دراسة في حل الشذوذية A_n على حقل مميزه $\neq 2$

لؤي هاروني ويوسف الوادي

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريخ الإيداع 2010/07/04

قبل للنشر في 2011/02/21

الملخّص

تعد الشذوذات بشكل عام من الموضوعات المهمة في الهندسة الجبرية والرياضيات التطبيقية. ومنها البسيطة أو الشذوذات من النمط ADEالتي لفتت الانتباه لكونها ظهرت بشكل منفصل في مجالات مختلفة من التطبيقات العلمية وتعود التسمية لثلاثة أشكال مرمزة بالأحرف A وD وE تعبر عن أنماط من زمر لي، وقد طرح أرنولد Arnold العلاقات المعبرة عنها بشكل صريح، وهناك كثيرون ممن قدموا دراسات مهمة في الموضوع مثل M .Roczen الذي قدم الحل القانوني لها في البعد 3 على حقل مميزه لا يساوي 2، ويقصد بالحل إيجاد متنوعة مكافئة لهذه المتنوعة تكون غير شاذة، أما الحل القانوني فيضيف وصفاً إلى المحل الاستثنائي. هناك العديد من التطبيقات لهذا الموضوع ظهرت في الهندسة التفاضلية والفيزياء النظرية. تعبر العلاقة (1) عن الشذوذات البسيطة (simple singularities) من النمط A_n من البعد الخامس عند نقطة الأصل في الفضاء $\mathbb{A}_k^6$. في هذا البحث نقدم دراسة للحل لهذه الشذوذات وتحديد الحل القانوني (canonical resolution) لها .

الكلمات المفتاحية: متنوعة، شذوذية، المحل الاستثنائي، الحل القانوني، غير شاذة، النفخ، زمرة بيكارد، القواسم.

التصنيف الرياضي: 14-B05

A study in the resolution of A_n singularity on a field with characteristic $\neq 2$

L. Harouni and Y. Alwadi
Department of Mathematics, Faculty of sciences, Damascus University, Syria.

Received 04/07/2010
Accepted 21/02/2011

ABSTRACT

Singularities in general are considered to be one of the important issues in algebraic geometry and applied mathematics, among them the ADE or simple singularities which drew attention since they have appeared separately in various areas of scientific applications. The name comes from three graphs characterized by letters A, D and E denoting types of Lie groups. Arnold stated them in a direct manner. Many people gave studies about the subject like Roczen.M who presented the canonical resolution in dimension 3 and Char $\neq$ 2. giving an equivalent non-singular variety is what meant by resolution, Canonical resolution adds a description of the exceptional loci. There are many applications on this subject found in differential geometry and theoretical physics. Relation (1) defines the simple singularities A_n with dimension 5 at the origin of A_k^6, here we present a study about how to resolve A_n and determine the canonical resolution.

Key words: Variety, Singularity, Exceptional locus, Canonical resolution, Nonsingular, Blowing-up, Picard group, Divisors.

Mathematical Classification: 14-B05

1. مقدمة:

إن العلاقة $X_1^{n+1}+X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2=0$ (1) تعـرف الشذوذات البسيطة من النوع A_n في متنوعة (*Variety*) من البعد الخامس عند نقطة الأصل في A_k^6 إذ $char\ k\neq 2$ (تستنتج من القائمة $\mathrm{I}.1$ [2] إذ يشير المرجـع إلى X^2+Y^{k+1} في البعد 1 ويشير في $\mathrm{I}.2$ إلى أنه من أجل الأبعاد الأخرى يتم استنتاجها بإضافة $X_2^2+\cdots+X_n^2$ بحسب البعد).إن المتنوعة A_n شاذة في نقطـة الأصل $0\in A_k^6$ وعندما نقوم بنفخها في هـذه النقطـة ينـتج لـدينا متنوعـة فـي $\mathbb{A}^6\times\mathbb{A}^5$ شاذة في نقطة واحدة، وبأخذ جوار لهذه النقطة نجـدها (مـستفيدين مـن تعريف النقط المتماثلة في[3]) تكافئ النقطة الشاذة في A_{n-2} ونقوم بنفخها من جديـد وهكذا في كل مرة ينتج لدينا ما يسمى بالمحل الاستثنائي (*Exceptional Loci*) لهـذا النفخ الذي هو تقاطع الصورة العكسية للنقطة الشاذة لتطبيق النفخ مع التحويـل الـدقيق (*strict transform*)، ونصل في المحصلة إلى حالتين بحسب كون n فردياً أو زوجياً، ودائماً نحصل على نقط شاذة معزولة تماماً (مبرهنة فـي [1]). تكـون نقطـة شـاذة (*Singular point*) معزولة معزولةً تماماً (*Absolutely isolated*) إذا كان شذوذها يحل بمتتالية منتهية من عمليات النفخ(*Blowing-up*) لنقط مغلقة (كما ورد فـي [4]).

وسنعمل في هذا البحث على:1- إيجاد الحل للشذوذات البسيطة من البعد الخـامس 2- إيجاد الحل القانوني (الذي قد يتطلب عمليات نفـخ إضـافية لإزالـة شـذوذ المحـل الاستثنائي)بتحديد المحلات الاستثنائية (بعد إزالة الشذوذ) و تقاطعاتها .

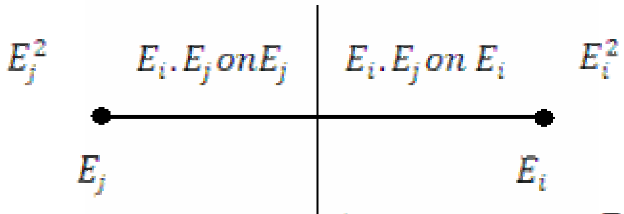
2. تعريف: يقال عن نقطتين متنوعتين $P\in X, Q\in Y$ إنهما متماثلتان تحليليـاً إذا كان $\widehat{O_P}\cong\widehat{O_Q}$ ($k-$ جبور) إذ $\widehat{O_P}=(k[[X_1,\dots,X_n]]/\mathrm{I}(X))_{\mathrm{M_P}}$ وإذ $k[[X_1,\dots,X_n]]$ هي حلقة سلاسل القوى و M_P هو المثالي الأعظمي [1].

وإذا كان $k[[X_1,\dots,X_n]]/(g)\cong k[[X_1,\dots,X_n]]/(f)$ بوصـفهما $k-$ جبور نكتب $f\sim g$ (نتائج [2]).

يبنى الحل القانوني *(Canonical Resolution)* بإعطاء وصف للمحل الاستثنائي

$E = E_1 + E_2 \dots + E_m$ (كما كان العمل في [4]).

لكونه عنصراً من زمرة بيكارد (*Picard group*) (زمرة صفوف التكافؤ للحـزم العكوسة (*invertible sheaves*) على متنوعة) وتحديد الأنماط المتماثلة لـ E_i وتحديد التقاطعات $E_i.E_j$ و التقاطعات الذاتية E_i^2 $(Self\ Intersections)$ ورسـم بيان E_i



إذ E_i و E_j متصلتان إذا و فقط إذا $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ (الترميز الذي اتبع في [4]).

3. الحل بالنسبة إلى A_n :

$$A_n : X_1^{n+1} + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2$$

لنضع $f = X_1^{n+1} + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0$:

المصفوفة اليعقوبية (*Jacobian Matrix*) للمتنوعة $V(f)$ هي

$J = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = [(n+1)\,X_1^n \quad 2X_2 \quad 2X_3 \quad \dots \quad 2X_6]$ [3].

(تكون متنوعة ما في A_k^n غير شاذة عند نقطة إذا كانت رتبة المصفوفة اليعقوبيـة عند هذه النقطة تساوي *n-r* إذْ *r* بعد المتنوعة) ومن ثم إن رتبة المصفوفة تكون عنـد النقطة الشاذة أصغر من 1=5-6 أي صفراً ومنـه فـإن A_n شـاذة فقـط عنـدما $X_1^n = 2X_2 = 2X_3 = \dots 2X_6 = 0$ أي إن $0 \in A_k^6$ هي النقطة الشاذة الوحيدة في المتنوعة A_n ، لنقم بنفخ A_n عند 0

$$A_n: \ \widetilde{A_n}: X_iU_j = X_jU_i; \quad X_1^{n+1} + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0$$

$$\varphi: \widetilde{A_n} \longrightarrow$$

ضمن $\mathbb{A}^6 \times \mathbb{P}^5 (X_1, X_2 \dots, X_6; U_1 : U_2 : \dots : U_6)$

نأخذ التغطيات المفتوحة فنجد:

$$\widetilde{A_n}: U_1: X_1^{n-1} + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0 \sim A_{n-2}$$

ومنه فإن نفخ A_n فـي نقطـة الأصـل يعطينـا متنوعـة شـاذة فـي النقطـة $(0;1:0:..:0)$ وبأخذ جوار لها $U_1 = 1$ فإن هذه النقطـة الـشاذة علـى $\widetilde{A_n}$ مماثلة للأصل في A_{n-2} والمحل الاستثنائي $(\varphi^{-1}(0) \cap \widetilde{A_n})$ ونرمز له بـ E^s [4].

$$E^s = \{(0, U_1: U_2: \ldots : U_6): U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$$

ولدينا $Cl(E^s) \cong \mathbb{Z}$ [3] (زمرة صفوف القواسـم *(Divisors Class Group)*) والمحل الاستثنائي شاذ في النقطة $(1:0:0:..:0)$ ويزول هذا الشذوذ فـي الـنفخ التالي، وهكذا نجد أن النفخ للأصل يعطينا $A_{n-2} \longrightarrow A_n$ ومـن ثـم نصل إلى A_1 أو A_2 (بحسب كون *n* فردياً أو زوجياً)

i. في حالة A_2

$$A_2: X_1^3 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0$$

ننفخ عند الأصل فيكون لدينا:

$$U_1: X_1 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

والمحل الاستثنائي هو E^s ومن ثم فهو شـاذ فـي $(1:0:0:..:0)$ ومـع أن المتنوعة غير شاذة لكن نحتاج إلى نفخ جديد لإزالة شذوذ المحل الاستثنائي حتى نبنـي الحل القانوني (الذي يشترط فيه مركبات غير شاذة للمحل الاستثنائي) $\widetilde{E^s} \longrightarrow E^s$:

إن E^s تمثل مخروطاً *(cone)* فوق متنوعة في $\mathbb{P}^4$ أي:

$$Y = \{(U_2: \ldots : U_6): U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$$

و$E^s = C(Y)$

إن نفخ $E^s \subseteq \mathbb{P}^5$ في $(1:0:0:..:0)$ يعطي $\widetilde{E^s}$ في $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$ غير شاذة $\widetilde{E^s} = P(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$ و $\mathcal{O}_Y$ حزمة عكوسة في زمرة بيكارد تقابل القاسم Y [3] .

ننفخ النقطة (ونأخذ الجوار U_1 للنقطة الشاذة) ولدينا بحـسب التغطيـات المفتوحـة $V_i \neq 0$:

$$V_1: 1 + X_1V_2^2 + X_1V_3^2 + X_1V_4^2 + X_1V_5^2 + X_1V_6^2 = 0$$

والمحل الاستثنائي الجديد الناتج عن هذا النفخ هو

$$\dot{E} = \{(1:0:0:\ldots:0;0:V_2:V_3:V_4:V_5:V_6) : V_i \in k\}$$

إذاً $\dot{E} \approx \mathbb{P}^4$.

ii.أما في حالة A_1 فيكون لدينا بعد النفخ :

$$U_1: 1 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

أي إن $\widetilde{A_1}$ غير شاذة والمحل الاستثنائي

$$Q = \{(U_1:\ldots:U_6): U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0\}$$

$Q \subseteq \mathbb{P}^5$ وعدد المتحولات > 4

إذاً $ClE \cong \mathbb{Z}$ ([3]) و $E = Q$ غير شاذ.

النتيجة(1) : من خلال ما سبق نجد أن متتالية النفخ هي

$$n \equiv 0 \ mod\ 2: \ A_n \longleftarrow A_{n-2} \longleftarrow \cdots A_2 \longleftarrow A_0 \longleftarrow A_0$$

$$n \equiv 1 \ mod\ 2: \ A_n \longleftarrow A_{n-2} \longleftarrow \cdots A_3 \longleftarrow A_1 \longleftarrow A_0$$

والترميز A_0 هو للباحث *Marco Roczen* في إشارة منه إلى المتنوعة غير الشاذة في آخر النفخ ([4]) وتمثل المتتاليتان السابقتان **حل الشذوذات من النمط A_n .**

4- المحلات الاستثنائية E_i: للوصول إلى الحل القانوني لا بد من تحديد المحلات الاستثنائية وتحديد النقاط الشاذة، ومن ثم نفخها للوصول إلى متنوعات غير شاذة.

عدد حالات الـنفخ تـساوي $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ، إذ $\left[\frac{n}{2}\right]$ القـسم الـصحيح لـ $\frac{n}{2}$

و$E_1, E_2, \ldots, E_m$ المركبات الاستثنائية غير الخزولة للمحل الاستثنائي E .

من أجل $t \neq 1$ لدينا $A_t \longleftarrow \widetilde{A_t}$

$$\widetilde{A_t}: U_1: X_1^{t-1} + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

ينتج أن $E^s = V(U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2)$

ننفخ من جديد (في جوار U_1 للنقطة الشاذة لـ E^s)

$$\mu: \widetilde{A_t} \longleftarrow \mathbb{A}^6 \times \mathbb{P}^5(X_1, U_2, \dots, U_6; V_1 : V_2 : \dots : V_6)$$

مـــن أجـــل $t = 2$ وعنـــدما $V1 = 1$ لـــدينا: $V_1 : U_i = X_1 V_i$،

$$\widetilde{A_t}\,|_{V_1} : X_1 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0$$

الصورة العكسية لـ E^s في $\mathbb{A}^6 \times \mathbb{P}^5$ في التغطية $V_1 = 1$:

$$V_1 : \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_1} = V(X_1^2(V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2))$$

$$\mu^{-1}(E^s)\,|_{V_1} = 2V(X_1) + V(V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2)$$

$$E_{new}\,|_{V_1} = \dot{E}\,|_{V_1} = V(X_1)$$

$$\Longrightarrow \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_1} = \widetilde{E^s}\,|_{V_1} + 2\,\dot{E}\,|_{V_1}$$

أيضاً $V_2 U_i = V_i U_2$, $V_2 X_1 = V_1 U_2$ والصورة العكـسية لـ E^s فـي $\mathbb{A}^6 \times \mathbb{P}^5$ في التغطية $V_2 = 1$:

$$V_2 : \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_2} = V(U_2^2(1 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2))$$

$$\mu^{-1}(E^s)\,|_{V_2} = 2V(U_2) + V(1 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2)$$

ولدينا $\widetilde{A_t}\,|_{V_2} : U_2 V_1^3 + 1 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0$

$$E_{new}\,|_{V_2} = \dot{E}\,|_{V_2} = V(U_2)$$

$$\Longrightarrow \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_2} = \widetilde{E^s}\,|_{V_2} + 2\,\dot{E}\,|_{V_2}$$

وبالمثل:

$$V_3 : \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_3} = \widetilde{E^s}\,|_{V_3} + 2\,\dot{E}\,|_{V_3}$$

$$V_4 : \mu^{-1}(E^s)\,|_{V_4} = \widetilde{E^s}\,|_{V_4} + 2\,\dot{E}\,|_{V_4}،$$

$$V_5: \mu^{-1}(E^s)|_{V_5} = \widetilde{E^s}|_{V_5} + 2\dot{E}|_{V_5}$$ ،

$$V_6: \mu^{-1}(E^s)|_{V_6} = \widetilde{E^s}|_{V_6} + 2\dot{E}|_{V_6}$$

أي أن : $\mu^{-1}(E^s) = \widetilde{E^s} + 2\dot{E}$

أما من أجل $t \neq 2$ فيكون لدينا :

$$V_1: \mu^{-1}(E^s)|_{V_1} = V(X_1^2(V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2))$$

$$= 2V(X_1) + V(V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2)$$

$$\widetilde{A_t}|_{V_1}: X_1^{t-1} + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

$$X_1^2(X_1^{t-3} + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2) = 0$$

$$E_{new}|_{V_1} = V(X_1^2) = 2V(X_1) \Longrightarrow$$

$$\mu^{-1}(E^s)|_{V_1} = \widetilde{E^s}|_{V_1} + E_{new}|_{V_1}$$

وبالمثـ ـل بالنـ ـسبة إلـ ـى بقيـ ـة التغطيـ ـات $V_i \neq 0$ ينـ ـتج لـ ـدينا:

$\mu^{-1}(E^s) = \widetilde{E^s} + E_{new}$ إذ $E_{new} = E^s$.

لدينا من [3]:

$$Cl(\widetilde{E^s} - E') \cong Cl(E^s - P) \cong Cl(E^s)$$

إذ P النقطة التي يتم النفخ فيها (0,1:0:0:0:0:0) وE' المحل الاستثنائي للنفخ

$$\widetilde{E^s} \longrightarrow E^s$$

ولدينا المتتالية التامة :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow Cl(\widetilde{E^s}) \longrightarrow Cl(\widetilde{E^s} - E') \longrightarrow 0$$

$$1 \longmapsto 1.E'$$

[3]. ومنـه $Cl(\widetilde{E^s}) = Cl(E^s) \oplus \mathbb{Z}$ ولكـن لـ دينا $\mathbb{Z} = Cl(E^s)$
$Cl(E^s)$ مولد بـ $H' = H.E^s$ (إذْ H فوق مستوٍ *Hyper plane* فـي $\mathbb{P}^5$). إذاً
$Cl(\widetilde{E^s}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ و$Cl(\widetilde{E^s})$ مولد بـ H' وE'.

4 – التقاطعات $E_k . E_l$:

أولاً: عندما $k + 1 \neq m$

إن مركبة المحل الاستثنائي E_{k+1} ناتجة عن عملية نفخ A_t في النقطـة الـشاذة $(0;1:0:..:0)$ التي هـي نقطـة شـذوذ E_k ومـن ثـم تقـاطع E_{k+1} مـع $\widetilde{E_k}$(على $\widetilde{E_k}$) هوE' أي إن

$$E_{k+1} . E_k \mid_{E_k} = E'$$

ولنقم بحساب قيمة التقاطع على E_{k+1}:

$$A_t : X_1^{t+1} + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0$$

$$E_k \mid_{A_t} : X_1 = 0 \,, X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = 0$$

$$\widetilde{A_t} : U_1 : X_1^{t-1} + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

$$\widetilde{E_k} \mid_{A_t} : U_1 = 0 \,, U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

$$E_{k+1} : U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0$$

$$\widetilde{E_k} \mid_{A_t} \cap E_{k+1} = I = \{(U_1 :.: U_6) : U_1 = 0, U_2^2 + \cdots + U_6^2 = 0\}$$

إن $E_{k+1} \subseteq \mathbb{P}^5$ شاذ في $(1:0:..:0)$ونفخه في $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^4$:هو

$$V_2 : 1 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0$$

$$V_3 : V_2^2 + 1 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0$$

$$\vdots$$

$$V_6 : V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + 1 = 0$$

$$\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^4 (U_1 : U_2 : U_3 : U_4 : U_5 : U_6 ; V_2 : V_3 : V_4 : V_5 : V_6)$$

المحل الاستثنائي لهذا النفخ هو $E' = \{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$

ومنه فإن $Cl(E') = \mathbb{Z}$ مولد بـ $J' = J.E'$ إذْ J فوق مـستوٍ فـي $\mathbb{P}^4$ (مثـل $\tilde{I} = \{U_1 = 0 , V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\}(V_1 = 0$

ونظراً إلى أن $Cl(\tilde{E}_{k+1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ إذ $Cl(\tilde{E}_{k+1})$ مولد بـ E', H' إذاً:

$$(*)\ \tilde{I} = \alpha E' + \beta H' \quad \alpha, \beta \in k$$

وبضرب طرفي * بـ E' نجد $E'.\tilde{I} = \alpha E'^2 + \beta H'.E'$

إن $E'.\tilde{I} = 0$ لأن I لا تحوي النقطة الـشاذة لـ E_{k+1} و $Cl(E') \cong \mathbb{Z}$

ولنأخذ مقصور العلاقة على E'

$$0 = \alpha E'^2 \mid_{E'} + \beta H'.E' \mid_{E'}$$

لأن $E'^2 \sim -2J$ من الدرجة الثانية في $\mathbb{P}^4$ ومن ثم $E'^2 \mid_{E'} = -2J'$ لأن E'

ولنأخذ $H = \{V_3 = 0 \subseteq \mathbb{P}^5\}$ و $J = \{U_2 = 0 \subseteq \mathbb{P}^4\}$

$$H'.E' = \{(1{:}0{:}\ldots{:}0;0{:}0{:}V_4{:}V_5{:}V_6), V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$$

إذاً $H'.E' \mid_{E'} \sim J'$ ومنه فإن $0 = -2\alpha J' + \beta J'$ إذاً $2\alpha = \beta$ وبضرب طرفـي * بـ H' نجـد أن $\tilde{I}.H' = \alpha E'.H' + \beta H'^2$. إن $H'^2 = 0$ و $\tilde{I}.H' \mid_{\mathbb{P}^5} \sim J'$ ومنـه فـإن $\alpha = 1$ ومـن ثـم $\beta = 2$ أي إن $E_{k+1}.E_k \mid_{E_{k+1}} = E' + 2H'$ (إن المحلات الاستثنائية من عمليات نفخ متتالية فقط هي التي تتقاطع)

ثانياً: عندما $k + 1 = m$

أ- من أجل $n \equiv 0 \mod 2$

$$E_{m-1} = \{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_6^2 = 0 \subseteq \mathbb{P}^5\}$$

والنفخ ذو الرقم m هو نفخ لـ E_{m-1} إذْ

$$\tilde{E}_{m-1} = \{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^4$$

$E_m \cong \mathbb{P}^4$ و $cl(E_m) \cong \mathbb{Z}$ مولد بفوق مستوٍ وليكن H_0

إن $E_{m-1}.E_m|_{E_{m-1}} = E'$ كالسابق، أما $E_{m-1}.E_m|_{E_m} = 2H_0$

فلأن $\tilde{E}_{m-1}$ فوق سطح *hyper surface* من الدرجة الثانية في $\mathbb{P}^4$

ب- من أجل $n \equiv 1 \ mod \ 2$

$$\tilde{E}_{m-1} = \{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^4$$

أما $E_m = \{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$

$E_{m-1}.E_m|_{E_{m-1}} = E'$ كما في السابق وتقاطع E_m مع $\tilde{E}_{m-1}$ هو $\{V_1^2 = 0\}$ و$cl(E_m) \cong \mathbb{Z}$ حسب [3] لأن $r = 6$ ومولد بـ $E_m.H$ إذْ H فوق مستوٍ في $\mathbb{P}^5$ ومن ثم يكون:

$$E_{m-1}.E_m|_{E_m} = 2H \qquad (7)$$

5-التقاطعات الذاتية E_k^2:

أولاً: من أجل $k \neq m-1, m$ لدينا $\mu^{-1}(E^s) = \widetilde{E^s} + \dot{E}$

إذْ $\dot{E}$ المحل الاستثنائي الجديد والتطبيق μ يراعي القواسم وحيث إن E^s ممثلة بحدودية غير خزولة إذاً E^s تكافئ أي عنصر صفري في زمرة القواسم وليكن $\frac{1}{X_1}$ إذاً $E^s \sim \frac{1}{X_1}$ ومنه $\widetilde{E^s} + \dot{E} \sim \mu^{-1}(\frac{1}{X_1})$

$\frac{1}{X_1} \sim -X_1$ و $\mu^{-1}(X_1) = \{U_1 = 0\} \cup \dot{E}$ أي $\mu^{-1}\left(\frac{1}{X_1}\right) \sim V(U_1)$

إذاً:

$$\widetilde{E^s} + \dot{E} \sim -V(U_1) \text{ و } \widetilde{E^s} \sim -V(U_1) - \dot{E}$$

$\widetilde{E^s}^{\,2} = \widetilde{E^s}.\widetilde{E^s} = \widetilde{E^s}.(-V(U_1) - \dot{E})$ و $\widetilde{E^s}.V(U_1)$ هي المجموعة: $\{U_1 = 0\,, V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2 = 0\}$ أي

$$\widetilde{E^s}.V(U_1) \sim E' + 2H'$$

أما $\widetilde{E^s}.\dot{E}$ فهو المحل الاستثنائي لنفخ $\widetilde{E^s}$ أي هو E' إذاً:

$$\widetilde{E^s}^{\,2} = -E' - 2H' - E' = -2E' - 2H'$$

$$E_k^2 = \widetilde{E^s}^{\,2} = -2E' - 2H'$$

ثانياً: من أجل $k = m - 1$ تكون لدينا إحدى الحالتين:

$$n \equiv 1 \bmod 2$$

هنا E_{m-1} هو نفخ A_3 التي تماثل الحالة السابقة أي

$$E_{m-1}^2 = \widetilde{E^s}^{\,2} = -2E' - 2H'$$

$$n \equiv 0 \bmod 2$$

هنا E_{m-1} هو نفـخ A_2 وكمـا وجـدنا $\mu^{-1}(E^s) = \widetilde{E^s} + 2\dot{E}$ ومنـه

$$\widetilde{E^s} + 2\dot{E} \sim -V(U_1)$$

$$\widetilde{E^s} \sim -2\dot{E} - V(U_1)$$

ومنه

$$\widetilde{E^s}^{\,2} = \widetilde{E^s}.\widetilde{E^s} = \widetilde{E^s}.\left(-V(U_1) - 2\dot{E}\right)$$

إذاً $\widetilde{E^s}^{\,2} = -E' - 2H' - 2E'$ $\quad E_{m-1}^2 = -3E' - 2H'$

ثالثاً: من أجل $k = m$ تكون لدينا إحدى الحالتين:

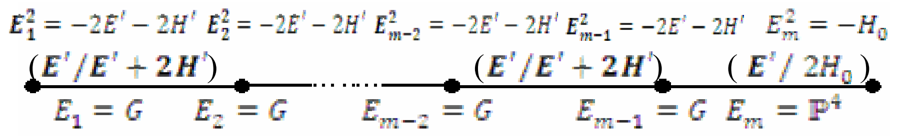
$n \equiv 0 \bmod 2$ المحل الاستثنائي هو $E_m \approx \mathbb{P}^4$ و $E_m^2 = -H_0$

$n \equiv 1 \bmod 2$ المحل الاستثنائي هو $E_m \approx Q$ إذْ $Q \subseteq \mathbb{P}^5$ $ClQ \approx \mathbb{Z}$

ومولدة بـ $Q.H = H_Q$ إذْ H فوق مستوٍ في $\mathbb{P}^5$ و $E_m^2 = -H_Q$

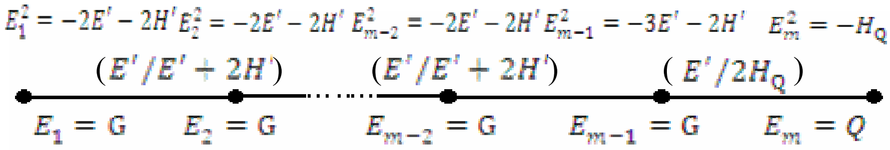
6- وهكذا يكون الحل القانوني نتيجة (2) :

$$n \equiv 0 \bmod 2$$



إذْ $G = P(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$ و H_0 فوق مستوٍ في $\mathbb{P}^4$.

$$n \equiv 1 \bmod 2$$



إذْ $G = P(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$ و $ClQ \approx \mathbb{Z}$ و $H_Q = Q.H$ مولد لـ ClQ

حيث H فوق مستوٍ في $\mathbb{P}^5$.

وهكذا نكون قد توصلنا إلى النتيجتين الآتيتين:

نتيجة (1): حل للشذوذات من النمط A_n ومن البعد الخامس .

نتيجة (2): الحل القانوني للشذوذات من النمط A_n ومن البعد الخامس .

REFERENCES المراجع

[1] Alwadi. Y. (2002). "Simple and Semiquasihomogeneous Singularities" Damascus University of BASIC SCIENCES Vol. 18, No 1.

[2] Greuel, G. M., Kroning, H. (1990). "Simple singularities in positive characteristic" Math. Z. 203, 339-354.

[3] Hartshorne. R. (1977). "Algebraic Geometry" Springer Verlag.

[4] Roczen. M. (1981). "Canonical resolution of 3-dimensional Arnold-singularities over a field of characteristic ≠2" HUMBOLDT_UNIVERSITAT ZU BERLIN SEKTION MATHEMATIK Berlin.