السمات التبولوجية للطيوف الأولية لجبور -*BCK* الضمنية

ضحى العمار وإيلي قدسي
قسم الرياضيات ــ كلية العلوم ــ جامعة دمشق ــ سورية

تاريخ الإيداع 2011/11/29
قبل للنشر في 2012/04/02

الملخّص

نسمي جبر-*BCK* تبادلياً محدوداً كل مجموعة مزودة بعنصرين متميزين يرمز لهما بـ $1,0$، وبعملية ثنائية يرمز لها * بحيث تتحقق مجموعة من الخواص [1].

ليكن A جبر-*BCK* ضمنياً «تبادلي محدود ويحقق الخاصة الإضافية $(a*b)*b=a*b$ »، في الورقة العلمية [2] بيّنا أن $X_A=Spec(A)$ مجموعة المثاليات الأولية لـ A «الطيف الأولي لـA» يشكل فضاءً بولياً. في هذه الورقة العلمية سوف نورد سمات إضافية لهذا الفضاء، سنبرهن أن الطيف الأولي $X_A=Spec(A)$ فضاء متراص عداً، منتظم، وأنه يتمتع بقابلية العد الأولى.

كذلك نبين أنه غير مترابط وغير مترابط كلياً، وأن مركباته هي المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصر واحد. وأخيراً نقدم المبرهنة الأساسية الآتية: إذا كان $f:A\longrightarrow B$ تشاكلاً بين جبري-*BCK* ضمنيين، فإن التطبيق $Spec(f):Spec(B)\longrightarrow Spec(A)$ يكون مستمراً. زد على ذلك إذا كان f ايزومورفيزم فإن $Spec(f)$ يكون هوميومورفيزم، بالإضافة إلى ذلك: $(Spec(f))^{-1}=Spec(f^{-1})$.

الكلمات المفتاحية: جبور-*BCK* الضمنية، فضاء متراص عداً، منتظم، لينديليوف، فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية، فضاء مترابط.

Les caractères topologiques du spectre premier d'une *BCK* – algèbre implicative

Doha Al –Ammar et Elie Koudsi
Département de Mathématiques –Faculté de sciences – Université de Damas-Syrie

Received 29/11/2011
Accepted 02/04/2012

Résumé

Une *BCK*-algèbre commutative bornée (Resp :implicative) est définie à partir de deux éléments distingués, notés $0\ et\ 1$, et une opération binaire noté* [1].

L'ensemble $X_A = Spec(A)$ des idéaux premiers d'une BCK-algèbre implicative *A* peut être muni d'une topologie booléenne[2].

Dans cet article, nous allons déduire les résultats principaus suivants: Le spectre premier $X_A = Spec(A)$ est un espace régulier, dénombrablement compact, et de plus, satisfait le premier axiome de dénombrabilité.

Nous montrons ainsi que $Spec(A)$ est espace de Lindelöf, non connexe et non totalement connexe. En outre, nous avons le résultat suivant:

Si $f : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de *BCK*-algèbres implicatives; alors l' application $Spec(f) : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ est continue. De même, si f est un isomorphisme, alors $Spec(f)$ est un homéomorphisme et $(Spec(f))^{-1} = Spec(f^{-1})$.

Mots clés: BCK-algèbre implicative, Espace dénombrablement compact, Espace régulier, De Lindelöf, Espace satisfait le premier axiome de dénombrabilité, Espace connexe.

1- جبور-*BCK* التبادلية المحدودة

1.1. تعريف ([1] أو[3]). إن **جبر-*BCK* التبادلي المحدود** هـو مجموعـة A مـزودة بعنصرين متميزين يرمز لهما بـ 0,1 وبعملية ثنائية يرمز لها * بحيث تتحقـق الخـواص الخمس الآتية:

1. $a * a = 0$
2. $a * 0 = a$
3. $a * 1 = 0$
4. $a * (a * b) = b * (b * a)$
5. $(a * b) * c = (a * c) * b$

وذلك مهما تكن a, b, c عناصر من A.

يقال عن جبر-*BCK* التبادلي المحدود A إنه **ضمني** إذا حقق بالإضافة إلى ذلك الموضوعة الآتية:

$$(a * b) * b = a * b$$

وذلك مهما تكن a, b عناصر من A.

1.2. رموز واصطلاحات.

إذا كان A جبر-*BCK* تبادلياً محدوداً، لنرمز أولاً بـ $e(a) = 1 * a$، ولنعدَّ العمليتـين الثنائيتين: $a \vee b = e(e(a) * b)$ و $a \wedge b = a * (a * b)$ وذلك مهمـا تكـن a, b عناصر من A.

من الواضح أن: $e(0) = 1$, $e(1) = 0$، وأن $a \wedge a = a$، بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$0 * a = (a * a) * a = (a * (a * 0)) * a = (0 * (0 * a)) * a = (0 * a) * (0 * a) = 0$$

وعليه يكون: $(a \wedge b) * a = (b \wedge a) * b = 0$

زد على ذلك، إذا كان A جبر-*BCK* ضمنياً فإن: $a \vee a = a$.

1.3. التشاكلات.

ليكن A, A' جبري-BCK تبادليين ومحدودين، يكون التطبيق $f : A \rightarrow A'$ **تـــشاكلاً** لـ A في A'

إذا كان: $f(a * b) = f(a) * f(b)$ و $f(1) = 1$.

من السهل أن نرى أن: $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ وأن: $f(0) = 0$.

1.4. المثاليات في جبور-BCK التبادلية المحدودة [5] , [4] .

ليكن A جبر-BCK تبادلياً محدوداً، ولتكن J مجموعة جزئية غير خالية من A .

1ً. يقال عن J إنها **مثالي** في A إذا كان $0 \in J$ وإذا تحققت الخاصة:

$$\ll \quad a * b \in J \ \ and \ \ b \in J \ \Rightarrow a \in J \quad \gg$$

2ً. يقال عن مثالي J إنه **أولي** إذا كان $1 \notin J$ وإذا تحققت الخاصة :

$$\ll \quad a \wedge b \in J \Rightarrow a \in J \ or \ b \in J \quad \gg$$

وذلك مهما تكن a, b عناصر من A.

فضلاً عن ذلك، نورد النظريات الآتية تاركين للقارئ العودة إلى [3] من أجـــل تفاصـــيل البرهان.

1.5. نظرية. ليكن A جبر-BCK ضمنياً.

1ً.إن المجموعة $(a) = \{ x \in A : x * a = 0 \}$ تكون مثالياً رئيساً مولـــداً بالعنـــصر $a \in A$.

2ً. $(a \wedge b) = (a) \cap (b)$ وذلك مهما تكن a, b عناصر من A.

1.6. نظرية. إذا كان J مثالياً أولياً في جبر-BCK الضمني A ، فعندئذٍ:

$$a \vee b \in J \quad \Leftrightarrow \quad a \in J \ \ and \ \ b \in J$$

2. السمات التبولوجية للطيف الأولي لجبر-*BCK* الضمني .

ليكن A جبر-*BCK* ضمنياً، ولنفرض أن $X_A = Spec(A)$ مجموعة المثاليات الأولية لــA.

لأجل أي مثالي J في A نضع:

$$D(J) = \{P \in X_A : J \not\subset P\} \quad , \quad V(J) = \{P \in X_A : J \subset P\}$$

في ورقة علمية سابقة[2]، بيَّنا أن $\tau_A = \{D(J) : J \in Id(A)\}$ تشكل تبولوجية على X_A، «تبولوجية زاريسكي»، ومن ثمَّ حصلنا على الفضاء التبولــوجي (X_A, τ_A) "**الطيــف الأولي لجبر-*BCK* الضمني**"، كذلك أثبتنــا أن الفــضاء التبولــوجي $X_A = Spec(A)$ متراص وهاوسدورف.

من جهة أخرى، ليكن $e \in A$ ولنتخذ الرمز $e' = 1 * e$، ولنعدَّ المجموعة: $D(e) = \{P \in X_A : e \notin P\}$ ، لدينا وفقاً لـ [3]:

1). $D(0) = \emptyset \ \ and \ \ D(1) = X_A$

2). $D(e \wedge w) = D(e) \cap D(w)$

3). $D(e \vee w) = D(e) \cup D(w)$

4). $D(e') = X_A - D(e)$

لنعدَّ المجموعة $\mathcal{D}_A = \{D(e) : e \in A\}$ (جماعة المجموعات الجزئية من X_A مــن النمط $D(e)$)، بالتالي حصلنا على النظرية المهمة:

2.1. نظرية. [3]. $\mathcal{D}_A$ قاعدة في الفضاء التبولوجي X_A، عناصرها مجموعات مفتوحــة ومغلقة بآن واحدٍ في X_A .

أضف إلى ذلك إذا كان J مثالياً في A، فإن: $D(J) = \bigcup_{e \in J} D(e)$. [2 أو 3]

في هذه الورقة العلمية يمكننا المضي إلى أبعد من ذلك ، سوف نورد صــفات تبولوجيــة أخرى لهذا الصنف الخاص من الفضاءات التبولوجية.

قبل كل شيء نورد بعض المفاهيم الأساسية في التبولوجيا:

1- نقول عن فــضاء تبولــوجي (X, τ) إنَّــه فــضاء ***Zero-dimensional*** إذا كانــت مجموعاته المفتوحة والمغلقة بآنٍ واحدٍ تشكل قاعدة له، وأنه فضاء متراص عداً إذا كــان لكل مجموعة جزئية غير منتهية فيه نقطة تجمع واحدة على الأقل.

2- نقول عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنَّه فضاء منتظم إذا حقق الشرط الآتي:
أياً كانت المجموعة المغلقة F من X، وأياً كانت النقطة x من X الخارجة عن F، فثمة جوار مفتوح U_x لـ x وجوار مفتوح W_F لـ F بحيث $U_x \cap W_F = \emptyset$.
3- ليكن $(X,\tau),(Y,\tau')$ فضاءين تبولوجيين و f تطبيقاً تقابلاً لـ X في Y، نقول عن f إنَّه تطبيق تبولوجي إذا كان كل من f و f^{-1} مستمراً .

2.2. نظرية. الطيف الأولي $X_A = Spec(A)$ فضاء ***Zero-dimensional*** .
البرهان. وفقاً للنظرية (2.1)، يكفي تبيان أن أية مجموعة مفتوحة ومغلقة بآنٍ واحدٍ في X_A هي عنصر من $\mathcal{D}_A$.
في الواقع، لتكن W مجموعة مفتوحة ومغلقة في X_A، فثمة عنصر $J \in Id(A)$ بحيث يكون:

$$W = D(J) = \cup_{e\in J} D(e)$$

نظراً إلى أن W متراصة لأنها مغلقة في فضاء متراص X_A، عندئذٍ يوجد $e_1, e_2, \dots, e_n \in J$ بحيث:

$$W = D(e_1) \cup D(e_2) \cup \dots \cup D(e_n) = D(e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n) \in \mathcal{D}_A .$$

2.3. نظرية. إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء متراص عداً (*dénombrable ment compact*).
البرهان. لتكن E مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء $Spec(A)$، ولنثبت أنها تملك نقطة تجمع واحدة على الأقل.
لنفرض جدلاً أن عناصر $Spec(A)$ جميعها ليست نقاط تجمع للمجموعة E، وهذا يعني أنه مهما كان العنصر q من $Spec(A)$ فيوجد جوار مفتوح W_q يتقاطع مع E بمجموعة منتهية، أي إنَّ المجموعة $W_q \cap E$ ستكون منتهية .

إن المجموعة $\{W_q \,; q \in Spec(A)\}$ تشكل تغطيـــة مفتوحـــة للفـــضاء المتـــراص $Spec(A)$، إذن هنالـــك تغطيـــة جزئيـــة منتهيـــة مـــن التغطيـــة المـــذكورة ولـــتكن $\{W_{q_1}, W_{q_2}, \dots, W_{q_n}\}$ أي أن: $Spec(A) = \cup_{i=1}^{n} W_{q_i}$

ومنه نجد: $E = E \cap Spec(A) = E \cap (\cup_{i=1}^{n} W_{q_i}) = \cup_{i=1}^{n} (E \cap W_{q_i})$

ونظراً إلى أن الاجتماع المنتهي لمجموعات منتهية هو مجموعة منتهية، فإن المجموعـــة E ستكون منتهية، وهذا يناقض كون E غير منتهية. فالفرض الجدلي خـــاطئ أي إنَّ E تملك نقطة تجمع واحدة على الأقل، ومنه يكون الفضاء $Spec(A)$ متراصاً عداً .

2.4. نتيجة. إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء ليندليلوف (*Lindelöf*) .

2.5. نظرية. إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء غير مترابط (*non-connexe*) وغيـــر مترابط كلياً (*totalement non-connexe*) .

البرهان. إن $\mathcal{D}_A$ قاعدة لتبولوجيا الفضاء $Spec(A)$ عناصـــرها مجموعـــات مفتوحـــة ومغلقة بآنٍ واحـــدٍ ومـــن ثـــمَّ مـــن أجـــل عنـــصر $a \in A$، إن المجمـــوعتين $D(a)$ و$Spec(A) - D(a)$ مفتوحتان وتحققان:

$$D(a) \cap \big(Spec(A) - D(a)\big) = \emptyset$$
$$D(a) \cup \big(Spec(A) - D(a)\big) = Spec(A)$$

يتضح من ذلك أن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء غير مترابط .

ليكن p,q عنصرين مختلفين من الفضاء $Spec(A)$، نظراً إلى أن $Spec(A)$ فـــضاء T_1 (انظر[2])، فإنه يوجد جوار مفتوح لـ q وليكن W لا يحوي p، ومن ثمَّ يوجد عنصر من القاعـــــدة $\mathcal{D}_A$ ولـــــيكن $D(a)$ بحيـــــث $q \in D(a) \subseteq W$ وعليـــــه يكـــــون $p \in Spec(A) - D(a)$، ونظراً إلى أن كل عنصر من القاعـــدة $\mathcal{D}_A$ هـــو مجموعـــة مفتوحة ومغلقة بآنٍ واحدٍ، نكون قد وجدنا جواراً مفتوحاً $W_p = Spec(A) - D(a)$ لـ p

وجواراً مفتوحاً $W_q = D(a)$ لـ q بحيــث $W_p \cap W_q = \emptyset$ و $W_p \cup W_q = Spec(A)$، ومنه يكون الفضاء $Spec(A)$ غير مترابط كلياً.

2.6. نظرية. إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء منتظم (*régulier*) .

البرهان. لتكن $V(I)$ مجموعة مغلقة في $Spec(A)$ (من أجل I مثالي في A)، ولــيكن p مثالياً أولياً لا ينتمي إلى $V(I)$. نظراً إلى أن $Spec(A)$ فضاء T_2 فإنّه: أياً كان q مــن $V(I)$ يوجد جوار مفتوح W_q لـ q وجوار مفتوح U_p لـ p بحيــث: $U_p \cap W_q = \emptyset$. ونظراً إلى أن $Spec(A)$ فضاء متراص فإن $V(I)$ مجموعة متراصة، ومن ثمَّ يمكننا أن نــستنتج مــن التغطيــة المفتوحــة $\{W_q\}_{q \in V(I)}$ لـ $V(I)$ تغطيــة جزئيــة منتهيــة $\{W_{q_1}, W_{q_2}, \dots, W_{q_n}\}$ لـ $V(I)$ ، أي إنَّ: $V(I) \subseteq W_{q_1} \cup W_{q_2} \cup \dots \cup W_{q_n}$
مع ملاحظة أن: $U_{ip} \cap W_{q_i} = \emptyset \;;\; i = 1,2,\dots,n$.

لنضع $W = W_{q_1} \cup W_{q_2} \cup \dots \cup W_{q_n}$ و $U = U_{1p} \cap U_{2p} \cap \dots \cap U_{np}$، إن W مجموعــة مفتوحة في $Spec(A)$ تحوي $V(I)$، و U مجموعة مفتوحة في $Spec(A)$ تحوي p. بالإضافة إلى ذلك $U \cap W = \emptyset$، ومنه يكون الفضاء $Spec(A)$ فضاءً منتظماً.

2.7. نظرية. إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء يتمتع بقابلية العد الثانيــة *deuxième* (*dénombrabilité*)، وقابل للفصل (*séparable*).

البرهان. في الواقع سنبرهن على وجود قاعدة للفضاء $Spec(A)$ قابلة للعد.

في الحقيقة، لدينا $\mathcal{D}_A$ قاعدة للفضاء $Spec(A)$، ونظــراً إلــى أن $Spec(A)$ مجموعــة مفتوحة نستطيع أن نكتب $Spec(A) = \bigcup_{e \in A} D(e)$، أي إنّ $\{D(e)\}_{e \in A}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ $Spec(A)$، ونظراً إلى أن $Spec(A)$ متراص فإننا نستطيع أن نستخلص مــن هــذه التغطيــة تغطيــة منتهيــة ولــتكن $\{D(e_i)\}_{i=1}^{n}$ للفــضاء $Spec(A)$، أي إنَّ: $Spec(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D(e_i)$.

إن الأسرة $\{D(e_i)\}_{i=1}^{n}$ تشكل قاعدة لـ $Spec(A)$ لأنه: من جهة أولى نلاحظ أن عناصر هذه الأسرة جميعها هي مجموعات مفتوحة، ومن جهة ثانية من أجل كل مجموعة مفتوحة $D(J)$ في $Spec(A)$ لدينا $D(J) = \cup_{x\in J} D(x) \subseteq \cup_{i=1}^{n} D(e_i)$، ومن ثمَّ من أجل كل $D(x)$ يوجد $D(e_j)$ من $\{D(e_i)\}_{i=1}^{n}$ بحيث $D(x) = D(e_j)$، وهـذا يعنـي أن $x = e_j$ (وفقاً لـ [3])، وعليه يكون:

$$D(J) = \cup_{x\in J} D(x) = \cup_{e_j = x} D(e_j) .$$

يتضح مما سبق أن $\{D(e_i)\}_{i=1}^{n}$ قاعدة لـ $Spec(A)$ وهي قابلة للعـد، ومنـه الفـضاء $Spec(A)$ يتمتع بقابلية العد الثانية، ولما كان الفضاء يتمتع بقابلية العد الثانية فإنه يملـك مجموعة كثيفة وقابلة للعد، وبناءً عليه يكون الفضاء قابلاً للفصل.

2.8. نظرية. إن مركبات الفضاء التبولوجي $Spec(A)$ هي مجموعاته الجزئية المؤلفـة من عنصر واحد.

البرهان. لتكن C مركبة لـ $Spec(A)$، ولنفرض أن p,q عنصران مختلفان من C.
نظراً إلى أن $Spec(A)$ فضاء غير مترابط كلياً، فثمة جـوار مفتـوح W لـ p وجـوار مفتوح U لـ q بحيث:

$$W \cap U = \emptyset \ \ and \ \ W \cup U = Spec(A)$$

إن $C\cap W$ و $C\cap U$ مجموعتان غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في C، ونظراً إلـى أن $W \cup U = Spec(A)$ فإن: $C = (C\cap W)\cup(C\cap U)$. هذا يعني أن C مجموعة غير مترابطة، وهذا يناقض أنّها مركبة في $Spec(A)$، إذن فرضنا خاطئ ولا بدَّ أن تحوي C عنصراً واحداً فقط.

2.9. نظرية. ليكن $f : A \longrightarrow A'$ تشاكلاً لجبري-*BCK* تبـادليين ومحـدودين، عندئـذٍ الصورة العكسية لأي مثالي أولي وفق f يكون مثالياً أولياً.

البرهان. ليكن p مثالياً أولياً في A' . لدينا $f(0) = 0 \in p$ ومن ثمَّ $0 \in f^{-1}(p)$.

لنفـــــرض $a*b, b \in f^{-1}(p)$ عندئـــــذٍ $f(a*b), f(b) \in p$ ومـــــن ثـــــمَّ $f(a)*f(b), f(b) \in p$، يترتب على ذلك أن $f(a) \in p$ ومنــه $a \in f^{-1}(p)$، إذن $f^{-1}(p)$ مثالي في A.

لإثبات أن $f^{-1}(p)$ أولي، يلاحظ قبــل كــل شـــيء أن: $f(1) = 1 \notin p$ ومــن ثــمَّ $1 \notin f^{-1}(p)$.

لنفرض أن $a \wedge b \in f^{-1}(p)$ عندئذٍ $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) \in p$، يترتب على الفرض أن $\ll f(a) \in p \text{ or } f(b) \in p \gg$ ومنه $\ll a \in f^{-1}(p) \quad or \quad b \in f^{-1}(p) \gg$.

2.10. نظرية. إذا كان $f : A \to B$ تشاكلاً بين جبري-*BCK* ضمنيين، فإن التطبيق: $Spec(f) : Spec(B) \to Spec(A)$ المعرف بالصيغة $(Spec(f))(p) = f^{-1}(p)$ يكون مستمراً.

البرهان. ليكن $D(e) \in \mathcal{D}_A$، ولنبرهن أن: $(Spec(f))^{-1}(D(e)) = D(f(e))$.

في الحقيقة،

$$p \in (Spec(f))^{-1}(D(e)) \Leftrightarrow (Spec(f))(p) \in D(e)$$
$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(p) \in D(e) \quad \Leftrightarrow \quad e \notin f^{-1}(p)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(e) \notin p \quad \Leftrightarrow \quad p \in D(f(e)) .$$

وأخيراً نورد النتائج الآتية:

2.11. نظرية. إذا كان $f : A \to B \ , \ g : B \to C$ تشاكلين بين جبور-*BCK* ضـــمنية، فإن:

$$Spec(g \circ f) = Spec(f) \circ Spec(g)$$

البرهان. ليكن $p \in Spec(C)$، عندئذٍ:

$$(Spec(g \circ f))(p) = (g \circ f)^{-1}(p) = f^{-1}(g^{-1}(p))$$
$$= f^{-1}\left((Spec(g))(p)\right) = (Spec(f))\left((Spec(g))(p)\right)$$
$$= (Spec(f) \circ Spec(g))(p) \ .$$

2.12. نتيجة. إذا كان $Id_A : A \longrightarrow A$ التشاكل المطابق لجبر-*BCK* الضمني *A*، فإن:

$$Spec(Id_A) = Id_{Spec(A)}$$

2.13. نظرية. إذا كان $f : A \longrightarrow B$ إيزومورفيزم بين جبــري-*BCK* ضـــمنيين، فـــإن $Spec(f)$ يكون تطبيقاً تبولوجياً، وإنَّ $(Spec(f))^{-1} = Spec(f^{-1})$.

البرهان. لدينا وفقاً للنتيجتين (2.11) و(2.12) :

$$Spec(f) \circ Spec(f^{-1}) = Spec(f^{-1} \circ f) = Spec(Id_A) = Id_{Spec(A)}$$

$$Spec(f^{-1}) \circ Spec(f) = Spec(f \circ f^{-1}) = Spec(Id_B) = Id_{Spec(B)}$$

ومن ثمَّ: $(Spec(f))^{-1} = Spec(f^{-1})$.

من جهة أخرى، لنبرهن على أن $Spec(f)$ تطبيق تبولوجي.

ليكن $D(e) \in \mathcal{D}_B$، عندئذٍ لدينا: $(Spec(f))(D(e)) = D(f^{-1}(e))$.

في الواقع، $p \in (Spec(f))(D(e)) \Leftrightarrow (Spec(f))^{-1}(p) \in D(e)$

$$\Leftrightarrow Spec(f^{-1})(p) \in D(e)$$
$$\Leftrightarrow f(p) \in D(e) \Leftrightarrow e \notin f(p)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(e) \notin p \quad \Leftrightarrow p \in D(f^{-1}(e))$$

يتضح من ذلك أن $Spec(f)$ تطبيق تبولوجي.

REFERENCES

[1]Iséki, K. and Tanaka, S. (1978). An introduction to the theory of BCK-algebras, Math. Japon, 23.1-26.

[2]Koudsi, E. (2005). Les spectres premiers des BCK-algèbres commutatives. Damascus university Journal for Basic sciences. vol.21, No 2.

[3]Koudsi, E. (2007). Theory of algebras. Damascus University–Sciences College.

[4]Meng, J. (1994). On ideals in BCK-algebras, Math. Japon 40, 143-154 .

[5]Meng, J. and Jun,Y. (1998). Prime ideals in commutative BCK-algebras, Discussions Mathematica, algebras and stochastic Methods, No 18, 5-15.