعظمي μ في R .

10) إذا كانت $\mathrm{Spec(R)}$ مجموعة المثاليات الأولية في R و S مجموعة مغلقة ضربياً في R، فإنه يوجد تقابل بين عناصر $\mathrm{Spec(R)}$ و $\mathrm{Spec(S^{-1}R)}$ وذلك من أجل كل مثالي أولي $\mathrm{P \in Spec(R)}$ يحقق $\mathrm{P \cap S = \emptyset}$.

مثال: من أجل $R = \mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة و $P =< 3 >$ مثالي أولي في R و $\mathrm{S = R\backslash P}$ تكون حلقة التموضع لـ $\mathbb{Z}$ عند المثالي الأولي P بالشكل:

$$\mathbb{Z}_{\langle 3\rangle} \coloneqq \mathrm{S^{-1}R} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} : \mathrm{a, b \in R, b \notin< 3 >}\right\} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} : \mathrm{a, b \in R, 3 \nmid b}\right\}$$

$$\mathrm{S^{-1}P \coloneqq S^{-1} < 3 >=} \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} : \mathrm{a \in< 3 >, b \notin< 3 >}\right\} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} : \mathrm{3\backslash a\ \ ,3 \nmid b}\right\}$$

المبرهنة الآتية تصف كيفية بناء حلقة محلية (تموضع حلقة عند مثالي أولي) والمثالي الأعظمي الوحيد.

2−7. مبرهنة[2,14]: لتكن R حلقة تبديلية واحدية، و P مثالي أولي في R . عندئذٍ $(R_P\,,\mu)$ حلقة محلية، حيث $\mu =: P.R_P = R_P\backslash U(R_P)$ و $U(R_P)$ مجموعة العناصر القابلة للقلب في $_P$.

3. **حلقات التقييم محلياً** "Locally Valuation Ring" **و مناطق بريفر** "Pruefer's Domain":

3−1.تعريف [1,6,9,15,16]:

a. إذا كانت R منطقة تكاملية ID، فإن R تسمى حلقة تقييم "Valuation Ring" إذا وفقط إذا تحقق:

$$\mathrm{a \in Quot(R) : a \in R\ or\ \frac{1}{a} \in R}$$

حيث $\mathrm{Quot(R)} = \{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} : \mathrm{x, y \in R, y \neq 0}\}$ حقل القسمة للمنطقة التكاملية R، ويُرمز لحلقة التقييم بالرمز VR .

b. إذا كانت R حلقة تقييم، فإن R تُسمى حلقة تقييم متقطعة أو منفصلة إذا وفقط إذا كانت R حلقة نوثرية وليست حقلاً، ويُرمز لها بالرمزDVR.

c. إذا كانت R منطقة صحيحة ID ، فإن R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كان كل مثالي منتهي التوليد I في R قابل للقلب، أي إن $I.I^{-1} = R$ حيث
$$I^{-1} = \{r \in Quot(R) : \quad r.I \subset R\} .$$
إن المبرهنة التالية تعرض العلاقة بين مناطق بريفر و حلقات التقييم محلياً .

2−3.مبرهنة [9,16]: لتكن R منطقة صحيحة ID.

إن R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كانت حلقة التموضع للحلقة R عند أي مثالي أعظمي μ منها حلقة تقييم. أي إن R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كانت حلقة التموضع R_μ حلقة تقييم، وذلك أيّاً كان μ مثالياً أعظمياً في R .

4−3. مبرهنة [1,14] : لتكن R حلقة تحليل وحيد و $p \in R$ عنصراً أولياً في R و $R_{<p>}$ حلقة التموضع للحلقة R عند المثالي $P =< p >$. عندئذٍ يوجد تطبيق تقيم متقطع v من أجله يكون $R_v = R_{<p>}$ حلقة تقييم.

4. مناطق بريفر "Pruefer's Domain" و**الحلقات الناظمية محلياً** " Locally Normal Ring" :

نبيّن من خلال المبرهنة التالية بأن كل حلقة تقييم هي حلقة ناظمية.

1−4.مبرهنة [9,16]: إذا كانت R حلقة تقييم، فإن $R = Int_K(R)$، حيث $K = Quot(R)$ أي إن R حلقة ناظمية.

إلا أن عكس المبرهنة السابقة (4−1) ليس صحيحاً في الحالة العامة، أي إنه ليس بالضرورة أن تكون الحلقة الناظمية حلقة تقييم، مثال على ذلك $R = \mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة هي حلقة ناظمية ولكنها ليست حلقة تقييم، وذلك لأن $Int_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ و $a = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q} = Qout(\mathbb{Z})$ و لكن $a \notin R$ ، $\frac{1}{a} = \frac{3}{5} \notin R$.

في [1] تم الإثبات على أن العكس صحيح ولكن ضمن شروط، أي إنه كل حلقة ناظمية هي حلقة تقييم و لكن في حالة الحلقات المحلية و ذات البُعد الواحد.

بذات المنحى والعرض في [1] ومن خلال استخدام مبرهنة "Cayley-Hamilton" وتمهيدية "Nakayama" وإضافة بعض الشروط سنبيّن في المبرهنة التالية (4−3)

أن حلقة التقييم محلياً تُكافئ الحلقة الناظمية محلياً، ولكن قبل ذلك نعرض تمهيدية تبيّن إحدى خواص المثاليات الابتدائية التي سنحتاج إلى استخدامها في المبرهنة (3−4).

4−2. تمهيدية [1,14]: لتكن R حلقة نوثرية وQ مثالي في R ولا يساويها. إذا كان Q هو $P-\text{primary}$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب $n \geq 1$ يحقق:
$$P^n \subseteq Q \subsetneq P^{n-1}$$

4−3. مبرهنة: لتكن R حلقة نوثرية ومنطقة تكاملية بُعدها $\dim(R)=1$ و P مثالي أعظمي في R . إن القضايا الآتية متكافئة:

1) $T=R_P$ حلقة عادية "Normal Ring" .

2) $\mu=P.R_P$ مثالي رئيسي في R .

3) من أجل أي مثالي I في T مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n \geq 1$ يحقق : $I=\mu^n$.

4) من أجل أي مثالي I في T مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n \geq 1$ و $t \in T$ يحققان : $I=<t^n>$.

5) T حلقة تقييم منفصل.

الإثبات:

بدايةً نلحظ أن (T,μ) حلقة محلية و نوثرية ذلك حسب المبرهنة (2−7) والمبرهنة (2−8) على الترتيب.

1)⟸ 2) : بما أن $\dim(R)=1$ فإن $\dim(T)=1$ أيضاً، و ذلك حسب تعريف بُعد الحلقة، ولأنه يوجد تقابل واحد لواحد بين المثاليات الأولية في R وحلقة تموضعها R_P. ومن ثمّ يوجد $0 \neq a \in \mu$ ومنه $I=<a>\subseteq T$ ونعلم أن جذر المثالي يساوي تقاطع كل المثاليات الأولية التي تحويه أي $\sqrt{\ } = \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(T)} P$ حيث $Spec(T)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في T. وكون $\dim(T)=1$ و كل مثالي أعظمي في حلقة تبديلية واحدية هو مثالي أولي

والمثالي الصفري يمثل مثالياً أولياً في T (لأن T منطقة تكاملية) فنجد $\sqrt{I}=\mu$ مثالي أعظمي ويكون I مثالياً $\mu-primary$ ابتدائياً. وحسب التمهيدية السابقة (2–4) يوجد عدد صحيح موجب $n\in\mathbb{N}$ يحقق $\mu^n\subseteq I=<a>\subsetneq\mu^{n-1}\subseteq\mu$ ومنه يوجد عنصر مثل $b\in\mu^{n-1}$ و $b\notin I=<a>$.

سنبيّن فيما يأتي أن $\mu=<t>_T$ مولّد بعنصر $t=\frac{a}{b}\in Quot(T)$ في الحلقة T، وهذا ممكن لأن

$$\boldsymbol{b.\mu^n\subseteq\mu^n\subseteq I=<a>\subsetneq\mu\Rightarrow\frac{1}{t}.\mu=\frac{b}{a}.\mu\subseteq T\Rightarrow\mu\subseteq t.T=<t>_T}$$

سنبرهن أن المثالي $\frac{1}{t}\mu$ يساوي كامل الحلقة T، ومن أجل ذلك نفرض جدلاً أن $\frac{1}{t}\mu\subseteq\mu$ ومنه يمكن أن نُعرّف التشاكل $\varphi:T\longrightarrow T$ بالعلاقة $\forall c\in T:\varphi(c)=\frac{1}{t}c$ و نلحظ أن $\varphi(T)\subseteq\frac{1}{t}\mu.T$ بالإضافة إلى أنه كل حلقة واحدية هي مودول منتهي التوليد على نفسها، ومن ثمَّ يكون حسب مبرهنة "Cayley-Hamilton" يوجد حدودية $\psi_\varphi(x)=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\in T[x]$ تحقق $\psi_\varphi(\varphi)=0$ ومنه $\psi_\varphi(\varphi)(1)=\psi_\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=0$ وهذا يؤدي إلى أن العنصر $\frac{1}{t}\in Quot(T)$ عنصر جبري على T و لأن T ناظمية يكون $\frac{1}{t}\in T$ ، ومنه $b=\frac{1}{t}a\in<a>=I$ وهذا يناقض كون $b\notin I=<a>$، ومن ثمَّ الفرض الجدلي خاطئ، وبما أن (T,μ)حلقة محلية أي إن μ المثالي الأعظمي الوحيد في T وهذا يؤدي إلى أن $\frac{1}{t}\mu=T$ ومنه نجد $\mu=<t>_T$.

2)$\Leftarrow$ 3): بشكل مماثل لِما سبق، بما أن $\dim(T)=1$ فإنه يوجد $0\neq a\in\mu$ ومنه $I=<a>\subseteq T$ و نعلم أن جذر المثالي يساوي تقاطع كل المثاليات الأولية التي تحويه أي $\sqrt{I}=\bigcap_{I\subseteq P\in Spec(T)}P$ حيث $Spec(T)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في T. وكون $\dim(T)=1$ وكل مثالي أعظمي في حلقة تبديلية واحدية هو مثالي أولي والمثالي الصفري يمثل مثالياً أولياً في R فنجد $\sqrt{I}=\mu$ مثالي أعظمي

ويكون I مثالياً $\mu-primary$ ابتدائياً. وحسب التمهيدية السابقة $(2-4)$ يوجد عدد صحيح موجب $n \in \mathbb{N}$ يحقق $\mu^n \subseteq I =< a >\subsetneq \mu^{n-1} \subseteq \mu$.
وحسب (2) يكون μ مثالي رئيسي وحسب نتيجة"$Nak(2)$" نجد
$\dim_{\frac{R}{\mu}}\left(\frac{\mu^{n-1}}{\mu^n}\right) = 1$ حيث $\frac{\mu^{n-1}}{\mu^n}$ فضاء شعاعي معرف على الحقل $\frac{T}{\mu}$، ومنه

$$1 = \dim_{\frac{T}{\mu}}\left(\frac{\mu^{n-1}}{\mu^n}\right) \gneqq \dim_{\frac{T}{\mu}}\left(\frac{I}{\mu^n}\right) \Longrightarrow \dim_{\frac{T}{\mu}}\left(\frac{I}{\mu^n}\right) = 0 \Longrightarrow I = \mu^n.$$

3)$\Longleftarrow$ 4): يوجد عنصر $t\epsilon\mu|\ \mu^2$ وذلك لأنه في حالة $\mu = \mu^2$ سيكون $\mu = \{0\}$ وذلك حسب نتيجة"$Nak(1)$" (وذلك كون μ مودول منتهي التوليد على T و (T,μ) حلقة محلية أي إن $J(T) = \mu$) وهذا غير ممكن لأن $\dim(T) = 1$. حسب الفرض (3) يوجد $n \in \mathbb{N}$ يحقق $< t >= \mu^n$، وبما أن $t \notin \mu^2$ يكون $n = 1$ أي إن $\mu =< t >$.و من ثمَّ حسب الفرض (3) من أجل أي مثالي في T مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n \geq 0$ يحقق : $I = \mu^n$ و كون $\mu =< t >$ نجد $I = \mu^n =< t^n >$ وبذلك يتم المطلوب .

4)$\Longleftarrow$ 5): ليكن I مثالي في T، إذا كان $I = \{0\}$ فإنه مثالي رئيس وفي حالة I مثالي في T مغاير للمثالي الصفري فإنه يوجد عدد صحيح $n \geq 0$ و $t \in T$ يحققان : $I =< t^n >$، وذلك حسب الفرض (4)، أي إن T منطقة مثاليات رئيسية. إن كل مثالي أعظمي في الحلقة التبديلية الواحدية هو مثالي أولي، وكون T منطقة مثاليات رئيسية فإنه يوجد $p \in T$ عنصر أولي يحقق $\mu =< p >$، وكل منطقة مثاليات رئيسة هي منطقة تحليل وحيد، ومنه يكون حسب التمهيدية $(4-3)$ $T = T_{<p>}$ حلقة تقييم من أجل تطبيق تقييم (متقطع) v، ولكن (T,μ) حلقة محلية أي إن $T = T_{<p>} = T_v$ حلقة تقييم وحسب الفرض T نوثرية وليست حقلاً (لأن $\dim(T) = 1$) ومما سبق T حلقة تقييم ونوثرية وليست حقلاً، ومنه تكون T حلقة تقييم متقطع.

5)$\Longleftarrow$ 1) : صحيحة وذلك حسب المبرهنة $(4-1)$.

4-4. نتيجة: لتكن R منطقة صحيحة ID ونوثرية بُعدها $\dim(R)=1$. إن R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كانت R حلقة ناظمية محلياً، أي إن R_μ حلقة ناظمية من أجل أي مثال أعظمي μ في R .

الإثبات: إن R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كانت R حلقة تقييم محلياً، وذلك حسب المبرهنة (3-2)

وكون كل مثالي أعظمي في الحلقة التبديلية الواحدية مثالي أولي، فإن R حلقة تقييم محلياً إذا وفقط إذا كانت R حلقة ناظمية محلياً، حسب المبرهنة السابقة (4-3). ومن ثمَّ R منطقة بريفر إذا وفقط إذا كانت R حلقة ناظمية محلياً. وبذلك يتم المطلوب.

مثال(1): لتكن $R=(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة. نلحظ إن البُعد $\dim(R)=1$ ونوثرية وهي ID، ومجموعة المثاليات الأعظمية في R هي:

$$\mu - Spec(R) = \{<p>: \ p\ a\ prime\ element\ in\ R\}$$

كما أن $R_{<p>}$ حلقة ناظمية محلياً، ومن ثمَّ R منطقة "Pruefer" .

مثال(2): إن $R=\frac{K[x,y,z]}{<x,\ y-1>}$ حلقة نوثرية و ID وبُعدها $\dim(R)=1$، حيث K حقل ما. نلحظ أن $R\cong K[z]$، و هي ناظمية، لأنها منطقة تحليل وحيد UFD وحلقة تموضعها R_μ عند أي مثالي أعظمي μ هي ناظمية أيضاً [14]، ومن ثمَّ تكون $\mathbf{R}=\frac{\mathbf{K[x,y,z]}}{\mathbf{<x,\ y-1>}}$ منطقة "Pruefer"، أي إنه أي مثالي فيها سيكون قابلاً للقلب.

5- **الخاتمة:** يُقدم هذا البحث دراسة العلاقة بين مناطق "Pruefer" والحلقات الناظمية محلياً والتقييم محلياً وضمن شروط، ويُعد هذا البحث امتداداً للبحث [1]، الذي يدرس العلاقة بين حلقات التقييم والحلقات الناظمية وضمن شروط أيضاً. إن شرط البُعد $\dim(R)=1$ موجود في كلا الدراستين، كرؤى مستقبلية ربما يتم الاستغناء عن هذا الشرط والاستعاضة عنه بشرط أقل قسوة أو التعميم

إلى حلقات بُعدها أكبر من واحد. بالإضافة إلى أنه يمكن استخدام قواعد "Groebner" من أجل كتابة خوارزميات اختبار لأنواع هذه الحلقات وتنفيذها في نظام جبر حاسوب.

المراجع العلمية:

1. شوقي محمد الراشد: استعمال مبرهنة "Cayley-Hamilton" وتمهيدية "Nakayama" في دراسة العلاقة بين الحلقات الناظمية وحلقات التقييم. مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية. المجلد الأول– 2018.
2. Atiyah, M. F, Introduction to commutative Algebra. Universitry of Oxford. 1967.
3. A. Azizi, On Generalization of Nakayama's Lemma, Glasg. Math. J. 52: 605-617 (2010).
4. Braun, A., and Wareld, R.B., Symmetry and Localization in Noetherian Prime PI Rings, Journal of Algebra 118, 322-335 (1988).
5. Bruns, W. and Herzog, J. Cohen-Macaulay, Rings, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998.
6. Eisenbud, D., Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry. Spriger-Verlay, 2008 .
7. Eisenbud, D., Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of His 65th Birthday, 2013, ISBN 978-1-4614-5292-8.
8. Fraleigh, J., A First course in Abstract Algebra. 7Edition. Spriger-Verlay. 2004.
9. Max D. Larsen , Paul J. McCarthy: Multiplicative theory of ideals, Academic Press New york and London 1971.
10. MÄuller, B. J., Localization in Fully Bounded Noetherian Rings, Pacic Journal of Mathematics 67, 233-245 (1976).
11. P. Balister, S. Howson. Note on Nakayama's lemma for compact-Modules, Asian J. Math. 1: 224-229 (1997).
12. R. Ameri, Two Versions of Nakayama Lemma for Multiplication Modules, Int. J. Math. Math. Sci., 54: 2911-2913 (2004).
13. T. Nakayama, A remark on finitely generated modules, Nagoya Math. J. 3: 139-140 (1951).
14. Shawki. M. AL-Rashed: Master Lecture Note of Commutative Algebra, Damascus University. 2019.
15. Swanson,I., and Huneke, C.,Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series 336, Cambridge University Press.
16. Zariski, O., Samuel, P. Commutative Algebra Volume II.SpringerVerlag, New York, 1960.