دراسة معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$

براءة ميّا و حسن سنكري
قسم الرياضيات ــ كلية العلوم ــ جامعة تشرين ــ سورية

تاريخ الإيداع 2011/09/21
قبل للنشر في 2012/02/06

الملخّص

في هذا البحث درسنا معادلتي بل $X^2 - DY^2 = \pm 2$، وقد بيّنا متى تكون هاتان المعادلتان قابلتين للحل معاً، كما أوجدنا الشرط اللازم والكافي لقابلية حل كل منهما باستخدام الكسور المستمرة ومفهوم النظيم المركزي.

الكلمات المفتاحية: معادلة بل، الكسور المستمرة، النظيم المركزي.
التصنيف الرياضي العالمي 2010:**.2010 M.S.C: 11E15, 11E18, 11E25**

Studying of Pell equations x^2 - Dy^2 = ±2

B. Mayya and H. Sankary

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Syria

Received 21/09/2011

Accepted 06/02/2012

ABSTRACT

In this work, we studied Pell equations X^2 - DY^2 = ±2. We showed when both of these equations are solvable, and we found the necessary and sufficient condition for the solubility of each one by the continued fractions and the concept of the central norm.

Key words: Pell equation, Continued fractions, Central norm.

Mathematical subjects classification (MSC 2010): 11E15, 11E18, 11E25.

المقدمة

تعريف: معادلة بل Pell equation هي المعادلة:

$$x^2 - Dy^2 = N$$

حيث D,N عددان صحيحان، وحيث $D > 0$، ونوجد الحلول الصحيحة (x,y) لهذه المعادلة.

يُسمى الحل (x,y) لمعادلة بل حلاً موجباً positive solution إذا كان x , y موجبين، ويُسمى حلاً أولياً primitive solution إذا كان $\text{g.c.d}(x,y) = 1$.

في الحقيقة، إذا كان D ليس مربعاً كاملاً، عندئذ معادلة بل إمَّا أن تكون غير قابلة للحل أو تملك عدداً لانهائياً من الحلول.

درس بعض الرياضيين معادلة بل من أجل قيم محددة لـ D وقيم محددة لـN، وأهم حالاتها هما المعادلتان $x^2 - Dy^2 = \pm 1$.

في هذا البحث ندرس المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$، وقد سبقنا إلى دراسة هاتين المعادلتين عدد من الرياضيين، على سبيل المثال :

في [2] استفاد Mollin من بعض نتائج Lagrange ليتوصل إلى نتائج تتعلق بالمعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$.

في [8] أعطى Teckan صيغة تعاودية لإيجاد حلول المعادلة $x^2 - Dy^2 = 2$.

في [9] درس المؤلفون المعادلة $x^2 - Dy^2 = 2^t$ حيث $0 \leq t$.

أهمية البحث و أهدافه

هدف البحث إلى دراسة المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ عندما $D > 0$ وليس مربعاً كاملاً، وتكمن أهميته في أنه يقدم شرطاً لازماً وكافياً لقابلية حل كل من هاتين المعادلتين في مجموعة الأعداد الصحيحة Z.

مواد البحث وطرائقه

في هذا البحث نستفيد من الكسور المستمرة ومفهوم النظيم المركزي والنتائج المتعلقة بالمعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ ومعيار لاغرانج والتطابقات التربيعية، حيث نجزئ دراسة المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ إلى حالتين $D = 2$ و $D \neq 2$، وفيما يأتي نعرض العلاقات والمبرهنات والأفكار التي اعتمدنا عليها في هذه الدراسة.

مفاهيم أساسية [3,4]:

في هذه المقالة نحتاج إلى الكسر المستمر البسيط الممثل لـ $\sqrt{D}$ الذي يرمز له بالرمز :

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{\ell-2}, a_{\ell-1}, a_\ell}]$$

حيث $\ell = \ell(\sqrt{D})$ هو طول الدور، $a_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$ (الجزء الصحيح لـ $\sqrt{D}$)، $a_\ell = 2a_0$، والأعداد $a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}$ متناظرة، أي إنَّ $a_i = a_{\ell-i}$ من أجل كل $1 \le i \le \ell-1$، ومن ثمَّ يأخذ $\sqrt{D}$ الشكل :

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}]$$

فمثلاً: $\sqrt{46} = [6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}]$

ويكون $\lfloor \sqrt{46} \rfloor = 6$, $\ell(\sqrt{46}) = 12$.

المقارب من المرتبة K (The k th convergent) من أجل كل $0 \le k$ يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{A_k}{B_k} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$$

حيث:

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2}$$
$$B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

وحيث: $A_{-2} = 0$ ، $A_{-1} = 1$، $B_{-2} = 1$، $B_{-1} = 0$.

المقامات التامة (The complete quotients) هي $\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k}$ ، حيث $P_0 = 0$، $Q_0 = 1$ ، ومن أجل كل $1 \le k$ يكون:

$P_k = a_{k-1}Q_{k-1} - P_{k-1}$

$Q_k = \frac{D - P_k^2}{Q_{k-1}}$

(1) $a_k = \lfloor \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} \rfloor$

سنحتاج أيضاً إلى الحقائق الآتية:

(2) $1 \leq a_k$

وذلك من أجل كل $0 \leq k$، وكذلك:

(3) $A_{k-1}^2 - DB_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k$

وبشكل خاص، من أجل كل $0 \leq k$ يكون:

$$A_{k\ell-1}^2 - DB_{k\ell-1}^2 = (-1)^{k\ell}$$

(4) $Q_k = 1 \Leftrightarrow k = m\ell$ حيث $m \geq 0 \ni Z$ عدد صحيح

أيضاً، من أجل كل $1 \leq k$ لدينا:

$$Q_{k+\ell} = Q_k ,\ P_{k+\ell} = P_k ,\ a_{k+\ell} = a_k$$

وكذلك من أجل كل $1 \leq k$ يكون:

(5) $1 \leq P_k \leq a_0$

(6) $1 \leq Q_k$

و إذا كان ℓ عدداً زوجياً عندئذ:

$P_{\frac{\ell}{2}} = P_{\frac{\ell}{2}+1} = P_{(2k-1)\frac{\ell}{2}+1} = P_{(2k-1)\frac{\ell}{2}}$

$Q_{\frac{\ell}{2}} = Q_{(2k-1)\frac{\ell}{2}}$

(7) $2P_{(2k-1)\frac{\ell}{2}} = a_{(2k-1)\frac{\ell}{2}}\, Q_{(2k-1)\frac{\ell}{2}}$

تسمى القيمة $Q_{\frac{\ell}{2}}$ النظيم المركزي central norm للكسر المستمر الممثل لـــ $\sqrt{D}$.

مبرهنة 1 [4] : بفرض أن $\ell = \ell(\sqrt{D})$ و $1 \leq k$ عدد صحيح . عندئذ إذا كان ℓ عدداً زوجياً فإن الحلول كلّها الموجبة للمعادلة:

(8) $x^2 - Dy^2 = 1$

تعطى بالعلاقة:

$(x,y) = (A_{k\ell-1}, B_{k\ell-1})$

وتكون المعادلة :

(9) $x^2 - Dy^2 = -1$

غير قابلة للحل .

أمّا إذا كان ℓ عدداً فردياً فإن الحلول كلّها الموجبة للمعادلة(8) تعطى بالعلاقة:

$(x,y) = (A_{2k\ell-1}, B_{2k\ell-1})$

والحلول كلّها الموجبة للمعادلة (9) تعطى بالشكل:

$$(x,y) = (A_{(2k-1)\ell-1}, B_{(2k-1)\ell-1})$$

مبرهنة 2 [1]: بفرض أن $\ell = \ell(\sqrt{D})$ و $1 \le k$. عندئذ إذا كان ℓ عدداً زوجياً فإن الحلول كلّها الموجبة (x_k, y_k) للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$ تحقق العلاقة:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (A_{\ell-1} + B_{\ell-1}\sqrt{D})^k$$

أمّا إذا كان ℓ عدداً فردياً فإن الحلول كلّها الموجبة (x_k, y_k) للمعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ تحقق العلاقة:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (A_{\ell-1} + B_{\ell-1}\sqrt{D})^{2k-1}$$

والحلول كلّها الموجبة (x_k, y_k) للمعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$ تحقق العلاقة:

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (A_{\ell-1} + B_{\ell-1}\sqrt{D})^{2k}$$

مبرهنة 3 [5,6]: إذا كان p عدداً أولياً و $n > 0$ عدداً صحيحاً، عندئذ تكون المعادلتان $x^2 - Dy^2 = p^n$, $x^2 - Dy^2 = -p^n$ قابلتين للحل معاً إذا وفقط إذا كان $\ell(\sqrt{D})$ عدداً فردياً.

معيار لاغرانج [7]: ليكن D عدداً صحيحاً موجباً وليس مربعاً كاملاً، ولــيكن ℓ هــو طول دور الكسر المستمر الممثل لــ $\sqrt{D}$، عندئذ يكون ℓ عدداً زوجياً إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

(1) يوجد تحليل $D = ab$ حيث $1 < a < b$ تكون من أجله المعادلة:

$$ax^2 - by^2 = \pm 1$$

قابلة للحل. في هذه الحالة، إذا كان $(x,y) = (r,s)$ هو أصغر حل موجــب لهــذه المعادلة يكون:

(A) $Q_{\frac{\ell}{2}} = a$.

(B) $A_{\frac{\ell}{2}-1} = ra$ ، $B_{\frac{\ell}{2}-1} = s$.

(c) $A_{\ell-1} = r^2a + s^2b$ ، $B_{\ell-1} = 2rs$.

(D) $r^2a - s^2b = (-1)^{\ell/2}$

(2) يوجد تحليل $D = ab$ حيث $1 \leq a < b$ تكون من أجله المعادلة:

$$ax^2 - by^2 = \pm 2$$

تملك حلاً (x,y) حيث x , y فرديان. في هذه الحالة، إذا كان $(x,y) = (r,s)$ هو أصغر حل موجب لهذه المعادلة عندئذ:

(A) $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2a$.

(B) $A_{\frac{\ell}{2}-1} = ra$ ، $B_{\frac{\ell}{2}-1} = s$.

(c) $2A_{\ell-1} = r^2a + s^2b$ ، $B_{\ell-1} = rs$.

(D) $r^2a - s^2b = 2(-1)^{\ell/2}$

النتائج والمناقشة

فيما يلي نستفيد من الأفكار التي ذكرناها في دراسة المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$، إذ سنبين أن هاتين المعادلتين قابلتان للحل معاً عندما $D = 2$، وفيما عدا ذلك غيــر قــابلتين للحل معاً، كما نوجد الشرط اللازم والكافي لقابلية حل كل منهما عندما $D \neq 2$.

توطئة 1: **إذا كانت أي من معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ:**

(1) **إذا كان D عدداً زوجياً فإن $D = 2D'$ حيث D' عدد فردي.**

(2) **إذا كان D عدداً فردياً فإن x , y عددان فرديان.**

البرهان : (1) لنفرض أن $4|D$، عندئذ $D \equiv 0 (\text{mod } 4)$. في هذه الحالة، إذا كانت أي من المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل فإن x عدد زوجي، لذلك $x^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 4)$ ويكون لدينا الآتي:

$$\pm 2 = x^2 - Dy^2 \equiv 0 - 0.y^2 \equiv 0 (\text{mod } 4)$$

وهذا غير ممكن، ومن ثمَّ الفرض أن $4|D$ خاطئ .

(2) لنفرض أن D عدد فردي. في هذه الحالة، إذا كانت أي من معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ نظراً إلى أنَّ الطرف الأيمن عدد زوجي وD عدد فردي، فإن x , y إمّا فرديان معاً أو زوجيان معاً .

إذا كان x, y عددان زوجيان فإنّ $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 (\text{mod } 4)$ ، ومن ثمَّ:

$$\pm 2 = x^2 - Dy^2 \equiv 0 - D.0 \equiv 0 (\text{mod } 4)$$

وهذا غير ممكن، ومن ثمَّ x , y فرديان .

دراسة معادلتي بل $x^2 - 2y^2 = \pm 2$

مبرهنة 4: (1) معادلة بل $x^2 - 2y^2 = 2$ قابلة للحل، وتُعطى حلولها الموجبة جميعها (x_k, y_k) من أجل كل $1 \le k$ بالعلاقة:

$$x_k + y_k\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k-1} \qquad (10)$$

(2) معادلة بل $x^2 - 2y^2 = -2$ قابلة للحل، وتُعطى حلولها الموجبة جميعها (x_k, y_k) من أجل كل $1 \le k$ **بالعلاقة**:

$$x_k + y_k\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k} \qquad (11)$$

البرهان: يكفي أن نبرهن القسم الأول من هذه المبرهنة، لأن القسم الثاني يُبرهن بالطريقة نفسها.

نبرهن أولاً أنه من أجل كل $1 \le k$ يكون (x_k, y_k) المعرف بالعلاقة (10) حلاً للمعادلة $x^2 - 2y^2 = 2$.

في الحقيقة إذا كان $x_k + y_k\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k-1}$ فإن:

$$x_k - y_k\sqrt{2} = -\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{2k-1}$$

من ثمَّ:

$$x_k^2 - 2y_k^2 = [\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k-1}][-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^{2k-1}]$$
$$= -2\left[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right]^{2k-1}$$
$$= -2\,(-1)^{2k-1} = (-2)(-1) = 2$$

نبرهن الآن أن الحلول (x_k, y_k) هي حلول معادلة بل جميعها $x^2 - 2y^2 = 2$.

نفرض جدلاً أنه يوجد حل موجب (u, v) لا يُكتب بالشكل (10)، عندئذ يوجد $1 \le k$ بحيث يكون:

$$x_k + y_k\sqrt{2} < u + v\sqrt{2} < x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k-1} < u + v\sqrt{2} < \sqrt{2}(1+\sqrt{2})^{2k+1}$$

من ثمَّ: $(1+\sqrt{2})^{2k-1} < v + \frac{u}{2}\sqrt{2} < (1+\sqrt{2})^{2k+1}$ (12)

نظراً إلى أنَّ $u^2 - 2v^2 = 2$ فإنه من الواضح أن u عدد زوجي ، ومن ثمَّ $\frac{u}{2}$ عـــدد صحيح.

من جهة أخرى، إن $(v, \frac{u}{2})$ حل للمعادلة $x^2 - 2y^2 = -1$ لأن :

$$v^2 - 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 = v^2 - \frac{u^2}{2} = \frac{2v^2 - u^2}{2} = \frac{-(u^2 - 2v^2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ولكن $(A_{\ell-1}, B_{\ell-1}) = (1,1)$ في الكسر المستمر الممثل لـــ $\sqrt{2}$ الذي طول دوره عدد فردي ($\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$)، ومن ثمَّ بحسب المبرهنة 2 يوجد عـــدد فـــردي $2m - 1$ بحيث يكون:

$$v + \frac{u}{2}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2m-1} \qquad (13)$$

بتعويض (13) في (12) نجد:

$$(1+\sqrt{2})^{2k-1} < (1+\sqrt{2})^{2m-1} < (1+\sqrt{2})^{2k+1}$$

وهذه العلاقة محققة فقط عندما $2k - 1 < 2m - 1 < 2k + 1$ ، ومن ثمَّ:

$$k < m < k + 1$$

وهذا غير ممكن لأن $k + 1$, k عددان صحيحان متتاليان، ومن ثمَّ الفرض الجدلي خاطئ، وبذلك يتم المطلوب.

دراسة معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ عندما $D \neq \pm 2$

توطئة 2: إذا كانت أي من معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، فإن $\ell = \ell(\sqrt{D})$ عدد زوجي و $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$.

البرهان: نميز حالتين: إمّا D عدد زوجي أو D عدد فردي.

(1)إذا كان D عدداً زوجياً، عندئذ بحسب التوطئة 1 يكون $D = 2D'$ حيث D' عدد فردي. نفرض أن x, y عددان صحيحان يحققان $x^2 - Dy^2 = \pm 2$، عندئذ من الواضح أن x عدد زوجي، ولنفرض أن $x = 2z$ حيث $z \ni Z$ عدد صحيح، ومن ثمَّ $(2z)^2 - 2D'y^2 = \pm 2$ وبتقسيم طرفي المعادلة الأخيرة على 2 نجد:

$$2z^2 - D'y^2 = \pm 1$$

نظراً إلى أنَّ $D = 2D' \neq 2$ حيث D' عدد فردي فإن $1 < 2 < D'$، ومن ثمَّ بحسب القسم الأول من معيار لاغرانج (نضع $a = 2, b = D'$) نجد أن $\ell = \ell(\sqrt{D})$ عدد زوجي و $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$.

(2) نفرض أن D عدد فردي، وليكن x, y عددين صحيحين يحققان $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ عندئذ بحسب التوطئة 1 نجد أن x, y عددان فرديان، ومن ثمَّ بحسب القسم الثاني من معيار لاغرانج (نضع $a = 1, b = D$) نجد أن $\ell = \ell(\sqrt{D})$ عدد زوجي و $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$.

نتيجة 1: إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل $\hat{U}$ $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$.

البرهان : بحسب التوطئة 2 نجد أنه إذا كانت إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل فإن $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$.

بالعكس، إذا كان $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$، عندئذ بتعويض $k = \frac{\ell}{2}$ في العلاقة (3) نجد أن:

$$A^2_{\frac{\ell}{2}-1} - DB^2_{\frac{\ell}{2}-1} = (-1)^{\frac{\ell}{2}} Q_{\frac{\ell}{2}} = \pm 2$$

ومن ثمَّ $(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1})$ حل لإحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$.

نتيجة 2: إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل Û $P_{\frac{\ell}{2}} = a_{\frac{\ell}{2}}$.

البرهان: نعوض $k = 1$ في العلاقة (7) فنجد أن:

$$2P_{\frac{\ell}{2}} = a_{\frac{\ell}{2}} Q_{\frac{\ell}{2}} \tag{14}$$

أصبح لدينا الآتي:

إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل $\Leftrightarrow$ بحسب النتيجة 1 : $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$ $\Leftrightarrow$

من (14) : $P_{\frac{\ell}{2}} = a_{\frac{\ell}{2}}$.

نتيجة 3: إذا كانت إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل فإن المعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ غير قابلة للحل.

البرهان: إذا كانت إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ بحسب التوطئة 2 يكون $\ell(\sqrt{D})$ عدداً زوجياً، ومن ثمَّ بحسب المبرهنة 1 تكون المعادلة $x^2 - Dy^2 = -1$ غير قابلة للحل.

نتيجة 4 : المعادلتان $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ غير قابلتين للحل في آن واحد.

البرهان: إذا كانت إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ يكون $\ell(\sqrt{D})$ عدداً زوجياً، ومن ثمّ بحسب المبرهنة 3 نجد أن المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ غير قابلتين للحل في آن واحد.

نتيجة 5: (1) **إذا كان** $D = 2$ **، عندئذ تكون المعادلات:**

$$x^2 - Dy^2 = -1 \text{ ،} x^2 - Dy^2 = 2 \text{ ،} x^2 - Dy^2 = -2$$

قابلة للحل في آن واحد.

(2) **إذا كان** $D \neq 2$**، عندئذ إذا كانت إحدى المعادلات :**

$$x^2 - Dy^2 = -1 \text{ ،} x^2 - Dy^2 = 2 \text{ ،} x^2 - Dy^2 = -2$$

قابلة للحل، فإن المعادلتين الباقيتين غير قابلتين للحل.

البرهان : يتضح برهان (1) من المبرهنة 4 ومن حقيقة أن المعادلة $x^2 - 2y^2 = -1$ قابلة للحل وأصغر حل موجب لها هو (1,1)، وينتج برهان (2) من النتيجتين (3) و(4) .

توطئة 3: **إذا كانت إحدى معادلتي بل** $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ **قابلة للحل فإن:**

$$a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 \text{ أو } a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$$

البرهان : من العلاقة (1) : $a_k = \lfloor \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} \rfloor$

وبحسب النتيجة (1) : $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$

ومن أجل كل $1 \leq k$ بحسب العلاقة (5) : $1 \leq P_k \leq a_0$

وبحسب النتيجة (2) : $P_{\frac{\ell}{2}} = a_{\frac{\ell}{2}}$

ومن ثمَّ $1 \leq a_{\frac{\ell}{2}} \leq a_0$ ، لذلك يمكن أن نكتب :

$$a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - i \qquad (15)$$

حيث $i = 0 , 1 , \dots , a_0 - 1$ ، ومن هذه العلاقات نجد أن:

$$a_0 - i = a_{\frac{\ell}{2}} = \left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{D}}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{D}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_0 - i + \sqrt{D}}{2} \right\rfloor$$

أي إنَّ: $$a_0 - i = \left\lfloor \frac{a_0 - i + \sqrt{D}}{2} \right\rfloor \qquad (16)$$

نميّز حالتين : i عدد زوجي و iعدد فردي .

i عدد زوجي : في هذه الحالة $i = 2j$ حيث $j \geq 0$ عدد صحيح، ونظراً إلى أنَّ $\lfloor\sqrt{D}\rfloor = a_0$ عندئذ بالتعويض في (16) نجد :

$$a_0 - 2j = \left\lfloor \frac{a_0 - 2j + \sqrt{D}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_0 - 2j + a_0}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a_0 - 2j}{2} \right\rfloor = a_0 - j$$

ومن ثمَّ $a_0 - 2j = a_0 - j \Leftarrow j = 0 \Leftarrow i = 0$، وبالتعويض في (15) نجد:

$$\boldsymbol{a_{\frac{\ell}{2}} = a_0}$$

i عدد فردي : في هذه الحالة $i = 2j + 1$ حيث $j \geq 0$ ، ونظراً إلى أنَّ $\lfloor\sqrt{D}\rfloor = a_0$ عندئذ بالتعويض في (16) نجد :

$$a_0 - 2j - 1 = \left\lfloor \frac{a_0 - 2j - 1 + \sqrt{D}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_0 - 2j - 1 + a_0}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a_0 - 2j - 1}{2} \right\rfloor = a_0 - j - 1$$

ومن ثمَّ $a_0 - 2j - 1 = a_0 - j - 1 \Leftarrow j = 0 \Leftarrow i = 1$ ، وبالتعويض في (15) نجد:

$$\boldsymbol{a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1}$$

السؤال الآن: هل عكس التوطئة 3 صحيح، أي إذا كان $\boldsymbol{a_{\frac{\ell}{2}} = a_0}$ أو $\boldsymbol{a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1}$ فهل إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل ؟

في الحقيقة إن العكس صحيح ما عدا حالات محدودة، وفيما يأتي نوضح ذلك.

توطئة 4: **إذا كان $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0$ فإنّ إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل.**

البرهان : من العلاقتين(4) , (6) نستنتج أن $Q_{\frac{\ell}{2}} \geq 2$.

نظراً إلى أنّ $a_{\frac{\ell}{2}} = \left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{D}}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor$ و $\lfloor \sqrt{D} \rfloor = a_0$ و $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0$ فإن:

$$\left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + a_0}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor = a_0 \qquad (17)$$

واعتماداً على العلاقة (5) نجد أن:

$$1 \leq P_{\frac{\ell}{2}} \leq a_0$$

إذا فرضنا أن $Q_{\frac{\ell}{2}} \geq 3$، عندئذ من العلاقة (17) نجد أن :

$$a_0 = \left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + a_0}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + a_0}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a_0 + a_0}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a_0}{3} \right\rfloor < a_0$$

وهذا غير ممكن، ومن ثمَّ $2 \leq Q_{\frac{\ell}{2}} < 3$، لذلك $Q_{\frac{\ell}{2}} = 2$، وبحسب النتيجة (1) نجد أن إحدى المعادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل .

توطئة 5: **إذا كان $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$، وكانت معادلتا بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ كلاهما غير قابلة للحل، فإنّ $D = 8$ أو $D = 12$.**

البرهان : لنفرض أنّ معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ كلاهما غير قابلة للحل، عندئـــذ بحسب النتيجة 1 يكون $Q_{\frac{\ell}{2}} \neq 2$، كما أنّ $Q_{\frac{\ell}{2}} \neq 1$ بحسب العلاقة (4)، ومن ثمّ $3 \leq Q_{\frac{\ell}{2}}$.

نظراً إلى أنَّ $1 \leq P_{\frac{\ell}{2}} \leq a_0$ فإن:

$$P_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - i$$

حيث $i = 0 , 1 , \ldots , a_0 - 1$.

ونظراً إلى أنَّ $a_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$ و $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$ فإنَّ:

$$a_0 - 1 = a_{\frac{\ell}{2}} = \left\lfloor \frac{P_{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{D}}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_0 - i + a_0}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a_0 - i}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor$$

وبذلك وجدنا أن:

$$a_0 - 1 = \left\lfloor \frac{2a_0 - i}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor \qquad (18)$$

حيث $i = 0, 1, \ldots, a_0 - 1$ ، ولنناقش قيم i التي تجعل هذه العلاقة محققة.

إذا كان $i = 1$ عندئذ يكون $P_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1 = a_{\frac{\ell}{2}}$ ، ومن ثمَّ بحسب النتيجة 2 تكـــون إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، وهذا يناقض الفرض.

إذا كان $2 \leq i \leq a_0 - 1$ عندئذ $2a_0 - i \leq 2a_0 - 2$ ، ولأن $3 \leq Q_{\frac{\ell}{2}}$ ، أصبح لدينا الآتي:

$$a_0 - 1 = \left\lfloor \frac{2a_0 - i}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2a_0 - 2}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2a_0 - 2}{3} \right\rfloor =$$

$$= \lfloor \frac{2(a_0 - 1)}{3} \rfloor < a_0 - 1$$

وهذا غير ممكن.

إذا كان $i = 0$، عندئذ بالتعويض في العلاقة (18) نجد أن:

$$a_0 - 1 = \lfloor \frac{2a_0}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \rfloor \qquad (19)$$

بتقسيم $2a_0$ على $Q_{\frac{\ell}{2}}$ نجد :

$$2a_0 = bQ_{\frac{\ell}{2}} + c \qquad (20)$$

حيث $0 \leq c < Q_{\frac{\ell}{2}}$ و $0 \leq b$ عدد صحيح، ومن ثمَّ $0 \leq \frac{c}{Q_{\frac{\ell}{2}}} < 1$، وبتعويض العلاقة

(20) في العلاقة (19) نجد أن:

$$a_0 - 1 = \lfloor \frac{2a_0}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \rfloor = \lfloor \frac{bQ_{\frac{\ell}{2}} + c}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \rfloor = \lfloor b + \frac{c}{Q_{\frac{\ell}{2}}} \rfloor = b$$

ومن ثمَّ $b = a_0 - 1$ ، و بتعويض $b = a_0 - 1$ في العلاقة (20) نجد :

$$2a_0 = (a_0 - 1)\, Q_{\frac{\ell}{2}} + c$$

ومن ثمَّ:

$$a_0(Q_{\frac{\ell}{2}} - 2) = Q_{\frac{\ell}{2}} - c \qquad (21)$$

أي إنَّ $Q_{\frac{\ell}{2}} - 2 \mid Q_{\frac{\ell}{2}} - c$ حيث $0 \leq c < Q_{\frac{\ell}{2}}$ ، ولنناقش بحسب قيم c .

إذا كان $2 < c < Q_{\frac{\ell}{2}}$ ، عندئذ $Q_{\frac{\ell}{2}} - c < Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$ ، و لكن $Q_{\frac{\ell}{2}} - 2 \mid Q_{\frac{\ell}{2}} - c$ ، وهذا غير ممكن ، ومن ثمَّ $c \leq 2$.

إذا كان $c = 2$، عندئذ بالتعويض في (21) نجد $a_0 = 1$، ولكن $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$، ومن ثمَّ $a_{\frac{\ell}{2}} = 0$، وهذا يناقض العلاقة (2) .

إذا كان $c = 1$، عندئذ $Q_{\frac{\ell}{2}} - 1 \mid Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$، وهذا يعني أنّ عددين متتاليين أحدهما يقسم الآخر فماذا يمكن أن يكون هذان العددان؟

العددان هما 1 و2، أي إنَّ: $Q_{\frac{\ell}{2}} - 1 = 2$ و$Q_{\frac{\ell}{2}} - 2 = 1$، ومن ثمَّ $Q_{\frac{\ell}{2}} = 3$

وبالتعويض في (21) نجد أن $a_0 = 2$. أصبح لدينا:

$$a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1 = 1 \text{ ، } a_0 = 2 \text{ ، } Q_{\frac{\ell}{2}} = 3 \qquad (22)$$

ونظراً إلى أنّه يوجد عدد محدود من الأعداد الصحيحة الموجبة D حيث $a_0 = \lfloor\sqrt{D}\rfloor = 2$ فإننا بالبحث عمليّاً عن عدد D يحقق الكسر المستمر الممثل له الشروط الثلاثة الموجودة في (22) معاً، لن نجد هذا العدد، ومن ثمَّ $c \neq 1$.

إذا كان $c = 0$، عندئذ $Q_{\frac{\ell}{2}} \mid Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$ ، ولكنّ العددين $Q_{\frac{\ell}{2}} , Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$ إمّا فرديان معاً أو زوجيان معاً ، ويصبح السؤال: عددان فرديان متتاليان أو زوجيان متتاليان وأحدهما يقسم الآخر فماذا يمكن أن يكون هذان العددان ؟

إذا كان $Q_{\frac{\ell}{2}} , Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$ عددان فرديان متتاليان، عندئذ $Q_{\frac{\ell}{2}} = 3, Q_{\frac{\ell}{2}} - 2 = 1$ ، وبالتعويض في (21) نجد $a_0 = 3$، ومن ثمَّ $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1 = 2$.

بالبحث عمليّاً عن عدد D يحقق الكسر المستمر الممثل له الشروط الثلاثة :

$a_{\frac{\ell}{2}} = 2$ ، $a_0 = 3$ ، $Q_{\frac{\ell}{2}} = 3$

في آن واحد ، نجد $D = 12$.

إذا كان $Q_{\frac{\ell}{2}}$, $Q_{\frac{\ell}{2}} - 2$ عددان زوجيان متتاليــان، عندئــذٍ $Q_{\frac{\ell}{2}} = 4$, $Q_{\frac{\ell}{2}} - 2 = 2$ ، وبالتعويض في (21) نجد $a_0 = 2$ ، ومن ثمَّ $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1 = 1$ ، وبالبحث عمليّــاً عــن عدد D يحقق الكسر المستمر الممثل له الشروط الثلاثة:

$Q_{\frac{\ell}{2}} = 4$ ، $a_0 = 2$ ، $a_{\frac{\ell}{2}} = 1$

في آن واحد، نجد $D = 8$.

توطئة 6: إذا كانت إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ يكــون لدينا الآتي:

(1) تكون معادلة بل $x^2 - Dy^2 = 2$ قابلة للحل إذا كان $\ell \equiv 0 \pmod 4$.

(2) تكون معادلة بل $x^2 - Dy^2 = -2$ قابلة للحل إذا كان $\ell \equiv 2 \pmod 4$.

البرهان : إذا كانت إحدى معادلتي بل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ قابلة للحل، عندئذ بحــسب العلاقة 3 و التوطئة 2 نجد أن :

$$A^2_{\frac{\ell}{2}-1} - DB^2_{\frac{\ell}{2}-1} = (-1)^{\frac{\ell}{2}} Q_{\frac{\ell}{2}} = (-1)^{\frac{\ell}{2}} 2$$

ومن ثمَّ إذا كانت المعادلة $x^2 - Dy^2 = 2$ قابلة للحل يكــون $(-1)^{\frac{\ell}{2}} = 1$، أي إنَّ $\frac{\ell}{2}$ عدد زوجي، ومن ثمَّ ℓ يقبل القسمة على 4، لذلك $\ell \equiv 0 \pmod 4$.

أما إذا كانت المعادلة $x^2 - Dy^2 = -2$ قابلة للحل يكون $(-1)^{\frac{\ell}{2}} = -1$، أي إنّ $\frac{\ell}{2}$ عدد فردي، ومن ثمَّ ℓ يقبل القسمة على 2 ولكنه لا يقبل القسمة على 4، لذلك $\ell \equiv 2 \pmod 4$.

ملاحظة: إن أصــغر حــل موجــب لأي مــن المعــادلتين $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ هــو $(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1})$ وذلك استناداً إلى العلاقة:

$$A^2_{\frac{\ell}{2}-1} - DB^2_{\frac{\ell}{2}-1} = (-1)^{\frac{\ell}{2}} Q_{\frac{\ell}{2}} = (-1)^{\frac{\ell}{2}} 2$$

ممّا سبق نكون قد برهنا ما يأتي:

مبرهنة 5 : إذا كان $D \neq 2 , 8 , 12$ ، **عندئذ يكون لدينا الآتي:**

• **تكون معادلة بل** $x^2 - Dy^2 = 2$ **قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق :**

(1) $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0$ **أو** $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$.

(2) $\ell \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$.

• **تكون معادلة بل** $x^2 - Dy^2 = -2$ **قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق:**

(1) $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0$ **أو** $a_{\frac{\ell}{2}} = a_0 - 1$.

(2) $\ell \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$.

البرهان : ينتج من التوطئات 3 , 4 , 5 , 6.

<u>**أمثلة :**</u>

(1) لنحل معادلة بل $x^2 - 46y^2 = 2$:

$$\sqrt{46} = [6 , \overline{1 ,3 ,1 ,1 ,2 ,6 ,2 ,1 ,1 ,3 ,1 ,12}]$$

$\ell = 12 \equiv 0(\mathrm{mod}4)$ ، $a_{\frac{\ell}{2}} = a_6 = a_0 = 6$.

ومن ثمَّ بحسب المبرهنة 5 تكون المعادلة $x^2 - 46y^2 = 2$ قابلة للحل، وأصغر حل موجب لها هو:

$$(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1}) = (A_5, B_5) = (156,23)$$

(2) نحل المعادلة $x^2 - 71y^2 = 2$:

$$\sqrt{71} = [8 , \overline{2 ,2 ,1 ,7 ,1 ,2 ,2 ,16}]$$

$a_{\frac{\ell}{2}} = a_4 = a_0 - 1 = 7$ ، $\ell = 8 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$

ومن ثمَّ تكون المعادلة $x^2 - 71y^2 = 2$ قابلة للحل، وأصغر حل موجب لها هو:

$(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1}) = (A_3, B_3) = (59,7)$

(3) نحل المعادلة $x^2 - 59y^2 = -2$:

$\sqrt{59} = [7, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}]$

$a_{\frac{\ell}{2}} = a_3 = a_0 = 7$ ، $\ell = 6 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$

ومن ثمَّ تكون المعادلة $x^2 - 59y^2 = -2$ قابلة للحل، وأصغر حل موجب لها هو:

$(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1}) = (A_2, B_2) = (23, 3)$

(4) نحل المعادلة $x^2 - 67y^2 = -2$:

$\sqrt{67} = [8, \overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16}]$

$a_{\frac{\ell}{2}} = a_5 = a_0 - 1 = 7$ ، $\ell = 10 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$

ومن ثمَّ تكون المعادلة $x^2 - 67y^2 = -2$ قابلة للحل، وأصغر حل موجب لها هو:

$(A_{\frac{\ell}{2}-1}, B_{\frac{\ell}{2}-1}) = (A_4, B_4) = (221, 27)$

الاستنتاجات والتوصيات

إن معادلتي بــل $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ مــن أهــم الحــالات الخاصــة مــن المعادلــة $x^2 - Dy^2 = N$، لأننا إذا درسنا هاتين المعادلتين من جوانب أخرى، فإنه بحل إحديهما يمكن ببساطة حل المعادلة $x^2 - Dy^2 = 1$، فضلاً عن خصائص أخرى ليست موضوع اهتمامنا الحالي في هذا البحث .

REFERENCES

1. **Burton, D. M. 1994. Elementary Number Theory, Second Edition. Kaplana Press, Delhi.**
2. **Mollin, R. A. 2005. Lagrange, central norms, and quadratic Diophantine equation, Internat. J. Math. and Math. Sci, v.7, pp. 1039 - 1047.**
3. **Mollin, R. A. 1996. Quadratics, CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo.**
4. **Mollin, R. A. 2008. Fundamental Number Theory with Applications second Edition, Chaapman & Hall/ CRC, Taylor nd Franic Group, Boca Raton, London , New York.**
5. **Mollin, R. A. 2001. A Simple Criterion for Solvability of Both $x^2 - Dy^2 = c$ and $x^2 - Dy^2 = -c$, New York J . Math, v.7, pp. 87-97.**
6. **Mollin, R. A., 2002. Ideal criteria for both $x^2 - dy^2 = m_1$ and $x^2 - dy^2 = m_2$ to have primitive solutions for any integers m_1, m_2 prime to $d > 0$, serdica math. j, v.28, pp. 175-188.**
7. **Mollin, R. A. 2004. Continued fraction approach to the Diophantine equation $ax^2 - by^2 = \pm 1$, JP Jour. Algebra, Number Theory & Appl, v.4, pp. 159-207.**
8. **Tekcan, A. 2004. Pell Equation $x^2 - Dy^2 = 2$. II. Irish Math. Soc. Bulletin, v.54, pp. 73-89 .**
9. **Tekcan, A. Gezer, B. and Bizim, O., 2007. On the Integer Solutions of the Pell Equation $x^2 - dy^2 = 2^t$, Ieinternational Journal of Computatonal and Mathematical Sciences 1:3 , pp. 204-208.**