سلوك حلول معادلات تفاضلية غير خطية من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ في المدى الزمني البعيد

محمد مناف محمد أمين الحمد
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريخ الإيداع 2011/02/23
قبل للنشر في 2011/07/05

الملخّص

سندرس في هذا البحث السلوك المقارب لحلول معادلة تفاضلية غير خطية من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ في المدى الزمني البعيد الآتية:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + f\big(t, u(t), u'(t), u''(t)\big) = 0 \quad ;p \geq 1 \qquad (1)$$

وذلك عن طريق الاستفادة من تعميمات دنان وفرضيات بيكاركوف-ميدفيد مستخدمين بذلك متراجحة التكامل الشهيرة لبيهاري، آخذين بالحسبان أن حلول المعادلة التفاضلية (1) كلّها هي حلول شاملة (*Golbal solutions*)، أي إن الحلول مستمرة وقابلة للتمديد على كامل المحور الحقيقي، وسنبحث كذلك في إيجاد الشروط الكافية للدالة f التي من أجلها يكون السلوك المقارب للحلول الشاملة هو $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$ إذ $a, b, c \in R; a \neq 0$.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية، السلوك المقارب، ثابت لابلاس $p \geq 1$، متراجحة بيهاري.

Large Time Behavior of Solutions to Third Order Nonlinear Differential Equations With p-Laplacian

M. M. Al-hamed
Department of mathematics, Faculty of sciences, Damascus university, Syria

Received 23/02/2011
Accepted 05/07/2011

ABSTRACT

In this paper ,we study asymptotic properties of solutions of the following third – order differential equations with -*P* Laplacian

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + f\big(t,u(t),u'(t),u''(t)\big) = 0 \quad ;p \geq 1 \qquad (1)$$

In the sequel,it is assumed that all solutions of the equation(1) are continuously extendable throughout the entire real axis.

We shall prove sufficient conditions under which all global solutions are asymptotic to $at^2 + bt + c\,;\, \text{as } t \to \infty$ where a,b,c are real numbers.

Key words: Differential equations, Asymptotic behavior, p-Laplacian, Bihari's inequality.

1– المقدمة

سنهتم في هذا البحث، بدراسة الخواص المقاربة للحلـول مـن أجـل معادلـة تفاضـلية غيرخطية من المرتبة الثالثة بثابت لابلاسي $p \geq 1$ من الشكل:

$$[|u''(t)|^{p-1}u''(t)]' + f\big(t,u(t),u'(t),u''(t)\big) = 0 \;\; ;p \geq 1 \qquad (1)$$

مقرونة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(t_0) = u_1 \; ; \;\; u'(t_0) = u_2 \; ; \;\; u''(t_0) = u_3$$

وذلك بتعديل شروط المبرهنات في [14] وإثبات مبرهنات جديدة حول الحلول الشاملة.

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو التحقق من السلوك المقارب للحلول الشاملة للمعادلـة التفاضلية (1) في نقطة اللانهاية بأنه مشابه لمعادلات منحنيـات الدرجـة الثانيـة غيـر الصفرية $at^2 + bt + c$ عندما $t \to \infty$ إذ $a, b, c \in R; a \neq 0$.

نوقشت هذه المسالة لأجل معادلة تفاضلية غير خطية من المرتبة الثانية بثابت لابلاسـي $p \geq 1$ مقرونة بشروط ابتدائية معينة مؤخراً من قبل [14]، وذلك عن طريـق اسـتخدام التعميمات الشهيرة لمتراجحة بيهاري وفرضيات دنان.

أما الشروط الكافية لوجود حلـول لمعـادلات تفاضـلية مـن المرتبـة الثانيـة بثابـت لابلاسي$p \geq 1$ فنجدها فـي المقـالات [7، 8، 10، 11، 12، 13، 17، 18، 19، 20]، وتجدر الإشارة إلى أن الشروط الكافية لوجود حلول لمعادلات تفاضلية تابعية من المرتبة الثانية بثابت لابلاسي $p \geq 1$ قد عولجت في البحـوث [1-13,4]. نجـد كثيـراً مـن الموضوعات المتعلقة بالمعادلات التفاضلية غير الخطية من مراتـب مختلفـة بثابـت لابلاسي$p \geq 1$ في [14، 16]..

2- تعاريف ومبرهنات أساسية

2-1- تعريف 1 [10] :

يقال عن الدالة $\omega: [0,\infty) \to [0,\infty)$ إنها تنتمي إلى الصف H إذا حققت الشـروط الآتية:

(H_1) $\omega(u)$ دالة غير متناقصة ومستمرة من أجل $u \geq 0$ وموجبة من أجل $u > 0$.

(H_2) توجد دالة $\emptyset$ مستمرة على الفترة $[0,\infty)$ بحيث يكون:

$\omega(\alpha.u) \leq \emptyset(\alpha).\omega(u)$ لكل $\alpha > 0$ و $u \geq 0$

2-2- خواص الدالة $\emptyset(\alpha)$ [10]:

1- $\emptyset(\alpha) > 0$ من أجل $\alpha > 0$.

2- $\emptyset(\alpha) \geq 1$ من أجل $\alpha \geq 1$ وهذا ينتج من كون:

$$\omega(u) \leq \omega(\alpha.u) \leq \emptyset(\alpha).\omega(u)$$

3- إذا كانت $\omega(0) = 0$ عندئذ $\emptyset(+\infty) = +\infty$ محققة وجوباً

وهذا ينتج من كون:

$$0 < \omega(1) \leq \emptyset(\alpha).\omega\left(\alpha^{-1}\right) \ ,\alpha > 0$$

4- $\emptyset(\alpha).\emptyset\left(\alpha^{-1}\right) \geq 1$ من أجل $\alpha > 0$.

2-3-توطئة 1 [10] :

لتكن $f(u), g(u) \in H$ إذْ $\emptyset_1(\alpha), \psi_1(\alpha)$ هما دالتا الجداء المضاعف الموافقتـان لهما على الترتيب عندئذ يكون:

1- $f(u) + g(u) \in H$

2- $f(u).g(u) \in H$

3- $f(g(u)) \in H$

4- $h(u) = \int_0^u f(s)ds \in H$

2-4- تعريف 2 [15] :

لتكن $f(t), g(t)$ دالتين معرفتين ومستمرتين على R عندئذ نقول إن:

$f(t) = O(g(t)) \quad , \quad t \to t_0$ إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث يتحقق:

$$|f(t)| \leq M|g(t)| \ ; \ t \geq t_0$$

وبشكل مكافئ:$f(t) = O(g(t))$ إذا كانت النسبة $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|$ محدودة عندما $t \geq t_0$.

مثال: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$ عندما $x \to \infty$ لأن $\frac{1}{x^4+x^2} \leq \frac{1}{x^4}$

2-5- تعريف 3 [15]:

إذا تحقق: $\lim_{t \to t_0} \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| = 0$ عندئذ يكون: $f(t) = o(g(t))$.

وكمثال على ذلك: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ عندما $x \to \infty$

لأن $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^4+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 0$

2 -6- تعريف 4 (متراجحة التكامل لبيهاري [6]):

إذا كان: $u(t) \le m + \int_{t_0}^{t} \mu(s) g(u(s)) ds \quad ; \quad t \ge t_0$

إذ m ثابت موجب وμ، u دالتان ذات قيم حقيقية مستمرة وغيـر سـالبة علـى الفتـرة $[t_0, \infty)$ وg دالة حقيقية القيمة مستمرة على الفترة $[0, \infty)$ وموجبة وغير متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ وتحقق:

$\int_1^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty$ عندئذ يكون :

$$u(t) \le G^{-1}\left(G(m) + \int_{t_0}^{t} \mu(s) ds\right) < M \quad ; m < M \le +\infty$$

إذْ G هي الدالة الأصلية لـ $1/g$ على الفتـرة $(0, \infty)$ وG^{-1} هـي الدالـة العكسـية لـ G و $G(x) = \int_k^x \frac{du}{g(u)} \quad ; \ x \ge k \ \ge 0$

2-7- مبرهنة(D) [10]:

لنفرض أن $f(t), x(t)$ دالتان مستمرتان وموجبتـان علـى الفتـرة $I = [0, \infty)$، وأن $h(t) > 0$ دالة مطردة وغير متناقصـة ومسـتمرة علـى الفتـرة $[0, \infty)$، ولـتكن $\omega(u) \in H$ بحيث تكون $\emptyset_1$ دالة الجداء المضاعف الموافقة لها.

إذا كان: $x(t) \le h(t) + \int_0^t f(s). \omega(x(s)) ds \quad ; t \in I$

فإن: $x(t) \le h(t) W^{-1}[W(1) + \int_0^t f(s). \frac{\emptyset_1(h(s))}{h(s)} ds] \ ; 0 \le t \le b$

إذ: $W(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{\omega(s)} \quad ; \; u > 0 \; ; \; u_0 > 0$

W^{-1} هي الدالة العكسية للدالة W و $(0, b]$ هي الفترة الجزئية التي من أجلها يكون:

$$W(1) + \int_0^t f(s).\frac{\omega_1(h(s))}{h(s)} ds \in Dom(W^{-1})$$

2-8- تعريف 5 [18]:

تسمى الدالة $u(t)$ قابلة للاستمرار(*Continuable function*) إذا كانت هـذه الدالـة موجودة من أجل قيم $t \geq t_0$ جميعها.

3- النتائج الرئيسية

3-1- تعريـف 6: يقال عن الدالة $u: [t_0, t_1) \to (-\infty, +\infty); \; t_1 > t_0$ إنها حل للمعادلة(1) إذا حققت الدالة $u(t)$ المعادلة (1) من أجل قيم $t \in [t_0, t_1)$ جميعها.

3-2-تعريف 7 : نقول عن الدالة $u(t)$ إنها تحقق الخاصية (L_1) إذا كان :

$$u(t) = at^2 + bt + c + o(t^2) \; ; t \to \infty \; ; a, b, c \in R$$

3-3-مبرهنة *1*:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u,v,w)$ مستمرة على الساحة:

$$D = \{(t,u,v,w): t \in [t_0, \infty); u,v,w \in R\}$$

(ii) توجد دوال مستمرة $h_1, h_2, h_3, g_1, g_2, g_3: R^+ \to R^+$ إذ إن:

$$|f(t,u,v,w)| \leq h_1(t) g_1\left([\tfrac{|u|}{t^2}]^r\right) + h_2(t) g_2\left([\tfrac{|v|}{t}]^r\right)$$
$$+ h_3(t) g_3([|w|]^r) \quad ; r > 0$$

(iii) إذْ إن الدوال $g_1(s), g_2(s), g_3(s)$ من أجل $s > 0$ موجبة وغير متناقصة،

وإذا رمزنا بـ : $G(x) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right) + g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right) + g_3\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}$

فإن:

$$G(+\infty)=\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_3\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}=\frac{p}{r}\int_{(t_0)^{\frac{r}{p}}}^{\infty}\frac{\tau^{\frac{p}{r}-1}\,d\tau}{g_1(\tau)+g_2(\tau)+g_3(\tau)}=$$

$$=+\infty$$

(iv) وبفرض أن: $\overline{\mathrm{H}}_i=\int_{t_0}^{\infty}h_i(s)ds<\infty\,;i=1,2,3$

فإن أي حل شامل $u(t)$ للمعادلة (1) يحقق الخاصية (L_1).

<u>البرهان:</u> دون أن نمس عمومية المسالة لنفرض أن $t_0=1$. بحسب الشرط (i) وباستخدام نتائج مبرهنات الوجود التقليدية (*Standard existence theorems*) [5, 9] ينـتج أن المعادلة (1) تملك حلاً $u(t)\in C^2([1,\infty))$ يوافق الشروط الابتدائية:

$$u(1)=|u_1|\,;\;\;u'(1)=|u_2|\,;\;\;u''(1)=|u_3|^p$$

وبمكاملة المعادلة (1) من 1 إلى t نحصل لأجل $t\geq 1$ على :

$$|u''(t)|^{p-1}u''(t)=c_3-\int_1^t f\big(s,u(s),u'(s),u''(s)\big)ds\,;c_3=|u_3|^p$$

$$(u''(t))^p\leq\;|u''(t)|^{p-1}u''(t)\;\;;\;\;(u''(t))^{p-1}\leq|u''(t)|^{p-1}$$

$$\leq c_3+\int_1^t\big|f\big(s,u(s),u'(s),u''(s)\big)\big|ds \qquad (2)$$

وبوضع:

$$Q(t)=c_2+\int_1^t\big|f\big(s,u(s),u'(s),u''(s)\big)\big|ds \qquad (3)$$

عندئذ فإن (2) تصبح:

$$(u''(t))^p\leq Q(t) \qquad (4)$$

ومنها فإن:

$$u''(t)\leq[Q(t)]^{\frac{1}{p}} \qquad (5)$$

وبمكاملة المعادلة (5) من 1 إلى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد:

$$u'(t)\leq c_2+\int_1^t[Q(s)]^{\frac{1}{p}}ds\;\;\leq c_2+(t-1)[Q(t)]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]; t \in [t_0, \infty); \quad c_2 - |u_2|$$

ومنه فإن:

$$u'(t) \leq t\left[c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]; \quad c_2 = |u_2| \qquad (6)$$

وبمكاملة المعادلة (6) من (1) إلى t والاستفادة من عمليات الترجيح نجد :

$$u(t) \leq t^2\left[c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}\right]; c_1 = |u_1| \qquad (7)$$

ومن ثم من (6) و(7) نجد أن:

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \leq [c_2 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p \qquad (8)$$

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq [c_1 + (Q(t))^{\frac{1}{p}}]^p \qquad (9)$$

وبتطبيق المتراجحة الشهيرة: $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p); \; a, b \geq 0$

على (8) و(9) نحصل على:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq 2^{p-1}[c_1{}^p + Q(t)] = 2^{p-1}c_1{}^p + 2^{p-1}Q(t)$$

$$\leq 2^{p-1}c_1{}^p + 2^{p-1}\left[c_3 + \int_1^t \left|f\left(s, u(s), u'(s), u''(s)\right)\right| ds\right]$$

وبالأخذ بالحسبان الشرط (ii) من المبرهنة 1 نجد:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq e_1 + \int_1^t H_1(s)g_1\left([\frac{|u|}{s^2}]^r\right)ds + \int_1^t H_2(s)g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right)ds +$$

$$+ \int_1^t H_3(s)g_3([|u''|]^r)ds \qquad (10)$$

إذ $e_1 = 2^{p-1}\left(c_1^p + c_3\right)$ ، $H_i(t) = 2^{p-1}h_i(t); i = 1,2,3$

وكذلك نجد أن:

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \le e_2 + \int_1^t H_1(s) g_1\left([\frac{|u|}{s^2}]^r\right)ds + \int_1^t H_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right)ds +$$

$$+\int_1^t H_3(s) g_3([|u''|]^r)ds \qquad (11)$$

إذ:

$$e_2 = 2^{p-1}(c_2{}^p + c_3) \quad , H_i(t) = 2^{p-1}h_i(t); i = 1,2,3$$

كما أن (4) تؤدي إلى:

$$|u''(t)|^p \le c_3 + \int_1^t h_1(s) g_1\left([\frac{|u|}{s^2}]^r\right)ds + \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right)ds +$$

$$+\int_1^t h_3(s) g_3([|u''|]^r)ds \qquad (12)$$

وبوضع:

$$A(t) = e_1 + \int_1^t H_1(s) g_1\left([\frac{|u|}{s^2}]^r\right)ds + \int_1^t H_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right)ds +$$

$$+\int_1^t H_3(s) g_3([|u''|]^r)ds \qquad (13)$$

عندئذ من أجل $c_2 \le c_1$ تصبح المتراجحات (10) و(11) و(12) بالشكل:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \le A(t) \qquad (14)$$

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \le A(t) \qquad (15)$$

$$|u''(t)|^p \le A(t) \qquad (16)$$

وهكذا نجد:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^r \le [A(t)]^{\frac{r}{p}} \qquad (17)$$

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^r \le [A(t)]^{\frac{r}{p}} \qquad (18)$$

$$|u''(t)|^r \le [A(t)]^{\frac{r}{p}} \qquad (19)$$

ونظراً إلى أن الدوال $g_1(s), g_2(s), g_3(s)$ غير متناقصة مـن أجـل $s > 0$، عندئذٍ نحصل من (17) و(18) و(19) على:

$$g_1([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r) \leq g_1([A(t)]^{\frac{r}{p}}) \qquad (20)$$

$$g_2([\frac{|u'(t)|}{t}]^r) \leq g_2([A(t)]^{\frac{r}{p}}) \qquad (21)$$

$$g_3(|u''(t)|^r) \leq g_3([A(t)]^{\frac{r}{p}}) \qquad (22)$$

وبناء على ذلك نحصل من (13) من أجل $t \geq 1$ على:

$$A(t) \leq e_1 + \int_1^t H_1(s)\, g_1([A(s)]^{\frac{r}{p}})ds + \int_1^t H_2(s)\, g_2([A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds + \\ + \int_1^t H_3(s)\, g_3([A(s)]^{\frac{r}{p}})ds$$

ومن المعلوم أن المتراجحة الآتية:

$(H_1 g_1 + H_2 g_2 + H_3 g_3) \leq (H_1 + H_2 + H_3)(g_1 + g_2 + g_3)$صحيحة دوماً.

وبناء على ذلك يكون:

$$A(t) < e_1 + \qquad (23)$$

$$+ \int_1^t (H_1(s) + H_2(s) + H_3(s))(\, g_1[A(s)]^{\frac{r}{p}} + g_2\, [A(s)]^{\frac{r}{p}} + g_3\, [A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds$$

وبتطبيق متراجحة بيهاري على (23) نجد أنه من أجل $t \geq 1$ يكون :

$$A(t) < G^{-1}[G(e_1) + 2^{p-1}\int_1^t (h_1(s) + h_2(s) + h_3(s))ds]$$

إذ: $G(w) = \int_1^w \frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right) + g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right) + g_3(s^{\frac{r}{p}})}$

$G^{-1}(w)$هي الدالة العكسية للدالة $G(w)$ التي تكون معرفة لأجل $w \in (G(+0), +\infty)$

والأكثر من ذلك فإن: $G(+0) < 0$ و $G^{-1}(w)$ متزايدة.

وإذا فرضنا أن:

$$k = G(e_1) + 2^{p-1}\int_1^t (h_1(s) + h_2(s) + h_3(s))ds < +\infty$$

ومن كون $G^{-1}(w)$ متزايدة نجد أن:

$$A(T) \leq G^{-1}(w) < +\infty$$

وينتج من (14) و(15) و(16):

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq G^{-1}(k)$$

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \leq G^{-1}(k)$$

$$|u''(t)|^p \leq G^{-1}(k)$$

والمتراجحات الأخيرة تقتضي المتراجحات الآتية من أجل $p \geq 1$:

$$\frac{|u(t)|}{t^2} \leq [G^{-1}(k)]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|u'(t)|}{t} \leq [G^{-1}(k)]^{\frac{1}{p}}$$

$$|u''(t)| \leq [G^{-1}(k)]^{\frac{1}{p}}$$

وبالاستفادة من الشرط (ii) من المبرهنة 1 نجد أن :

$$\int_1^t |f(s,u(s),u'(s),u''(s))|ds \leq \int_1^t h_1(s)g_1([\frac{|u|}{s^2}]^r)\,ds +$$

$$+\int_1^t h_2(s)g_2([\frac{|u'|}{s}]^r)ds + \int_1^t h_3(s)g_3([|u''|]^r)ds$$

$$\leq e_1 + \int_1^t H_1(s)g_1\left([\frac{|u|}{s^2}]^r\right)ds + \int_1^t H_2(s)g_2\left([\frac{|u'|}{t}]^r\right)ds +$$

$$+\int_1^t H_3(s)g_3([|u''|]^r)ds = A(t) \leq G^{-1}(k) < +\infty\,; t \geq 1$$

وهذا يبرهن أن التكامل $\int_1^t f(s,u(s),u'(s),u''(s))ds$ متقارب إطلاقاً ومن ثم فإن:

$\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(s,u(s),u'(s),u''(s))ds < \infty$ موجودة ومحدودة.

واستناداً إلى [5] يوجد ثابت حقيقي $a \in R$ بحيث يكون:

$$\lim_{t\to\infty} u''(t) = a$$

وأخيراً، وباستخدام قاعدة أوبيتال الشهيرة نجد أن:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u(t)}{t^2} = \frac{u_1 + \int_1^t u'(s)ds}{t^2} = \lim_{t \to \infty} u''(t) = a$$

ومن أجل أي ثابتين حقيقيين b, c يكون:

$$\lim_{t \to \infty} \{\frac{u(t) - (at^2 + bt + c)}{t^2}\} = 0$$

وهذا يعني بدوره أن السلوك المقـارب للحـل $u(t)$ هـو $at^2 + bt + c$ عنـدما $t \to \infty$.

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة 1.

مثال تطبيقي: لتكن لديناالمعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة الآتية:

$$u''' + t^{-\frac{3}{2}}(u'')^{p-r} + t^{-\frac{3}{2}}(\frac{u'}{t})^{p-r} + t^{-\frac{3}{2}}(\frac{u}{t^2})^{p-r} = 0 \; ; r > 0, p \geq 1 \quad (*)$$

نلاحظ أن :

$$f(t,u,u',u'') = t^{-\frac{3}{2}}(u'')^{p\ \ r} + t^{-\frac{3}{2}}(\frac{u'}{t})^{p\ \ r} + t^{-\frac{3}{2}}(\frac{u}{t^2})^{p\ \ r}$$

وبملاحظة أنه من أجل $t \geq 1$: $\frac{u'}{t} \leq u' \Rightarrow (\frac{u'}{t})^{p-r} \leq (u')^{p-r}$

$$\frac{u}{t^2} \leq u \Rightarrow (\frac{u}{t^2})^{p-r} \leq (u)^{p-r}$$

ومن ثم كون:

$$|f(t,u,u',u'')| \leq t^{-\frac{3}{2}}[|u''|^{p-r} + |u'|^{p-r} + |u|^{p-r}]$$

ومن ثم:

$$h_1(t) = h_2(t) = h_3(t) = t^{-\frac{3}{2}} \quad ; g_1(u) = g_2(u) = g_3(u) = u^{\frac{p}{r}-1}$$

$$\overline{H}_i = \int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} dt = 2 < +\infty \quad ; i = 1,2,3$$

$$G(+\infty) = \frac{p}{r} \int_1^{\infty} \frac{\tau^{\frac{p}{r}-1} d\tau}{3\tau^{\frac{p}{r}-1}} = +\infty$$

ومن ثم حسب المبرهنة 1 فإن أي حل $u(t)$ للمعادلة $(*)$ له سلوك مقارب هو at^2+bt+c عندما $t\to\infty$.

مبرهنة 2:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u,v,w)$ مستمرة على الساحة:

$$D=\{(t,u,v,w): t\in[1,\infty); u,v,w\in R\}$$

(ii) توجد دوال مستمرة غير سالبة: $h_1,h_2,h_3,g_1,g_2,g_3:R^+\to R^+$ بحيث:

$$|f(t,u,v,w)|\le h_1(t).g_1\left(\left[\frac{|u|}{t^2}\right]^r\right)+h_2(t).g_2\left(\left[\frac{|v|}{t}\right]^r\right)+$$
$$+h_3(t).g_3([|w|]^r)\quad ;r>0$$

(iii) من أجل أي $s>0$ فإن الدوال $g_1(s),g_2(s),g_3(s)$ غير متناقصة وتحقق المتراجحات الآتية:

$$g_1(\alpha.u)\le\varphi_1(\alpha).g_1(u)\ ;\ \alpha\ge 1\ ,u\ge 0$$
$$g_2(\alpha.u)\le\varphi_2(\alpha).g_2(u)\ ;\ \alpha\ge 1\ ,u\ge 0$$
$$g_3(\alpha.u)\le\varphi_3(\alpha).g_3(u)\ ;\ \alpha\ge 1\ ,u\ge 0$$

إذْ الدوال $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ ، $\varphi_3(\alpha)$ هي دوال مستمرة لأجل $\alpha\ge 1$.

$$\int_1^\infty h_i(s)ds=\overline{H}_i<+\infty\ ;i=1,2,3\qquad (iv)$$

(v) يوجد ثابت $m\ge 1$ إذْ

$$m^{-1}[\varphi_1(m)+\varphi_2(m)+\varphi_3(m)]2^{p-1}[H_1+H_2+H_3]\le$$

$$\le\int_1^\infty\frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_3\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}=\frac{p}{r}\int_1^\infty\frac{\tau^{\frac{p}{r}-1}d\tau}{g_1(\tau)+g_2(\tau)+g_3(\tau)};p\ \ge 1;r>0\quad(24)$$

إذْ: $H_i(t)=\int_1^t h_i(s)ds\,;i=1,2,3$

عندئذ أي حل $u(t)$ للمعادلة (1) محقق للشروط الابتدائية:

$$u(1) = |u_1|\ ;\ \ u'(1) = |u_2|\ ;\ \ u''(1) = |u_3|^p$$

إذ $(|u_1| + |u_2| + |u_3|)^p \leq m$ يحقق الخاصية (L_1).

البرهان: بإجراء المناقشة نفسها كما في المبرهنة 1 نجد أنه من أجل $t \geq 1$ يكون:

$$|u''(t)| \leq [|u_3|^p + \int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds + \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds +$$
$$+ \int_1^t H_3(s) g_3([|u''|]^r) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|u'(t)|}{t} \leq |u_2| + [|u_3|^p + \int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds +$$
$$+ \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds + \int_1^t H_3(s) g_3([|u''|]^r) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{|u(t)|}{t^2} \leq |u_1| + [|u_3|^p + \int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds +$$
$$+ \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds + + \int_1^t H_3(s) g_3([|u''|]^r) ds\,]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\frac{|u(t)|}{t^2}\right]^p \leq 2^{p-1}[|u_1|^p + |u_3|^p + \int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds +$$
$$+ \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds + \int_1^t h_3(s) g_3([|u''|]^r) ds]$$
$$\leq 4^{p-1}[|u_1|^p + |u_2|^p + |u_3|^p] +$$
$$+ 2^{p-1}[\int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds + \int_1^t h_2(s) g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds +$$
$$+ \int_1^t h_3(s) g_3([|u''|]^r) ds]$$

$$\left[\frac{|u(t)|}{t^2}\right]^p \leq m + 2^{p-1}[\int_1^t h_1(s) g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right) ds +$$
$$g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right) ds + \int_1^t h_3(s) g_3([|u''|]^r) ds] + \int_1^t h_2(s)$$

إذ:

$$m = 4^{p-1}[|u_1|^p + |u_2|^p + |u_3|^p] \geq (|u_1| + |u_2| + |u_3|)^p$$

لنرمز للطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة ب $A(t)$ أي:

$$A(t) = m+2^{p-1}[\int_1^t h_1(s)g_1\left(\left[\frac{|u|}{s^2}\right]^r\right)ds + \int_1^t h_2(s)g_2\left([\frac{|u'|}{s}]^r\right)ds +$$

$$+\int_1^t h_3(s)g_3([|u''|]^r)ds] \qquad (25)$$

عندئذ نستنتج:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^p \leq A(t) \qquad (26)$$

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^p \leq A(t) \qquad (27)$$

$$|u''(t)|^p \leq A(t) \qquad (28)$$

وهكذا نجد:

$$[\frac{|u(t)|}{t^2}]^r \leq \ [A(t)]^{\frac{r}{p}}$$

$$[\frac{|u'(t)|}{t}]^r \leq \ [A(t)]^{\frac{r}{p}}$$

$$|u''(t)|^r \leq \ [A(t)]^{\frac{r}{p}}$$

ونظراً إلى أن الدوال $g_1(s), g_2(s), g_3(s)$ غير متناقصـة مـن أجـل $s > 0$ عندئذ نحصل على:

$$g_1([\frac{|u(t)|}{t^2}]^r) \leq \ g_1([A(t)]^{\frac{r}{p}})$$

$$g_2([\frac{|u'(t)|}{t}]^r) \leq \ g_2(\ [A(t)]^{\frac{r}{p}})$$

$$g_3(|u''(t)|^r) \leq \ g_3(\ [A(t)]^{\frac{r}{p}})$$

وبناء على ذلك فإنه من أجل $t \geq 1$ نحصل من (25) على:

$$A(t) \leq m + 2^{p-1}[\int_1^t h_1(s)\ \ g_1([A(s)]^{\frac{r}{p}})ds +$$

$$+\int_1^t h_2(s)\, g_2([A(s)]^{\frac{r}{p}})\, ds+\int_1^t h_3(s)\, g_3([A(s)]^{\frac{r}{p}})ds \quad (29)$$

وحسب الشرطين (ii)و(iii) من المبرهنة 2 نجد أن الدوال $g_1(u), g_2(u), g_3(u)$ تنتمي إلى الصف H، علاوة علـى ذلـك فإنـه وحسـب توطئـة1 [10] : إذا كانـت $g_1, g_2, g_3 \in H$ وكانت $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ هي دوال الجداء المضاعف الموافقـة لهـا على الترتيب عندئذ فإن:

$g_1(u)+g_2(u)+g_3(u) \in H$ وتكـون $\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\alpha)+\varphi_3(\alpha)$ هـي دالة الجداء المضاعف الموافقة للمجموع وبتطبيق مبرهنة (D)[10] على (29) نجد:

$$A(t) \leq mW^{-1}(m^{-1}[\varphi_1(m)+\varphi_2(m)+\varphi_3(m)].2^{p-1}.[H_1+$$
$$+H_2+H_3]) \quad ; \quad H_i(t)=\int_1^t h_i(s)ds\,; i=1,2,3 \quad (30)$$

إذ: $$W(u)=\int_1^u \frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right)+g_3\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}$$

و $W^{-1}(u)$ هي الدالة العكسية للدالة $W(u)$.

المتراجحة (30) محققة من أجل قيم $t \geq 1$ جميعها، لأنـه حسـب (24) مـن أجـل $t \geq 1$ يكون:

$$m^{-1}[\varphi_1(m)+\varphi_2(m)+\varphi_3(m)].2^{p-1}.[H_1+H_2+H_3] \in \mathrm{Dom}(W^{-1})$$

لنضع الآن:

$$m^{-1}[\varphi_1(m)+\varphi_2(m)+\varphi_3(m)].2^{p-1}.[H_1+H_2+H_3]=c<+\infty$$

ونظـــراً إلـــى أن $W^{-1}(u)$ دالـــة متزايـــدة عندئـــذ يكـــون مـــن (30): $A(t) \leq mW^{-1}(c)<+\infty$

ومن ثم تصبح المتراجحات (26) و(27) و(28) بالشكل الآتي:

$$|u''(t)| \leq mW^{-1}(c)$$
$$\frac{|u'(t)|}{t} \leq mW^{-1}(c)$$
$$\frac{|u(t)|}{t^2} \leq mW^{-1}(c)$$

وبـالعودة إلـى الشـرط (ii) مـن المبرهنـة 2 فإننـا نسـتنتج أن التكامـل $\int_1^t f\big(s,u(s),u'(s),u''(s)\big)ds$ متقارب إطلاقاً ومن ثم فإن:

$\lim_{t\to\infty}\int_1^t f\big(s,u(s),u'(s),u''(s)\big)ds$ موجودة ومحدودة .

وهذا يعني بدوره أن: $u(t) - at^2 + bt + c + o(t^2)\ ; t\to\infty$

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة 2 .

مثال تطبيقي: لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة الآتية:

$$u''' + (9t)^{-2}\left[\ \left(\frac{u}{t^2}\right)^{p-r}\cos u + \left(\frac{u'}{t}\right)^{p-r}\sin u' + (u'')^{p-r} = 0 \qquad (**)$$

من المعادلة $(**)$ وبإجراء الحسابات نحصل على:

$$g_1(u) = g_2(u) = g_3(u) = u^{\frac{p}{r}-1}\ \ \&\ h_1(t) = h_2(t) = h_3(t) = (9t)^{-2}$$

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha) = \varphi_3(\alpha) = \alpha^{\frac{p}{r}-1}\ .$$

وبذلك نستنتج أن شروط المبرهنة 2 جميعها محققة، وهذا يعني بدوره أن الحلول القابلـة للاستمرار[18] للمعادلة $(**)$ كلّها لها السلوك المقـارب $at^2 + bt + c$ عنـدما $t\to\infty$

إذ $a,b,c \in R\ ; a \neq 0$.

مبرهنة 3:

إذا تحققت الشروط الآتية:

(i) الدالة $f(t,u,v,w)$ مستمرة على الساحة:

$D = \{(t,u,v,w): t\in[1,\infty); u,v,w\in R\}$

(ii) توجد دوال مستمرة $h_1,h_2,h_3,g_1,g_2,g_3 : R^+ \to R^+$ بحيث يكون:

$$|f(t,u,v,w)| \le \mathrm{h}(t)g_1\left([\tfrac{|u|}{t^2}]^r\right)g_2\left([\tfrac{|v|}{t}]^r\right)g_3([|w|]^r); r>0$$

(iii) من أجل $s>0$ فإن الدوال $\mathrm{g}_1(\mathrm{s}),g_2(\mathrm{s}),g_3(\mathrm{s})$ موجبة وغير متناقصة،

وإذا رمزنا ب: $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{g_1\left(s^{\frac{r}{p}}\right) g_2\left(s^{\frac{r}{p}}\right) g_3\left(s^{\frac{r}{p}}\right)}$

إذ يكون: $G(+\infty) = \frac{p}{r}\int_1^{\infty} \frac{\tau^{\frac{p}{r}-1}\, d\tau}{g_1(\tau) g_2(\tau) g_3(\tau)} = +\infty$

$$\overline{H}_i = \int_1^{\infty} h_i(s) ds < \infty \,; i = 1,2,3 \qquad (iv)$$

فعندئذ كل حل $u(t)$ للمعادلة (1) يحقق الخاصية (L_1).

البرهان: يتم بشكل مشابه تماماً للمبرهنة (1).

مثال تطبيقي: لتكن المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة الآتية:

$$u''' + t^{-\frac{3}{2}}.\left(\frac{u}{t^2}\right)^{\frac{p-r}{2}}.\left(\frac{u'}{t}\right)^{\frac{p-r}{4}}.(u'')^{\frac{p-r}{4}}.\sin^3 u = 0 \;\; ; r > 0, p \geq 1 \quad (***)$$

من المعادلة $(***)$ وبإجراء الحسابات نحصل على:

$$g_1(u) = u^{\frac{1}{2}\left(\frac{p}{r}-1\right)} \; ; \; g_2(u) = g_3(u) = u^{\frac{1}{4}\left(\frac{p}{r}-1\right)} \;\; \& \; h(t) = (t)^{\frac{-3}{2}}$$

وبذلك نستنتج أن شروط المبرهنة 3 جميعها محققة، وهذا يعني بدوره أن الحلول القابلـة للاستمرار للمعادلة $(***)$ كلّها لهـا السـلوك المقـارب $at^2 + bt + c$ عنـدما $t \to \infty$ إذ $a, b, c \in R \;\; ; a \neq 0$.

REFERENCES

[1]Bartuˇsek, M. (2005). Singular solutions for the differential equation with p-Laplacian, Archivum Math. (Brno), v.41 ,pp.123–128.

[2]Bartuˇsek, M. (2006). On singular solutions of a second order differential equations, Electronic Journal of Qualitaive Theory of Differential Equations, v. 8,pp .1–13.

[3]Bartuˇsek, M. and MedveˇD, M. (2008). Existence of global solutions for systems of second-order functional-differential equations with p-Laplacian, Electronic Journal of Differential Equations,v.(40),pp. 1–8.

[4]Bartuˇsek, M. and Pek´arkov´A, E. (2007). On existence of proper solutions of quasilinear second order differential equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, v.1,pp.1–14.

[5]Bellman, R. (1953). ***Stability Theory of Differential Equations*****, McGraw-Hill, London.**

[6]Bihari, I. (1956). A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., v.7, pp.81–94.

[7]Cohen, D. S. (1967). The asymptotic behavior of a class of nonlinear differntial equations, Proc.Amer. Math. Soc.v. 18,pp.607–609.

[8]Constantin, A. (1993). On the asymptotic behavior of second order nonlinear differential equations,Rend. Math. Appl.,v. 13(7),pp. 627–634.

[9]Cronin, J. (1980). ***Differential Equations, Introduction and Qualitative Theory*****, Dekker, New York.**

[10]Dannan, F. M. (1985). Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl., v. 108, pp.151–164.

[11]Kusano, T. and Trench, W. F. (1985). Global existence of scond order differential equations with integrable coefficients. J. London Math. Soc, v.31, pp.478–486.

[12]Kusano, T. and Trench, W. F. (1985). Existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior for nonlinear ordinary differential equations, Mat. Pura Appl,v.142,pp. 381–392.

[13]MedveˇD, M. and Pek´arkov´A, E. (2007). Existence of global solutions of systems of second order differential equations with p-Laplacian, Electronic Journal of Differential Equations, v.136,pp. 1–9.

[14]MedveˇD, M. and Pek´arkov´A, E. (2008). large time behavior of solutions to second order differential equations with p-Laplacian, Electronic Journal of Differential Equations, vol,No(108),pp.1-12.

[15]Shima, H. and Nakayama, T. (2010). Higher Mathematics for physics and Engineering. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, Library of congress control Number:2009940406. ©Springer-verlag Berlin Heidelberg.

[16]Rachunkov´A, I. Stanˇek, S. and Tvrd´y, M. (2006). Singularities and Laplacians in Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations, Handbook of Differential Equations. Ordinary Differential Equations 3 606–723, Ed. by A. Canada, P. Dr´abek, A. Fonde, Elsevier.

[17]Rogovchenko, Y. V. (1998). On asymptotics behavior of solutions for a class of second order nonlinear differential equations, Collect. Math.,v. 49(1) pp. 113–120.

[18]Rogovchenko, S. P. and Rogovchenko, Yu. V. (2000). Asymptotics of solutions for a class of second order nonlinear differential equations, Portugaliae Math., v. 57(1) ,pp. 17–32.

[19]Tong, J. (1982). The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order, Proc. Amer. Math. Soc., v.84 ,pp. 235–236.

[20]Trench, W. F. (1963). On the asymptotic behavior of solutions of second order linear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., v.54, pp. 12–14