استخدامُ ممثّلِ المدارِ عديمِ القوى في جبر لي $sp_{2n}(\mathbb{C})$ في استكشافِ بعض سمات مخطَّط دينكن الموزون

ريتا سعيد[1] و إيلي قدسي[2] و عبد اللطيف هنانو[3]

تاريخ الإيداع 2013/10/07
قبل للنشر في 2014/01/07

الملخص

ليكن $n \in \mathbb{N}$، يُبرهن أنَّ:

$sp_{2n} = \{\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1{}^T \end{pmatrix}; Z_i \in M_n(\mathbb{C}), Z_2, Z_3$ متناظرتان$\}$ جبر لي نصف بسيط، ولنضع $G = Aut_e(sp_{2n})$.

ليكن $x \in sp_{2n}$، تُسمَّى المجموعة $O_x = \{\alpha(x) \;\; ; \; \alpha \in G\}$ مدار -G الموافق لـx.

في هذه الورقة العلمية، صُمّمتْ خوارزمية لاختبار هل كان مخطَّط دينكن الموزون من النمط -C_n مقابلاً لأحد مدارات sp_{2n} عديمة القوى؟ وتعيين ممثّل هذا المدار، ومن ثم تحديد الشَّرط اللازم والكافي على هذا الممثل لكي يكون المخطَّط زوجيّاً. فضلاً عن ذلك، طُبّقتْ هذه الخوارزمية على أحد مخطَّطات دينكن الموزونة من النمط - C_3 للتحقُّق من صحَّتها.

الكلمات المفتاحية: جبر لي نصف بسيط، جبر لي sp_{2n}، المدار-G عديم القوى الموافق للعنصرx، مخطَّط دينكن الموزون، مخطَّط دينكن الموزون الزوجي.

التصنيف الرياضي العالمي (MSC2010): 17B20

[1]طالبة دكتوراه، [2] و[3] أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

The usage of the representative of the nilpotent orbit in the Lie algebra sp_{2n} to obtain some adjectives of the weighted Dynkin diagram

R. Saeed[(1)], E. Koudsi[(2)] and A. Hanano[(3)]

Received 07/10/2013
Accepted 07/01/2014

ABSTRACT

Let $n \in \mathbb{N}$, It's proven that:

$$sp_{2n} = \{\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -{Z_1}^T \end{pmatrix};\ Z_i \in M_n(\mathbb{C}),\ Z_2, Z_3 \text{ are Symmetric}\}$$

is semisimple Lie algebra , let $G = Aut_e(sp_{2n})$

For $\in sp_{2n}$, the set:

$O_x = \{\alpha(x)\ ;\ \alpha \in G\}$ is called the G –orbit of x.

In this scientific paper, we describe an algorithm to test if the weighted Dynkin diagram of type -C_n corresponds to one of the nilpotent orbits of sp_{2n}, then we defined the necessary and sufficient condition on this representative that makes the diagram even. We applied this algorithm on one of the weighted Dynkin diagrams of type –C_3 to prove that it is true.

Key words: Semisimple Lie algebra, Lie algebra sp_{2n}, nilpotent G-orbit of x, weighted Dynkin diagram, even weighted Dynkin diagram.

Mathematics Subject Classification (MSC2010): 17B20

[(1)] PhD., Student, [(2),(3)] Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

أ- دراسة مرجعية (تعاريف ومبرهنات أساسية)

1- جبور لي

1-1 جبر لي (Lie algebra) (Eradman ,K. 2006)

- إنَّ جبر لي العقدي g هو فضاءٌ متجهي على الحقل $\mathbb{C}$ مزوّدٌ بتطبيق ثنــائي الخطيــة: $[\,,]: g \times g \longrightarrow g$ يحقّق الخاصتين الآتيتين:

1) $[x,x]=0$

2) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ "متطابقة جــاكوبي" وذلــك مهما تكن العناصر x,y,z من g .

- ويُقال عن جبر لي g إنّه تبادليّ إذا اتّصف بالخاصّيّة $[g,g]=\{0\}$.
- يقال عن الفضاء المتجهي الجزئي L من g إنَّه جبر لــي جزئــي مــن g إذا كــان $[L,L]\subseteq L$، ويُسمَّى مثالياً إذا كان $[g,L]\subseteq L$. إنَّ مناظم الجبر الجزئي L مــن جبر لي g هو أكبر جبر جزئي من g يحوي L كمثالي.
- لــيكن g جبــر لــي، نعــرف المتسلــسلة المركزيــة المتناقــصة لـــ g بالـــشكل: $C^1g \supseteq \cdots \supseteq C^{i-1}g \supseteq C^i g \ldots \supseteq \cdots$ إذْ $C^1g=g \quad , \quad C^r g=[g,C^{r-1}g]\ (r\geq 2)$

يُسمَّى g معدوم القوى إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث: $C^m g=\{0\}$. ويُقال عن الجبر الجزئي H من g إنَّه جبر كارتان إذا كان معدوم القوى ومساوياً مناظمه في g.

- فضلاً عن ذلك، يُقال عن المثالي L في جبر لي g إنَّه قابل للحل إذا وُجِدَ عدد صحيح موجب r بحيث يكون $D^rL=0$ إذْ:

$$D^0L=L \quad ، D^rL=[D^{r-1}L,D^{r-1}L] \qquad (\forall r\geq 1)$$

- يُسمَّى جبر لي g نصف بسيط إذا كان لا يملك أي مثالي قابل للحل مغاير لـــ $\{0\}$.
- تشكّل $M_n(\mathbb{C})$ مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n جبراً تجميعيّاً بالنسبة إلى عملية ضرب المصفوفات، فإذا زوّدنا هذا الجبر بالتطبيق ثنائي الخطية الآتي:

$$[\,,]: M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$$
$$[M_1,M_2]=M_1.M_2-M_2.M_1$$

نحصل على جبر لي يسمّى جبر لي الخطّي العام، يُرمز له $gl_n(\mathbb{C})$.

فضلاً عن ذلك، يسمى كل جبر لي جزئي من $gl_n(\mathbb{C})$ بجبر لي خطي.

1-2 مبرهنة Jacobson-Morozov (Panyushev.D ,1999)

ليكن $x \neq 0$ عنصراً عديم القوى في جبر لي خطي نصف بسيط g، عندئذ هناك عنصران h, y من g بحيث:

$$[h,x] = 2x \text{ ، } [h,y] = -2y \text{ ، } [x,y] = h$$

تسمى (x,h,y) ثلاثية معيارية، ويسمى h العنصر المحايد فيها.

وعندها يتحلل g بالشكل: $g = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} g(j)$

إذْ: $g(j) = \{w \in g \,;\, [h,w] = jw\}$

ويدعى هذا التحليل بتدرج دينكن لـ g الموافق للثلاثية (x,h,y).

ويُعرف ارتفاع العنصر عديم القوى x بأنَّه: $\max\{j \,;\, g(j) \neq 0\}$ ويشار إليه بـ $ht(x)$.

1-3 مبرهنة (R,W.Carter, 1985)

ليكن g جبر لي خطياً نصف بسيط، ولتكن (x,h,y) ثلاثية معيارية في g.

إنَّ مجموعةَ العناصر $z \in g(2)$ التي تحقق $h \in [z, g(-2)]$ مجموعةٌ كثيفةٌ في $g(2)$.

1-4 مدارات جبر لي (Orbits in Lie algebra)

(Tauvel W. T. Yu, 2005)

ليكن g جبر لي خطياً نصف بسيط، ولنضع $G = Aut_e(g)$، وليكن x عنصراً عديم القوى في g.

تسمَّى المجموعة:

$$O_x = \{\alpha x \;;\; \alpha \in G\}$$

مدار -G الموافق للعنصر x، ويُسمّى O_x مداراً معدوم القوى إذا كان العنصر x معدوم القوى.

2- جبر لي sp_{2n}

يُبرهن (Eradman ,K. 2006) أن المجموعة:

$$sp_{2n}=\{\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1{}^T \end{pmatrix} ; Z_i \in M_n(\mathbb{C}), Z_2, Z_3 \text{ متناظرتان}\}$$ هي جبر لي

خطي نصف بسيط.

زد على ذلك، إنَّ جبر كارتان H في جبر لي sp_{2n} مؤلف من مجموعة المصفوفات القطرية في sp_{2n} التي من الشكل $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$ إذْ $D=diag(h_1,\dots,h_n)$.

2-1- منظومة الجذور البسيطة لجبر لي sp_{2n}:(Eradman,K. 2006)

ليكن H جبر كارتان في جبر لي sp_{2n}، ولنرمِّز:

$$e_i : H\to \mathbb{C}\ ; diag(a_1,\dots,a_n)\to a_i$$

عندئذٍ تكون:

$$\{\alpha_1=e_1-e_2,\dots\dots,\alpha_{n-1}=e_{n-1}-e_n\ ,\alpha_n=2e_n\ \}$$

منظومة الجذور البسيطة لجبر لي sp_{2n}.

2-2- مخطَّط دينكن الموزون من النمط - C_n:

(Collingwood, D.H. and Mcgovern W.M, 1993)

2-2-1 تعريف:

- ليكن m عدداً صحيحاً موجباً، يقال عن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ إنَّها تجزئة للعدد m إذا حققت الخاصتين الآتيتين:

$$\lambda_1+\dots+\lambda_k=m \text{ ،} \ \lambda_1\geq\dots\geq\lambda_k>0$$

ويُرمَز بـــ $P(m)$ لمجموعة تجزئات العدد m.

- ليكن i عدداً صحيحاً، ولنضع المصفوفة المربعة $i\times i$:

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تُسمَّى J_i قالب جوردان.

لتكن $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in P(m)$ ، نرمِّز:

$$x(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

إنَّ x عنصر عديم القوى.

- في جبر لي خطـــي نــصف بــسيط، يقابــل العنـــصر عـــديم القـــوى x بالتجزئـــة $x(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ إذْ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ هي مراتب قوالب مصفوفة جوردان المشابهة لــ x.

وعندها يكون لــ h الموافق له في الثلاثية المعيارية الشكل:

$$h = h_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} = \begin{pmatrix} D(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

إذْ:

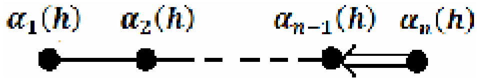
$$D(\lambda_i) = diag(\lambda_i - 1, \lambda_i - 3, \dots\dots, -\lambda_i + 3, -\lambda_i + 1)$$

2-2-2 مبرهنة:

يوجد تقابل بين مجموعة المدارات عديمة القوى في جبر لي sp_{2n} وبين عناصر المجموعة $p(2n)$ التي تحقق أن أجزاءها الفردية ذات تعددية زوجية.

2-2-3 مبرهنة:

إنَّ مخطَّط دينكن الموزون الموافق للعنصر $x(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ممثل المدار عديم القـــوى O_x في جبر لي sp_{2n} هو من النمط $- C_n$ أي له الشكل:



إذْ h هو العنصر المحايد المقابل للعنصر عديم القوىx، $\{\alpha_i \; ; (i = 1, \dots, n)\}$ منظومة الجذور البسيطة لجبر لي sp_{2n} .

زد على ذلك، يُبرهن أن $(i = 1, \dots, n)$ $\alpha_i(h) \in \{0,1,2\}$.

2-2-4 تعريف:

يقال عن مخطَّط دينكن الموزون الموافق للعنصر x عديم القوى في جبر لي خطي نصف بسيط g: إنَّه زوجي إذا كان المخطَّط الناتج عنه بعد قسمة أوزانه علــى 2 هــو أيــضاً مخطَّط دينكن الموزون المقابل لعنصر عديم القوى آخر x' في جبر ليg.

2-2-5 مبرهنة: (Panyushev.D ,1999)

إذا كان $x(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ عنصراً عديم القوى في جبر لي sp_{2n}، عندئذٍ يُعطى ارتفاع x بالصيغة: $ht(x) = 2(\lambda_1 - 1)$.

2-2-6 مثال:

إنَّ مخطَّطات دينكن الموزونة المقابلة لمدارات عديمة القوى في جبر لي sp_6 تُعطى وفق الجدول الاتي:

المدارات عديمة القوى في جبر لي sp_6		
المدار O	h	Δ (0)
$O_{[6]}$	diag(5,3,1,-5,-3,-1)	2 2 2
$O_{[4,2]}$	diag(3,1,1,-3,-1,-1)	2 0 2
$O_{[4,1^2]}$	diag(3,1,0,-3,-1,0)	2 1 0
$O_{[3^2]}$	diag(2,2,0,-2,-2,0)	0 2 0
$O_{[2^3]}$	diag(1,1,1,-1,-1,-1)	0 0 2
$O_{[2^2,1^2]}$	diag(1,1,0,-1,-1,0)	0 1 0
$O_{[2,1^4]}$	diag(1,0,0,-1,0,0)	1 0 0
$O_{[1^6]}$	diag(0,0,0,0,0,0)	0 0 0

نلاحظ أنَّ المخطَّط المقابل للمدار $O_{[3^2]}$ زوجي، والمخطط الناتج عنه بعد قسمة أوزانـــه على 2 هو المخطط المقابل للمدار $O_{[2^2,1^2]}$.

ب- دراسة بحثية

3- خوارزمية الاختبار

3-1 توطئة:

ليكن g جبر لي خطياً نصف بسيط، وليكن H جبر كارتان جزئياً منg، إنَّ الشرط اللازم والكافي لوجود ثلاثية معيارية في g عنصرها المحايـــد$h \in H$ هـــو وجـــود $x \in g$ بحيث $h \in [x, g(-2)]$.

الإثبات:

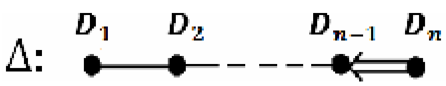
إذا كانت (x,h,y) ثلاثية معيارية في g عندئذٍ وفقاً للتعريف يوجد $\boldsymbol{x,y \in g}$ بحيث:

$$[h,x] = 2x \ \text{،}\ [h,y] = -2y \ \text{،}\ [x,y] = h$$

وفقاً لتدرج دينكن لـــ g الموافق للثلاثيـــة الـــسابقة يكـــون $x \in g(2)$ ومـــن ثـــمَّ $h \in [x, g(-2)]$.

العكـــس: إذا كـــان $h \in [x, g(-2)]$ عندئـــذ يوجـــد $y \in g(-2)$ بحيـــث $[x,y] = h$ وعندها تكون (x,h,y) ثلاثية معيارية فيg، وبذلك يتم البرهان.

ليكن:



مخطَّط دينكن الموزون من النمط $- C_n$، إذْ:

$D_i \in \{0,1,2\} \quad (i = 1, \dots, n)$، ولتكن جملة المعادلات الخطية:

$$\left.\begin{array}{c} h_i - h_{i+1} = D_i \quad (1 \le i \le n-1) \\ 2h_n = D_n \end{array}\right\} \dots\dots (I)$$

نورد الآن المبرهنة الأساسية في البحث:

2-3 مبرهنة:

1.المخطَّط Δ مقابل لمدار عديم القوى في جبر لي sp_{2n} إذا وجد حل وحيد لجملة المعادلات (I).

2.Δ مخطَّط زوجي إذا وفقط إذا كانت جميع مراتب قوالب مصفوفة جوردان المشابهة لممثل المدار عديم القوى المقابل له فردية.

الإثبات:

1. وفقاً لتعريف مخطَّط دينكن الموزن$-C_n$، إذا وجد حل $h_1,h_2,\dots,h_n$ لجملة المعادلات (I) يكون:

$h = diag(h_1,h_2,\dots,h_n,-h_1,-h_2,\dots,-h_n)$ من H هو العنصر المرشح ليكون محايداً في ثلاثية معيارية مقابلة للمخطَّط Δ.

بالاعتماد على التوطئة (3-1) والمبرهنة(3-1) ، يمكن البحث عن العنصرين x,y اللذين يحققان أن (x,h,y) ثلاثية معيارية مقابلة للمخطَّط Δ بالطريقة الآتية:

بفرض $x_1,x_2,\dots,x_s$ أساس$g(2)$، $z_1,z_2,\dots,z_s$ أساس$g(-2)$. نختار عينة عشوائية $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_s$ من $\mathbb{Q}$، ونضع $x = \sum_1^s \mu_i x_i$،

إنَّ احتمالَ أن ينتمي العنصر h للمجموعة $[x,g(-2)]$ قريبٌ جداً من الواحد.

لنضع: $y = \sum_1^s b_i z_i$ إذْ $b_1,b_2,\dots,b_s$ مجاهيل.

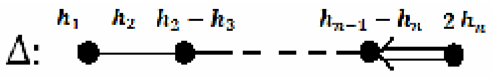
نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\left[\sum_1^s \mu_i x_i, \sum_1^s b_i z_i\right] - h_k = 0 \quad (1 \le k \le 2n) \dots\dots (II)$$

إذا وجدت الأعداد $b_1,b_2,\dots,b_s$ التي تحقق جملة المعادلات (II)عندئذٍ تكون (x,h,y) ثلاثية معيارية مقابلة للمخطَّط Δ.

وإلا نعيد اختيار العنصر بالطريقة السابقة ذاتها، وفقاً للمبرهنة (3-1) لا بدَّ أن تنتهي هذه الخوارزمية بعد خطوات معدودة.

2. **لزوم الـشرط**: لنفرض بداية أن Δ مخطَّط زوجـي مقابـل للمـدار عـديم القـوى $O_{x(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$، ولـيكن العنـصر المحايـد الموافـق لـ x هـو $h = h_{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)} = diag(h_1, h_2, \dots, h_n, -h_1, -h_2, \dots, -h_n)$. وفقـاً لتعريف منظومة الجذور البسيطة لجبر لي sp_{2n} يكون لـ Δ الشكل:

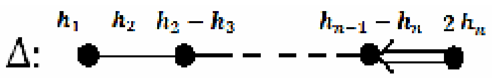


وعليـه فإنَّـه يلـزم حتـى يكـون المخطَّـط زوجيـاً أن تكـون جميـع الأعـداد $\lambda_i\ (1 \le i \le n)$ من النمط ذاته (إما زوجية معاً أو فردية معاً).

ليكن $\dot{x}$ العنصر عديم القوى الممثل لمخطَّط دينكن الموزون الناتج عن قـسمة أوزان Δ على 2 عندئذ يكون: $ht(\dot{x}) = \frac{1}{2}ht(x)$ فضلاً عن ذلك، وفقاً للمبرهنـة (5-2-2) يكون $ht(x) = 2(\lambda_1 - 1)$ أي إنَّ جميع ارتفاعات العناصر عديمة القوى في sp_{2n} لها الشكل السابق ذاته ومن ثمَّ $ht(\dot{x})$ زوجي أي إنَّ λ_1 فردية، ومن ثمَّ جميع الأعداد $\lambda_i\ (1 \le i \le n)$ فردية.

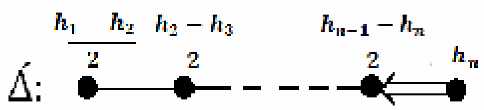
كفاية الشرط:

لنفرض بداية أن مخطَّط دينكن الموزون:



مقابل للمدار عديم القوى $O_{x(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$، وعنـصره المحايـد h إذْ جميـع الأعـداد: $\lambda_i\ (1 \le i \le n)$ فرديـة، وعـدد تكـرارات كـل عـددٍ فـردي فـي التجزئـة $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ عددٌ زوجيٌّ.

ولنبحث عن إمكانية وجود العنصر عديم القوى $\dot{x}(d_1, \dots, d_n)$ ممثل المـدار عـديم القوى الموافق للمخطَّط:



لنفرض أن $\dot{h}$ هو العنصر المحايد المقابل للمخطَّط $\acute{\Delta}$ عندئذ يكون:

$$\hat{h}=\frac{h}{2}=\hat{h}_{(d_1,\dots,d_k)}=\begin{pmatrix} D(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(d_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(d_k) \end{pmatrix}$$

إذْ:

$$D(d_i)=diag\left(\frac{\lambda_i-1}{2},\frac{\lambda_i-3}{2},\dots\dots,\frac{-\lambda_i+3}{2},\frac{-\lambda_i+1}{2}\right)$$

وفقاً للتعريف(1-2-2) يجب أن يكون العنصر $\hat{x}$ المقابل لـــ $\hat{h}$ هو:

$\hat{x}_{(d_1,\dots\dots,d_k)}$ إذْ:

$$d_i=\frac{\lambda_i-1}{2}+1,\frac{\lambda_i-3}{2}+1=\frac{\lambda_i+1}{2},\frac{\lambda_i-1}{2};\ (1\le i\le n)$$

ونظــراً إلــى أن جميــع الأعــداد $\lambda_i\ (1\le i\le n)$ فرديــة تكــون الأعــداد: $d_i\ (1\le i\le n)$ صحيحة موجبة.

زد على ذلك ينتج من كون عدد تكرارات كل عددٍ فردي في التجزئــة $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ عدداً زوجياً أن $\hat{x}(d_1,\dots,d_n)$ موجود.

ومن ثمَّ المخطَّط $\acute{\Delta}$ مخطَّط دينكن الموزون مقابل لأحد المدارات عديمة القوى في جبــر لي sp_{2n}، إذاً المخطَّط Δ زوجي.

بدمج الأفكار الواردة في المبرهنة السابقة، نستطيع عرض خوارزمية اختبــار مخطَّــط دينكن الموزون المعطى إذا كان زوجياً بعد التحقق من كونه يقابل أحد المدارات عديمــة القوى في جبر لي sp_{2n} :

3-3 الخوارزمية:

<u>**المدخلات:**</u>

Δ: 

إذْ: $D_i\in\{0,1,2\}\quad(i=1,\dots,n)$

<u>**المخرجات:**</u>

- التحقق من كون Δ مقابلاً لمدار عديم القوى.

- إيجاد ممثل المدار عديم القوى المقابل لهذا المخطَّط.
- تحديد هل كان هذا المخطَّط زوجياً أم لا؟

الخطوات:

1) نحل جملة المعادلات الخطية:

$$(I)\quad \begin{cases} h_i - h_{i+1} = D_i \quad (1 \le i \le n-1) \\ 2h_n = D_n \end{cases}$$

2) إذا وجد حل لـــ (I) وليكن $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ عندئذ:

أ- نختار عينة عشوائية $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ من $\mathbb{Q}$.

ب- نضع $x = \sum_1^s \mu_i x_i$ إذْ $x_1, x_2, \dots, x_s$ أساس $g(2)$.

ت- إذا كان: $(h_1, h_2, \dots, h_n, -h_1, -h_2, \dots, -h_n) \in [x, g(-2)]$ عندئذٍ:

§ نوجد مصفوفة جوردان $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ المشابهة لـــ x.

§ إنَّ $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ هي ممثل المدار عديم القوى المقابل لمخطَّط دينكن الموزون.

§ إذا كانت $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ فردية عندئذٍ:

- مخطَّط دينكن زوجي.
- $\left(\frac{\lambda_1+1}{2}, \frac{\lambda_1-1}{2}, \dots\dots, \frac{\lambda_k+1}{2}, \frac{\lambda_k-1}{2}\right)$ ممثل المدار عديم القوى المقابل لمخطَّط دينكن الموزون الناتج عن قسمة المخطَّط الأصلي على2.

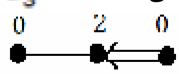
وإلا المخطَّط Δ غير زوجي.

وإلا نعود للخطوة (أ).

وإلا مخطَّط دينكن الموزون المعطى ليس مقابلاً لمدار عديم القوى.

4-3 مثال تطبيقي:

ليكن لدينا مخطَّط دينكن الموزون من النمط C_3 —

Δ: 

بحل جملة المعادلات:

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = 0 \\ h_2 - h_3 = 2 \\ 2h_3 = 0 \end{cases}$$

(I) نجد أن $(2,2,0)$ حل لها.

نضع:

$$h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من تعريف جبر لي sp_{2n} نجد أنه يكتب على شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية كما يأتي:

$$sp_6 = < \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M^t \end{pmatrix} > \oplus < \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > \oplus < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} >$$

إذْ قاعدة الفضاء الأول هي:

$$M_{ij} = \{E_{i,j} - E_{3+j,3+i} \quad (1 \le i,j \le 3)\}$$

والثاني:

$$P_{ij} = \{E_{i,3+j} + E_{j,3+i} \quad (1 \le i,j \le 3)\}$$

والثالث:

$$Q_{ij} = \{E_{3+j,i} + E_{3+i,j} \quad (1 \le i,j \le 3)\}$$

بالحساب نجد أن:

$$[h, M_{ij}] = (a_i - a_j)M_{ij} \quad (1 \le i \ne j \le 3)]$$
$$[h, P_{ij}] = (a_i + a_j)P_{ij} \quad (1 \le i \le j \le 3)]$$
$$[h, Q_{ji}] = -(a_i + a_j)Q_{ij} \quad (1 \le i \le j \le 3)]$$

ومن ثمّ يكون أساس$g(2)$:

$$x_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$x_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},x_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

وكذلك يكون أساس$g(-2)$:

$$t_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},t_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$t_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},t_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

نختار عينة عشوائية من $\mathbb{Q}$:

$$a=\frac{1}{4}\quad;\quad b=3\quad;\quad c=\frac{2}{5}\quad;\quad d=1;$$

ونضع: $x=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4$

فتكون:

$$x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

نضع:

$$y=et_1+ft_2+gt_3+kt_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -f \\ g & k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذْ e,f,g,k مجاهيل، وعندها يكون:

$$[x,y]=$$

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{e}{4}-\frac{2g}{5} & -\frac{f}{4}-\frac{2k}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3e-g & 2-3f-k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{4}+3f-\frac{2g}{5}-k & 0 & 0 & \frac{4e}{5}+2f \\ 0 & 0 & 0 & -2+\frac{e}{4}+\frac{2g}{5} & 3e+g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f}{4}+\frac{2k}{5} & -2+3f+k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{2}+6k & 0 & 0 & -\frac{e}{4}-3f+\frac{2g}{5}+k \end{pmatrix}$$

بحل جملة المعادلات: $h-[x,y]=0$

نجد أن $k=\frac{-10}{19}$, $g=\frac{120}{19}$, $f=\frac{16}{19}$, $e=\frac{-40}{19}$ حل لها، ومن ثم $h\in[x,g(-2)]$.

وبملاحظة أن:

$$x = P.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$$

إذْ:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{18} & 0 & 0 & \frac{-20}{19} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-20}{19} \\ 0 & \frac{-5}{19} & 0 & 0 & \frac{60}{19} & 0 \end{pmatrix}$$

تكون (3,3) هي مصفوفة جوردان المكافئة للمصفوفة x ومن ثمَّ المخطَّط Δ زوجي، ويكون المخطط الناتج عنه بعد قسمة أوزانه على 2 هو المخطط المقابل للمدار $O_{[2^2,1^2]}$.

4- النتائج

- تصميم خوارزمية لاختبار هل كان مخطَّط دينكن موزون معطى من النمط C_n — مقابلاً لأحد مدارات sp_{2n} عديمة القوى وتعيين ممثل هذا المدار.
- تحديد الشرط اللازم والكافي على ممثل المدار عديم القوى لكي يكون المخطَّط الموافق له زوجياً.
- تطبيق خوارزمية الاختبار السابقة على أحد مخطَّطات دينكن الموزونة من النمط C_3 —، للتحقق من صحتها.

REFERENCES

1) Collingwood, D.H. and Mcgovern W.M, 1993. Nilpotent orbit in semisimple Lie algebras, Van Nostrand Reinhold, New York. pp 30, 70, 81, 82
2) Eradman, K. and Wildon, M.J., 2006. Introduction to Lie algebras, Springer Verlag, London. pp 1, 26, 30, 32, 54, 134, 135, 136.
3) Panyushev, D. 1999. On spherical nilpotent orbits and beyond. Annales de l'institute Fourier, Grenoble, 49, 5, pp1453, 1476
4) Patrice Tauvel Rupert W. T. Yu, 2005. Lie Algebras and Algebraic Groups, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. pp297.
5) Carter, R, W. 1985. Finite groups of Lie type,Conjugacy classes and complex characters (Wiley and Sons, Chichester). pp 281, 283