فئة المثاليات في حلقة R

حورية شحادة و فرحان إسماعيل

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريخ الإيداع 2010/02/24

قبل للنشر في 2011/03/07

الملخّص

في هذه الورقة العلمية تعاملنا مع ثلاثة أنواع من التشاكلات بين مثاليين في حلقة (واحدية) R وهي: تشاكل حلقي، وR ـ تشاكل مودولي، وتشاكل مثالي. وذكرنا عدداً من الأمثلة على ذلك، وأثبتنا أن أسرة المثاليات في الحلقة R مع (التشاكلات الحلقية، R ـ تشاكلات المودلية، التشاكلات المثالية) تُشكل فئة دعوناها فئة مثاليات من النوع (الأول، الثاني، الثالث) على الترتيب.

أوردنا عدداً من الأمثلة وعدداً من التشاكلات الفئوية المتعلقة بالفئات السابقة، وأثبتنا بالاستفادة من خواص المثاليات أنه في حال كانت R وS حلقتين متماثلتين فإن $\underline{I}_R^3$ فئة مثاليات الحلقة R من النوع الثالث تماثل $\underline{I}_S^3$. كما أثبتنا أن $\underline{I}_{R\times S}^3 \cong \underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3$.

الكلمات المفتاحية: التشاكلات المثالية، فئة مثاليات حلقة R .

التصنيف الرياضياتي العالمي: 2010 MSC 18A99, 18B99, 16D25

Category of Ideals in a Ring R

H. Shehada and F. Ismail
Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University, Syria.

Received 24/02/2010
Accepted 07/03/2011

ABSTRACT

In this scientific paper we dealt with three different types of homomorphisms between two given ideals in a ring with unity shown as follows: ring homomorphism, *R*- module homomorphism and ideal homomorphism, which were supported by several examples.

Furthermore, we prove that the family of ideals in a ring *R* with ring, *R* - module and ideal homomorphisms forms the category of ideals of the first, second and third type, respectively. The next step was dedicated to support all previous ideals by examples and functor between such categories.

Finally, using the properties of ideals we prove that for two isomorphic rings $R \cong S$ then $\underline{I}_R^3$, the category of ideals in *R*of the third type is isomorphic with $\underline{I}_S^3$, moreover , $\underline{I}_{R\times S}^3 \cong \underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3$.

Key words: Ideal homomorphisms, Category of ideals in a ring *R*.

Mathematical Subjects classification: 2010 MSC 18A99, 18B99, 16D25

1. المقدمة:

تظهر نظرية الفئات كنظام من المورفيزمات morphisms بين عناصـر رياضـية معينة. بمعنى أن نظرية الفئات تسأل كل نوع من العناصر الرياضية ما المورفيزمـات؟ وبحيث يجب أن توصف هذه المورفيزمات وتحدد تماماً كما العناصر الرياضـية ضـمن الفئة $[[1]p10-p12]$.

في هذه الورقة العلمية قمنا ببناء فئة جديدة عناصرها الرياضية هي المثاليات ضـمن الحلقة وحددنا مورفيزماتها على اعتبار أن كل مثالي ضمن الحلقة هو حلقة جزئية منهـا فضلاً عن أنه مودول جزئي على الحلقة، وبذلك يمكننا أخذ المورفيزمات لفئة المثاليـات إما التشاكلات الحلقية أو التشاكلات المودولية أو التشاكلات بين مثاليات (تعريـف 3.2) ونعرف بذلك ثلاثة أنواع لفئة المثاليات ضمن حلقة ما(مبرهنة 1.3) ومـن خـلال هـذا النظام الجديد للمثاليات والتشاكلات بينها ضمن الحلقة ودراسة خواصها نـضيف مفـاهيم جديدةً إلى نظرية الحلقات والمثاليات.

نشير إلى أن الحلقات الواردة في هذا البحث جميعها هي حلقات واحدية.

2. تعاريف و أمثلة:

لتكن R حلقة، ولتكن I أسرة مثالياتها، وI_l أسرة مثالياتهـا اليـسارية، وI_r أسـرة مثالياتها اليمينية.

تعريف1.2. إذا كان $A,B\in I$ عندئذٍ نسمي التطبيق $f:A\to B$ تشاكلاً مثالياً مـن النوع الأول على الحلقة R ، إذا كان تشاكلاً حلقياً أي :

$$\left.\begin{array}{ll}1) & f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)\\ 2) & f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2)\end{array}\right\}\quad (\forall\, a_1,a_2\in A)$$

وإذا كان $A=B=R$ فإن f يجب أن يحقق $f(1)=1$ حيث 1 هو واحد الحلقة R.
وفي الحالة التي يكون فيها $A\,,B\in I_l$ فإن التشاكل f يحقق الـشرطين (1) و(2)، وكذلك الأمر في الحالة التي يكون فيها $A\,,B\in I_r$.

تعريـف2.2. إذا كان $A,B\in I$ بحيث $A\neq R$ و$B\neq R$عندئـذٍ نـسمي التطبيـق $f:A\to B$ تشاكلاً مثالياً من النوع الثاني على الحلقة R، إذا كان R ـ تشاكلاً مودوليـاً (يسارياً ويمينياً) أي:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2) \\ 2)\ \ f(ra_1)=rf(a_1) \\ 3)\ \ f(a_1r)=f(a_1)r \end{array}\right\}(\forall\, a_1,a_2\in A\,,\forall r\in R)$$

وإذا كان $A=B=R$ فإن f يحقق أيضاً $f(1)=1$ حيث 1 هو واحد الحلقة R.
وفي الحالة التي يكون فيها $A\,,B\in I_l$ فإن التشاكل f يحقـق الـشرطين (1) و(2) فقط، وفي الحالة التي يكون فيها $A\,,B\ \in I_r$ فإن التشاكل f يحقق الشرطين (1) و(3) فقط.

تعريـف3.2. إذا كـان $A,B\in I$ إذْ $A\neq R$ و$B\neq R$عندئـذٍ نـسمي التطبيـق $f:A\to B$ تشاكلاً مثالياً من النوع الثالث على الحلقة R، إذا حقق

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2) \\ 2)\ \ f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2) \\ 3)\ \ f(ra_1)=rf(a_1) \\ 4)\ \ f(a_1r)=f(a_1)r \end{array}\right\}(\forall\, a_1,a_2\in A\,,\forall r\in R)$$

وإذا كان $A=B=R$ فإن f يحقق أيضاً $f(1)=1$ حيث 1 هو واحد الحلقة R.
وفي الحالة التي يكون فيها $A\,,B\in I_l$ فإن التشاكل f يحقـق الـشروط (1) و(2) و(3) فقط، وفي الحالة التي يكون فيها $A\,,B\ \in I_r$ فإن التشاكل f يحقق الشروط (1) و(2) و(4) فقط .

مثال4.2. لتكن $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_n$ إن المجموعتين $\mathbb{Z}\times\{0\}$ و $\{0\}\times\mathbb{Z}_n$ تشكلان مثالياً فيها والتطبيق $f:\mathbb{Z}\times\{0\}\to\{0\}\times\mathbb{Z}_n\,;(a,0)\mapsto(0,[a])$ هو تشاكل مثالي من النـوع الأول على الحلقة R حيث $[a]$ هو باقي قسمة a على n .

مثـــال5.2. لـــتكن $R = \mathbb{Z}$ إن جميـــع مثالياتهـــا مـــن الـــشكل $n\mathbb{Z} = \{\dots,-2n,-n,0,n,2n,\dots\}$ حيث $n \in \mathbb{N}$، *[[6]p24]* ومـن أجـل $n\mathbb{Z}$ و$m\mathbb{Z}$ مثاليين فيها حيث $m,n \in \mathbb{N}$ و$n \neq 0$ إن $f: n\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}\,; nx \mapsto mx$ هو تـشاكل مثالي من النوع الثاني على الحلقة R.

مثـال6.2. لـتكن $R = \mathbb{Z}_{12}$ إن كـلاً مـن $2\mathbb{Z}_{12} = \{0,2,4,6,8,10\}$ و$4\mathbb{Z}_{12} = \{0,4,8\}$ مثالي في R و$f: 2\mathbb{Z}_{12} \to 4\mathbb{Z}_{12}\,; x \mapsto 4x$ هو تشاكل مثالي من النوع الثالث على الحلقة R.

ملاحظة7.2. من التعاريف السابقة نلاحظ أن كل تشاكل مثالي من النوع الثالث هـو تشاكل مثالي من النوع الأول، وهو تشاكل مثالي من النوع الثـاني، وينـتج مباشـرة أن تركيب تشاكليين مثاليين من النوع الثالث هو تشاكل مثالي من النوع الثالث.

3. بناء فئات مثاليات في الحلقة R:

مبرهنة 1.3. إن مجموعة المثاليات في الحلقة R مع التشاكلات المثالية مـن النـوع الأول (الثاني، الثالث) تشكل فئة.

البرهان: نأخذ

Objects: المثاليات في الحلقة R.

المورفيزمات arrows: التشاكلات المثالية من النوع الأول (الثـاني، الثالـث علـى الترتيب) على الحلقة R.

عندئذٍ لكل مثالي A يكون مورفيزم الواحدة له 1_A هو التشاكل الحلقي (R ـ تـشاكل المودولي، التشاكل المثالي) المطابق.

ولما كان تركيب تشاكلين حلقيين (مودوليين، مثاليين من النوع الثالث) هـو تـشاكل حلقي (مودولي، مثالي) فإن عملية تركيب المورفيزمات ممكنة ضمن الشروط المألوفـة، وهي تحقق:

1- الخاصة التجميعية: أي من أجل المورفيزمـات $f: A \to B\,, g: B \to C\,, h: C \to D$ فإن $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2- قـــانون الواحـــدة: مـــن أجـــل المـــورفيزم $f: A \to B$ فـــإن $f \circ 1_A = f\ , 1_B \circ f = f$.

سندعو فئة المثاليات في الحلقة R التي مورفيزماتها التشاكلات المثاليـة مـن النـوع الأول (الثاني، الثالث) فئة مثاليات من النوع الأول (الثاني، الثالـث) علـى الحلقـة R، وسنرمز لها بالرمز $\underline{I}_R^1$ ($\underline{I}_R^2$ ، $\underline{I}_R^3$ على الترتيب).

بالأسلوب نفسه نبرهن أن مجموعة المثاليات اليسارية في الحلقة R مـع التـشاكلات المثالية من النوع الأول (الثاني، الثالث) بينها تشكل فئة مثاليات يسارية من النـوع الأول (الثاني، الثالث) على الحلقة R نرمز لها بالرمز $\underline{I}_{l.R}^1$ ($\underline{I}_{l.R}^2$، $\underline{I}_{l.R}^3$ على الترتيب)، وأن مجموعة المثاليات اليمينية في الحلقة R مع التشاكلات المثالية من النوع الأول (الثـاني، الثالث) تشكل فئة مثاليات يمينية من النوع الأول (الثاني، الثالث) على الحلقة R نرمـز لها بالرمز $\underline{I}_{r.R}^1$ ($\underline{I}_{r.R}^2$، $\underline{I}_{r.R}^3$ على الترتيب).

ملاحظة2.3. إن فئة المثاليات بأنواعها الثلاثة لأي حلقة R هي فئـات غيـر خاليـة لاحتوائها على المثالي الصفري O والمثالي التافه R كـ *objects* فـي هـذه الفئـات، وعلى مورفيزمين مغايرين لمورفيزمي الواحدة وهمـا $i: O \to R$ الاحتـواء القـانوني و$O: R \to O$ التشاكل الصفري.

مثال3.3. لتكن $R = M_2(K)$ حلقة المصفوفات المربعة على الحقـل K ولنأخـذ المجموعتين:

$$A = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in K\right\}\ , B = \left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} : c, d \in K\right\}$$

عندئذٍ إن كلاً من A وB مثالي يساري في R أي $A, B \in \underline{I}_{l.M_2(K)}^1$، والتطبيق:

$f: A \to B\ ;\ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ هو تشاكل مثـالي مـن النـوع الأول علـى الحلقـة R أي إنّـه أحـد مورفيزمـات الفئـة $\underline{I}_{l.M_2(K)}^1$. والتطبيـق

$g: B \to A \,;\, \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c-d & c-d \\ d & d \end{pmatrix}$ هو أيضاً أحد مورفيزمـات الفئة $\underline{I}^1_{l.M_2(K)}$.

وبملاحظة أن $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$ يكون $A \cong B$ *[[1]p19]* في الفئة $\underline{I}^1_{l.M_2(K)}$.

مثال4.3. لنأخذ $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}; i^2 = -1\}$ وهي حلقة واحدية تبديلية *[[5]p10]*، و إن $A = \{a + ib : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$ هو مثالي في R، أي $A \in \underline{I}^1_{\mathbb{Z}[i]}$ و $f: A \to A \,;\, a + ib \mapsto a - ib$ هو تشاكل مثالي من النوع الأول على الحلقة R أي إنّه أحد مورفيزمات الفئة $\underline{I}^1_{\mathbb{Z}[i]}$.

مثال5.3. لتكن $R = M_2(K)$ حلقة المصفوفات المربعة على الحقل K و لنأخـذ المجموعتين :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in K \right\} \;, B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in K \right\}$$

عندئذٍ إن كلاً من A و B مثالي يميني في R *[[4]p6]*، أي $A, B \in \underline{I}^2_{r.M_2(K)}$، والتطبيق:

$f: A \to B \,;\, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ هو تشاكل مثالي من النوع الثاني أي إنّـه أحد مورفيزمات الفئـة $\underline{I}^2_{r.M_2(K)}$. والتطبيـق $g: B \to A \,;\, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ هو أيضاً أحد مورفيزمات الفئة $\underline{I}^2_{r.M_2(K)}$.

و بملاحظـة أن $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$ يكـون $A \cong B$ فـي الفئـة $\underline{I}^2_{r.M_2(K)}$.

مثـال6.3. لـتكن $R = \mathbb{Z}_6$ إن مثالياتهـا المغـايرة للـصفر والفعليـة جميعهـا *[[6]p4]proper ideals* أي التي لا تساوي الحلقـة R مـن الـشكل $m\mathbb{Z}_6$ حيـث $0 < m < 6$ و m و 6 عددان ليسا أوليين فيما بينهما. عندئذٍ في $\underline{I}^3_{\mathbb{Z}_6}$ يكون:

Objects: المثاليات الفعلية مـن الـشكل $m\mathbb{Z}_6$ حيـث $0 < m < 6$ وm و6 عددان ليسا أوليين فيما بينهما، بالإضافة إلى المثالي الصفري O والحلقة $\mathbb{Z}_6$.

المورفيزمات arrows: التشاكلات المثالية من النوع الثالث على الحلقـة R، ونأخـذ على سبيل المثال المورفيزم $f : \mathbb{Z}_6 \to 3\mathbb{Z}_6 \,; x \mapsto 3x$

مثال7.3. لتكن $R = \mathbb{Z}_{20}$، عندئذٍ في $I^3_{\mathbb{Z}_{20}}$ يكون :

Objects: المثاليات الفعلية من الشكل $m\mathbb{Z}_{20}$ حيث $0 < m < 20$ وm و20 عددان ليسا أوليين فيما بينهما، بالإضافة إلى المثالي الصفري O والحلقة $\mathbb{Z}_{20}$.

المورفيزمات arrows: التشاكلات المثالية من النوع الثالث على الحلقة R، و نأخـذ على سبيل المثال المورفيزم $f: 2\mathbb{Z}_{20} \to 5\mathbb{Z}_{20} \;; x \mapsto 5x$

مثال8.3. لتكن $R = \mathbb{Z}_{30}$، عندئذٍ في $I^3_{\mathbb{Z}_{30}}$ يكون:

Objects: المثاليات الفعلية مـن الـشكل $m\mathbb{Z}_{30}$ حيـث $0 < m < 30$ وm و30 عددان ليسا أوليين فيما بينهما بالإضافة إلى المثالي الصفري O والحلقة $\mathbb{Z}_{30}$.

المورفيزمات arrows: التشاكلات المثالية من النوع الثالث على الحلقة R ، ونأخـذ على سبيل المثال المورفيزم $f: 2\mathbb{Z}_{30} \to 6\mathbb{Z}_{30} \;; x \mapsto 6x$

4. خواص فئة المثاليات من النوع الثالث

1.4. بناء فئات جديدة اعتماداً على الفئة I^3_R وإيجـاد بعـض التـشاكلات الفئويـة المتعلقة بها:

نعلم أنه في نظرية الحلقات اعتماداً على حلقة ما R يمكننا بناء حلقات جديدة ، منهـا حلقة الحدوديات $R[x]$ *[[2]p120]* وحلقة الخارج R/A *[[3]p96]* حيث A مثـالي ليس أعظمياً في R، وعلى هذا الأساس يمكننا بناء فئات جديدة اعتماداً على الفئة I^3_R منها $I^3_{R[x]}$ و $I^3_{R/A}$.

1- بناء الفئة $I^3_{R[x]}$ من الفئة I^3_R :

أولاً: إذا كان A مثالياً في R فمن الواضح أن $A[x]$ مثالي في $R[x]$.

ثانياً: إذا كان $f:A\to B$ مورفيزماً في الفئة $\underline{I}_R^3$ فهو تشاكل حلقي، ومن ثم يوجد تشاكل حلقي وحيد $f[x]:A[x]\to B[x]$ *[[2]p123]*

حيث

$$f[x](a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=(f(a_0)+f(a_1)x+\cdots+f(a_n)x^n)$$

وبسهولة نثبت أن $f[x]$ يحقق الشرطين (3) و(4) من التعريف 3.2. أي إنّه مورفيزم في الفئة $\underline{I}_{R[x]}^3$.

وبالتالي يكون:

$$\begin{array}{ccc} -[x]:\ \underline{I}_R^3 & \longrightarrow & \underline{I}_{R[x]}^3 \\ A & \longmapsto & A[x] \\ f\downarrow & & \downarrow f[x] \\ B & \longmapsto & B[x] \end{array}$$

تشاكل فئوي *functor [[1]p13]* لأن $\forall A\in \underline{I}_R^3:-[x](1_A)=1_A[x]:A[x]\to A[x]$

حيث

$$1_A[x](a_0+\cdots+a_nx^n)=1_A(a_0)+\cdots+1_A(a_n)x^n=a_0+\cdots+a_nx^n$$

فإن $1_A[x]=1_{A[x]}$ ومن أجل $f:A\to B$ و$g:B\to C$ مورفيزمين قابلين للتركيب في $\underline{I}_R^3$ فإن $(g\circ f)[x]:A[x]\to C[x]$ يحقق

$$\begin{aligned}(g\circ f)[x](a_0+\cdots+a_nx^n)&=(g\circ f)(a_0)+\cdots+(g\circ f)(a_n)x^n\\ &=g\big(f(a_0)\big)+\cdots+g\big(f(a_n)\big)x^n\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية:

$$g[x]\circ f[x](a_0+\cdots+a_nx^n)=g\big(f(a_0)\big)+\cdots+g\big(f(a_n)\big)x^n$$

ومنه $(g\circ f)[x]=g[x]\circ f[x]$.

2- بناء الفئة $\underline{I}_{R/A}^3$ من الفئة $\underline{I}_R^3$ حيث A مثالي ليس أعظمياً في R :

إن كل مثالي في الحلقة R/A من الشكل K/A حيث K مثالي فـي R يحـوي A *[[2]p114]*. لنأخذ المجموعة $L=\{K: A \text{ يحوي } R \text{ مثالي في } K\}$ ولنأخذ الفئـة I_L^3 فئة جزئية *[[1]p15]* من I_R^3 فيها:

Objects: جميع مثاليات الحلقة R التي تحوي المثالي A .

المورفيزمات arrows: التشاكلات المثالية من النوع الثالث والمأخوذة من I_R^3 التي تحقق الشرط:إذا كان $f: K_1 \to K_2$ مورفيزماً في الفئة I_L^3 حيث K_1 و K_2 مثاليات من R تحوي A فإن f يحقق $f(A)=A$.

عندئذٍ بناء على الفئة I_L^3 يمكننا بناء فئة جديدة، وهي الفئة $I_{R/A}^3$ حيث إنّه مـن أجـل $K\in I_L^3$ فإننا نقابله بالمثالي $K/A \in I_{R/A}^3$ حيث يوجد تقابل محافظ على علاقـة الترتيب $\subseteq$ (one to one order preserving) بين المثاليات K من الحلقـة R التـي تحوي المثـالي A والمثاليـات K/A مـن الحلقـة R/A *[[5]p2]*، ومـن أجـل $f: K_1 \to K_2$ مورفيزم من I_L^3 فـإن $\varphi: K_1/A \to K_2/A; k+A \mapsto f(k)+A$ مورفيزم من $I_{R/A}^3$ يقابل f ويحقق $\varphi(A)=A$.

وتجدر الملاحظة أنه في الحالة التي يكون فيها المثالي A أعظمياً فـإن $L=\{R,A\}$ وأن الـ objects في الفئة $I_{R/A}^3$ هي المثالي الصفري والحلقة R/A فقط .

نقول عن التشاكل الفئـوي $S: A \to C$ إنّـه تماثـل فئـوي بـين الفئتـين A وC Equivalence of categories إذا وجد تشاكل فئوي $T: C\to A$ مـن أجلـه يكـون $T\circ S \cong 1_A$ و$S\circ T \cong 1_C$ تمـاثلين طبيعيـين natural isomorphisms *[[1]p16]* حيث $1_A, 1_C$ التشاكل الفئوي المطابق للفئة A, C على الترتيب. ونقول في هذه الحالة أن الفئة A تماثل الفئة C ونكتب $A\cong C$.*[[1]p93]*

مبرهنة2.4. إذا كانت R و S حلقتين متماثلتين فإن $I_R^3 \cong I_S^3$.

البرهان: بما أن $R\cong S$ يوجد $f: R\to S$ تشاكلاً حلقياً غامراً ومتبايناً، نأخذ:

$$\begin{array}{ccc} \mu : I_R^3 & \longrightarrow & I_S^3 \\ A & \longmapsto & f(A) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \mu(\alpha) = f(\alpha(-)) \\ B & \longmapsto & f(B) \end{array}$$

حيث $f(\alpha(a))$ $\mu(\alpha): f(A) \to f(B); f(a) \mapsto$ وحيث $\alpha(a) \in B$ فإن $f(\alpha(a)) \in f(B)$.

فإذا كان α تشاكلاً مثالياً من النوع الثالث على الحلقة R فإن $\mu(\alpha)$ تشاكل مثالي من النوع الثالث على الحلقة S، لأن: $\forall f(a_1), f(a_2) \in f(A), \forall s \in S$ حيث $a_1, a_2 \in A$ فإن :

$$\mu(\alpha)\big(f(a_1) + f(a_2)\big) = \mu(\alpha)\big(f(a_1 + a_2)\big) = f\big(\alpha(a_1 + a_2)\big)$$
$$= f\big(\alpha(a_1)\big) + f\big(\alpha(a_2)\big) = \mu(\alpha)(a_1) + \mu(\alpha)(a_2)$$
$$\mu(\alpha)\big(f(a_1)f(a_2)\big) = \mu(\alpha)\big(f(a_1a_2)\big) = f\big(\alpha(a_1a_2)\big) = f\big(\alpha(a_1)\alpha(a_2)\big)$$
$$= f\big(\alpha(a_1)\big)f\big(\alpha(a_2)\big) = \mu(\alpha)\big(f(a_1)\big)\mu(\alpha)\big(f(a_2)\big)$$

بما أن f تشاكل حلقي غامر وبالتالي من أجل $s \in S$ فإنه يوجـد $r \in R$ حيـث $s = f(r)$ ومنه

$$\mu(\alpha)\big(sf(a_1)\big) = \mu(\alpha)\big(f(r)f(a_1)\big) = \mu(\alpha)\big(f(ra_1)\big) = f\big(\alpha(ra_1)\big) = f\big(r\alpha(a_1)\big)$$
$$= f(r)f\big(\alpha(a_1)\big) = sf\big(\alpha(a_1)\big) = s\mu(\alpha)\big(f(a_1)\big)$$

بالأسلوب نفسه يكون $\mu(\alpha)(f(a_1)s) = \mu(\alpha)\big(f(a_1)\big)s$.

أيضاً إن μ تشاكل فئوي لأنه من أجل $1_A: A \to A$ مورفيزم الواحدة لـ A فـي I_R^3 فــإن $\mu(1_A): f(A) \to f(A); f(a) \mapsto f\big(1_A(a)\big) = f(a)$، ومنــه $\mu(1_A) = 1_{\mu(A)} = 1_{f(A)}$. وإذا كان $\alpha: A \to B$ و $\beta: B \to C$ مورفيزمين قابلين للتركيب في I_R^3 فإن:

$$\mu(\beta\circ\alpha): f(A)\to\ f(C)\,; f(a)\mapsto f\big((\beta\circ\alpha)(a)\big)$$

ومن جهة ثانية:

$$\mu(\beta)\circ\mu(\alpha): f(A)\to\ f(C)\,; f(a)\mapsto\ \mu(\beta)\circ\mu(\alpha)\big(f(a)\big)$$

حيث

$$\mu(\beta)\circ\mu(\alpha)\big(f(a)\big)=\mu(\beta)\Big(\mu(\alpha)\big(f(a)\big)\Big)=\mu(\beta)\big(f(\alpha(a)\big)$$
$$=f\Big(\beta\big(\alpha(a)\big)\Big)=f\big((\beta\circ\alpha)(a)\big)$$

ومنه $\mu(\beta\circ\alpha)=\mu(\beta)\circ\mu(\alpha)$.

ولنأخذ:

$$\begin{array}{ccc}
\lambda:\underline{I}_S^3 & \longrightarrow & \underline{I}_R^3\\
A & \longmapsto & f^{-1}(A)\\
\alpha\Big\downarrow & & \Big\downarrow\lambda(\alpha)\\
B & \longmapsto & f^{-1}(B)
\end{array}$$

حيث $\lambda(\alpha): f^{-1}(A)\to\ f^{-1}(B)\,; f^{-1}(a)\mapsto f^{-1}\big(\alpha(a)\big)$ بالأسلوب نفسه نثبت أن $\lambda(\alpha)$ تشاكل بين مثاليين من النوع الثالث على الحلقة R إذا كان α تشاكلاً مثالياً من النوع الثالث على الحلقة S، وأن λ تشاكل فئوي .

و بملاحظة أن:

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{I}_R^3 & \xrightarrow{\ \mu\ } & \underline{I}_S^3 & \xrightarrow{\ \lambda\ } & \underline{I}_R^3\\
A & \longmapsto & f(A) & \longmapsto & f^{-1}f(A)=A\\
\alpha\Big\downarrow & & \Big\downarrow f\big(\alpha(-)\big) & & \Big\downarrow f^{-1}\Big(f\big(\alpha(-)\big)\Big)=\alpha\\
B & \longmapsto & f(B) & \longmapsto & f^{-1}f(B)=B
\end{array}$$

يكون $\lambda \circ \mu \cong 1_{I_R^3}$ تماثلاً طبيعياً حيث $1_{I_R^3}$ التشاكل الفئوي المطابق للفئة I_R^3 .

وبالأسلوب نفسه يكون $\mu \circ \lambda \cong 1_{I_S^3}$ تماثلاً طبيعياً. ومن ثم $I_R^3 \cong I_S^3$.

نتيجـة3.4. لـيكن A وB مثـاليين فـي حلقـة R بحيـث $A \subset B$ وبمـا أن $\frac{R/A}{B/A} \cong R/B$ فإن $I^3_{R/B} \cong I^3_{\frac{R/A}{B/A}}$.

لتكن R وS حلقتين إن $R \times S = \{(r,s): r \in R, s \in S\}$ حلقة. *[[3]p91]*

تمهيدية4.4. إذا كان $A_1 \times S_1$ مثالياً في الحلقة $R \times S$ فإن A_1 مثـالي فـي R وS_1 مثالي في S .

الإثبات: لتكن $A_1 \times S_1$ مجموعة جزئية من $R \times S$ غير خالية تُشكل مثالياً فيها يكفي ملاحظة ما يأتي:

$$\forall (a_1,s_1),(a_2,s_2) \in A_1 \times S_1, \forall (r,s) \in R \times S$$

$$(a_1,s_1) - (a_2,s_2) = (a_1 - a_2, s_1 - s_2) \in A_1 \times S_1$$

$$(a_1,s_1)(a_2,s_2) = (a_1a_2, s_1s_2) \in A_1 \times S_1$$

$$(r,s)(a_1,s_1) = (ra_1, ss_1) \in A_1 \times S_1$$

$$(a_1,s_1)(r,s) = (a_1r, s_1s) \in A_1 \times S_1$$

يكون A_1 مثالياً في R و S_1 مثالياً في S .

إذا كانت R وS حلقتين عندئذٍ $I^3_{R\times S}$ فيها:

bjects: المثاليات من الشكل $A_1 \times S_1$ حيث A_1 مثالي في R وS_1 مثالي في S.

المورفيزمات Arrows: الأزواج $f \times g: A_1 \times S_1 \to A_2 \times S_2$ إذْ $f: A_1 \to A_2$ تشاكل مثالي من النوع الثالث على الحلقة R و$g: S_1 \to S_2$ تشاكل مثالي مـن النـوع الثالث على الحلقة S وبحيث $f \times g(a,s) = (f(a), g(s))$ وذلك أيـاً كـان $(a,s) \in A_1 \times S_1$.

ووفقاً لهذا التعريف يكون $f \times g$ تشاكلاً مثالياً من النـوع الثالـث علـى الحلقـة $R \times S$. وبحيـــث يكـــون مـــورفيزم الواحـــدة للمثـــالي $A_1 \times S_1$ هو $1_{A_1 \times S_1} = 1_{A_1} \times 1_{S_1}$ وبحيث نعرف عملية تركيب المورفيزمات بالشكل:

من أجل $f_1 \times g_1$ و$f_2 \times g_2$ مورفيزمين قـابلين للتركيـب فـي $\underline{I}^3_{R\times S}$ فـإن:

$$f_1 \times g_1 \circ f_2 \times g_2 = f_1 \circ f_2 \times g_1 \circ g_2$$

ولدينا حسب تعريف جداء الفئات *[[1]p36]* أن جداء الفئتين $\underline{I}^3_R$ و $\underline{I}^3_S$ هـو الفئـة $\underline{I}^3_R \times \underline{I}^3_S$ ويتحقق فيها:

Objects: الأزواج $\langle A_1, S_1 \rangle$ حيث $A_1 \in \underline{I}^3_R$ و $S_1 \in \underline{I}^3_S$.

المورفيزمات Arrows: الأزواج $\langle f,g \rangle : \langle A_1,S_1 \rangle \to \langle A_2,S_2 \rangle$ حيث $f: A_1 \to A_2$ مورفيزم في $\underline{I}^3_R$ و$g: S_1 \to S_2$ مورفيزم في $\underline{I}^3_S$، وبحيث يكون مورفيزم الواحدة لـ $\langle A_1,S_1 \rangle$ هو $1_{\langle A_1,S_1 \rangle} = \langle 1_{A_1}, 1_{S_1} \rangle$ و من أجـل $\langle f_1, g_1 \rangle$ و$\langle f_2, g_2 \rangle$ مـورفيزمين قابلين للتركيب فإن: $\langle f_1, g_1 \rangle \circ \langle f_2, g_2 \rangle = \langle f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2 \rangle$.

مبرهنة5.4. إذا كانت R و S حلقتين فإن: $\underline{I}^3_{R\times S} \cong \underline{I}^3_R \times \underline{I}^3_S$.

البرهان : لنأخذ

$$\begin{array}{ccc}
\lambda : \underline{I}^3_{R\times S} & \longrightarrow & \underline{I}^3_R \times \underline{I}^3_S \\
A_1 \times S_1 & \longmapsto & \langle A_1, S_1 \rangle \\
f \times g \downarrow & & \downarrow \langle f, g \rangle \\
A_2 \times S_2 & \longmapsto & \langle A_2, S_2 \rangle
\end{array}$$

و بملاحظـة أن $\lambda(1_{A_1\times S_1}) = \lambda(1_{A_1} \times 1_{S_1}) = \langle 1_{A_1}, 1_{S_1} \rangle = 1_{\langle A_1,S_1 \rangle}$

ومن أجل $f_1 \times g_1$ و $f_2 \times g_2$ مورفيزمين قابلين للتركيب في $\underline{I}^3_{R\times S}$

$$\lambda(f_1 \times g_1 \circ f_2 \times g_2) = \lambda(f_1 \circ f_2 \times g_1 \circ g_2) = \langle f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2 \rangle$$
$$= \langle f_1, g_1 \rangle \circ \langle f_2, g_2 \rangle = \lambda(f_1 \times g_1) \circ \lambda(f_2 \times g_2)$$

يكون λ تشاكلاً فئوياً. ولنأخذ :

$$\begin{array}{ccc}
\mu : \underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3 & \longrightarrow & \underline{I}_{R\times S}^3 \\
\langle A_1, S_1 \rangle & \longmapsto & A_1 \times S_1 \\
\langle f, g \rangle \downarrow & & \downarrow f \times g \\
\langle A_2, S_2 \rangle & \longmapsto & A_2 \times S_2
\end{array}$$

وبملاحظـــة أن: $\mu\left(1_{\langle A_1,S_1\rangle}\right) = \mu\left(\langle 1_{A_1}, 1_{S_1}\rangle\right) = 1_{A_1} \times 1_{S_1} = 1_{A_1\times S_1}$

ومن أجل $\langle f_1, g_1 \rangle$ و $\langle f_2, g_2 \rangle$ مورفيزمين قابلين للتركيب في $\underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3$

$$\begin{aligned}
\mu(\langle f_1, g_1 \rangle \circ \langle f_2, g_2 \rangle) &= \mu(\langle f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2 \rangle) = f_1 \circ f_2 \times g_1 \circ g_2 \\
&= f_1 \times g_1 \circ f_2 \times g_2 = \mu(\langle f_1, g_1 \rangle) \circ \mu(\langle f_2, g_2 \rangle)
\end{aligned}$$

يكون μ تشاكلاً فئوياً ويكون $\lambda \circ \mu \cong 1_{\underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3}$ تماثلاً طبيعيـاً حيـث $1_{\underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3}$ التشاكل الفئوي المطابق للفئة $\underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3$. وبالأسلوب نفسه يكون $\mu \circ \lambda \cong 1_{\underline{I}_{R\times S}^3}$ تماثلاً طبيعياً ومن ثم $\underline{I}_{R\times S}^3 \cong \underline{I}_R^3 \times \underline{I}_S^3$.

يمكننا تعميم المبرهنة السابقة على عدد منتهٍ من الحلقات

مبرهنـة6.4. لـتكن $R_1, R_2, \ldots, R_n$ أسـرة منتهيـة مـن الحلقـات عندئـذٍ

$$\underline{I}_{R_1\times R_2\times\ldots\times R_n}^3 \cong \underline{I}_{R_1}^3 \times \underline{I}_{R_2}^3 \times \ldots \times \underline{I}_{R_n}^3$$

البرهان : يتم البرهان بأسلوب مماثل للمبرهنة السابقة .

REFERENCES

[1] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician.* Springer, Verlag, New York, Second Edition.
[2] Grillet, P. A. (2007). *Abstract Algebra*. Springer science and Business Media, Second Edition, 105-148.
[3] Mac Lane, S and Birkhoff, G. (1999). *Algebra*. American Mathematical Society. Third Edition 85-124.
[4] Lam, T, Y. (2003). *Exercises in classical ring theory*. Springer-Verlag, New York, Second Edition.
[5] Atiyah, M. F and Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative Algebra*, Addison-Wesly.
[6] Northcott, D. G. (1954). *Ideal Theory*. The syndics of the Cambridge University.