دراسة جديدة للتماثلات بين شبكات الزمر

أيمن الحلقي[1] وعبد الواحد أبو حمدة[2]

تاريخ الإيداع 2013/12/04
قبل للنشر في 2014/04/14

الملخص

من المعلوم أنّ الشبكة L(G) (شبكة الزمر الجزئية للزمرة G) لا تُعيّن الزمرة G بالحالة العامة. أي إنَّه إذا كانت H,G زمرتين وكانت L(G), L(H) شبكتي الزمر الجزئية للزمـــر G,H، علـــى الترتيـــب، فإنّ الاقتضاء $L(G) \cong L(H) \Rightarrow G \cong H$ لا يكون صحيحاً في الحالة العامة. وكمثال بسيط على هـــذا يمكن أخذ $H \cong Z_2\ , G \cong Z_3$. وقد وضع الباحثون في هـــذا المجـــال، مثـــل M. Suzuki (2009) S.Breas, (1986) P. Palfy, (1951) وغيـــرهم، الـــشروط التـــي تـــؤدي إلـــى صـــحة الاقتـــضاء المذكور[التفاصيل في المقدمة]. ولهذا فإننا نقدم، في ورقتنا البحثية الحالية، تعـــاريف جديـــدة وشـــروطاً جديدة مدعّمة بالمثالين 1.3 و7.3 وأثبتنا صحة عدد من المبرهنات التي تبيّن صحة الاقتـــضاء المـــذكور ضمن هذه الشروط. ونذكر من بين هذه المبرهنات تلك المبرهنات ذات الأرقام 8.3 و9.3 و11.3 و13.3.

الكلمات المفتاحية: شبكة الزمر الجزئية، التماثل الشبكي، $Aut(G)$

التصنيف الرياضياتي العالمي: 2010 SMC 20E15 .

[1] طالب ماجستير، [2] أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

On new isomorphisms between the lattices of groups

A. Alhalaqi[1] and A.Abohamdah[2]

Received 04/12/2013
Accepted 14/04/2014

ABSTRACT

It is known that the lattice L(G) of all subgroups of a group G does not determine the group, that is, If G,H are groups, then the implication $L(G) \cong L(H) \Rightarrow G \cong H$ is not true in general. The simplest example is given by the groups Z_2, Z_3. Therefore, researchers (M.Suzuki, P. Palfy, S. Breas and others) mentioned some conditions to get that the implication is true.

In our paper we mentioned new definitions and conditions and we have proved many theorems like 8.3, 9.3, 11.3, 13.3.

Key words: $Aut(G)$, Subgroups lattice , Lattice isomorphism.

Mathematical Subject Classification : 2010 SMC 20E15

[1] MCS., Student, [2] Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

1. مقدمة

لتكن G زمرة ولتكن L(G) مجموعة كل الزمر الجزئية من الزمرة G عندها تشكل المجموعة L(G) شبكة وفق علاقة الاحتواء [6]. ومن خلال هذه الشبكة يمكن استخلاص صفات إضافية للزمرة المأخوذة، فكان هذا الهدف غايتنا كما هو الحال لدى كثير من الباحثين قبلنا. تتمحور هذه الورقة حول دراسة القضية $L(G)\cong L(H) \Rightarrow G\cong H$. بعد إضافة شروط. وقد حازت هذه الدراسة (إيجاد تماثل زمري انطلاقاً من تماثل شبكي) منذ وجود مفهوم شبكات الزمر على أهمية بالغة لدى معظم الباحثين في هذا المجال، فوضعوا الشروط المناسبة للحصول على صحة هذا الاقتضاء ضمن هذه الشروط. ومن أبرزهم:

- الباحث Michio Suzuki أثبت عام 1951 صحة الآتي: لتكن G زمرة بسيطة ليست تبديلية، ولتكن H زمرة بحيث $L(G\times G)\cong L(H)$ عندئذٍ $H\cong G\times G$. [7]
- الباحث Peter P. Palfy أثبت عام 1986 صحة الآتي: من أجل أي زمرة تبديلية G فإن: $L(G\times G)\cong L(H\times H) \Leftrightarrow G\times G\cong H\times H \Leftrightarrow G\cong H$. [5].
  ومن ثم بيّن الباحث Grigore Calugareaun ذلك بأسلوب أبسط عام 2006. [3]
- الباحث Simion Breaz أثبت عام 2009 صحة الآتي: لتكن G p – زمرة تبديلية وليست دوارة محلياً (تحوي زمرة جزئية تماثل $Z_p\times Z_p$) وليكن H زمرة تبديلية بحيث $L(G)\cong L(H)$ عندئذٍ $H\cong G$. [2].

ونحن بدورنا، من خلال ورقتنا البحثية الحالية، نقدم تعاريف جديدة تماماً وشروطاً تُمكننا من البرهان على صحة الاقتضاء $L(G)\cong L(H) \Rightarrow G\cong H$. وذلك بعد أن قمنا ببناء المثالين 1.3 و7.3 اللذين يكونان داعمين لتعاريفنا وشروطنا بحيث يمكن عدّهما مبررين لتقديم هذه التعاريف والشروط في المبرهنات التي سنثبت صحتها. وقد حصلنا على عدد من النتائج الجديدة التي يمكن عدُّها مختلفة كلّياً عمّا توصل إليه الباحثون سابقاً في هذا المجال.

2. أساسيات

يُقصد بالرمز $A\leq G$ أن A زمرة جزئية من G

تعريف1.2:[4] لتكن G زمرة ولتكن A,B زمرتين جزئيتين منها . يقال عن الزمرة G إنها جداء شبه مباشر داخلي للزمرة B على A (internal semidirect product of B by A) ونكتب $G=A\ltimes B$ إذ تحقق الآتي: $B\lhd G\ \&\ G=AB\ \&\ A\cap B=\{e\}$.

ملاحظة: عندما تكون A وB ناظميتين في G فإن التعريف السابق يؤول إلى مفهوم الجداء المباشر.

مبرهنة 2.2:[4] كل زمرة مرتبتها pq، إذْ p,q عددان أوليان و $p < q$ ، تكون إما دوارة أو جداء شبه مباشر داخلي لزمرة دوارة من المرتبة q على زمرة دوارة من المرتبة p أي من الشكل $< a >_p \ltimes < b >_q$، إذْ: $a^{-1}ba = b^r$ ، (r-1) لا يقبل القسمة على q، $r^p \equiv 1(mod\, q)$ و p يقسم (q-1) .

مبرهنة3.2:[1] لتكن G زمرة دوارة مرتبتها $n = p_1^{c_1}p_2^{c_2} \dots p_r^{c_r}$ إذْ p_i، $i = 1, \dots, r$ ، أعداد أولية مختلفة، و$c_i \in \mathbb{N}^*$، $i = 1, \dots, r$. ولتكن H زمرة ما. عندئذ $L(H) \cong L(G)$ إذا وفقط إذا كانت H زمرة دوارة مرتبتها $m = q_1^{c_1}q_2^{c_2} \dots q_r^{c_r}$ إذْ q_i، $i = 1, \dots, r$ ، أعداد أولية مختلفة.

مبرهنة 4.2:[6]

لتكن G p – زمرة تبديلية منتهية، إذْ p عدد أولي. إذا وُجدت p – زمرة تبديلية ولتكن H بحيث $L(G) \cong L(H)$ عندئذٍ $G \cong H$.

3. نتائج:

مثال 1.3: **يبيّن هذا المثال أن الشروط الآتية**:

$$L(G) \cong L(H) \ \ \& \ Aut(H) \cong Aut(G) \& \text{زمرتان تبديليتان } H, G$$

لا تؤدي إلى أن $G \cong H$

لنأخذ $G = Z_{35}\, , H = Z_{39}$

فنلاحظ أنّ:

$$Aut(G) \cong U_{35} = U_{5.7} \cong U_5 \times U_7 \cong Z_4 \times Z_6 \cong Z_4 \times Z_3 \times Z_2$$

$$Aut(H) \cong U_{39} = U_{3.13} \cong U_3 \times U_{13} \cong Z_2 \times Z_{12} \cong Z_2 \times Z_4 \times Z_3$$

أي $Aut(G) \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_3 \cong Aut(H)$

كما نلاحظ بحسب المبرهنة 3.2 أنّ $L(H) \cong L(G)$

إلّا أنّ $G = Z_{35} \ncong H = Z_{39}$

تعريف2.3: لتكن H,G زمرتين ما وليكن $\varphi: L(G) \to L(H)$ تماثلاً شبكياً. نقول عن التماثلφ إنه A- تماثل شبكي إذا كان $\forall M \leq G: Aut(M) \cong Aut(\varphi(M))$

تمهيديــــة3.3: لتكن H,G زمرتين ما، ولـــيكن $\varphi: L(G) \to L(H)$ A- تمــاثلاً شبكياً. عندئذٍ $\forall B \leq G$ فإنّ

$\varphi_{|B}: L(B) \to L(\varphi(B))$ يكون A - تماثلاً شبكياً .

البرهان: واضح أن $\forall B \leq G ; \varphi_{|B}: L(B) \to L(\varphi(B))$ هو تماثل شبكي لنبـــيّن أنّه A-تماثل شبكي$\forall A_1 \leq B \Rightarrow A_1 \leq G \Rightarrow Aut(A_1) \cong Aut(\varphi(A_1))$

لكن $\varphi_{|B}(A_1) = \varphi(A_1)$ ومن ثمَّ $Aut(A_1) \cong Aut(\varphi_{|B}(A_1))$ وهذا ما يبيّن أنّ $\varphi_{|B}$ هو A- تماثل شبكي.

ترميز*:

لتكن H,G زمرتين بحيث إنّ $\varphi: L(G) \to L(H)$ عبارة عن A-تماثل شبكي ومن ثمَّ $\forall M \leq G: Aut(M) \cong Aut(\varphi(M))$ لنرمّز هذه التماثلات بالشكل الآتي:

$$R_M: Aut(M) \cong Aut(\varphi(M))$$

نعتمد هذا الترميز لـــــ R في ما سيأتي كلّه.

تعريف 4.3: لتكن B,G زمرتين بحيث $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبارة عن A- تماثل شبكي . نقول عن φ إنه H – تماثل شبكي إذا تحقق الآتـــي مـــن أجـــل كـــل f مـــن $Aut(G)$:

$$\forall x \in G: f_{|<x>}: <x> \to <x> \Leftrightarrow g_{|\varphi(<x>)}: \varphi(<x>) \to \varphi(<x>)$$

إذْ $g = R_G(f)$ و $R_{<x>}(f_{|<x>}) = g_{|\varphi(<x>)}$

تعريف 5.3: لتكن B,G زمرتين وليكن $\varphi: L(G) \to L(B)$ تماثلاً شبكياً. ولـــيكن $K \leq G$. نقـــول عـــن φ إنـــه H – تماثـــل شـــبكي فـــوق K إذا كـــان $\varphi_{|K}: L(K) \to L(\varphi(K))$ عبارة عن H – تماثل شبكي.

مبرهنة 6.3: لتكن G,K زمرتين بحيث $ord(G) = p_1p_2 \dots p_r, ord(K) = q_1q_2 \dots q_r$ إذْ p_i، $i = 1, \dots, r$ ، أعداد أولية مختلفة و q_i، $i = 1, \dots, r$ ، أعداد أولية مختلفة. وليكن $\varphi: L(G) \to L(K)$ عبارة عن A - تماثل شبكي . عندئذٍ، φ يكون H – تماثلاً شبكياً فوق كل زمرة جزئية سيلوفية من G.

البرهان:

نظراً إلى أنّ $ord(G) = p_1p_2 \dots p_r$ فإن كل p_i- زمرة جزئية سيلوفية من G هي زمرة مرتبتها عدد أولي ومن ثمَّ هي زمرة دوارة. إذا فرضنا أن M زمرة سيلوفية من G عندئذٍ $\mu = \varphi_{|M}: L(M) \to L(\varphi(M))$ يكون H - تماثلاً شبكياً ، لأنه بحسب التمهيدية 3.3 يكون μ عبارة عن A- تماثل شبكي .كما لدينا $\forall e \neq x \in M: M =< x >$، من ثمَّ من أجل كل <u>$f$ من $Aut(M)$</u>:

$$\forall x \in M: f_{|<x>} = f: < x > \to < x > \Leftrightarrow g_{|\varphi(<x>)} = g: \varphi(< x >) \to \varphi(< x >)$$

إذْ $g = R_M(f)$ و $R_{<x>}(f_{|<x>}) = g_{|\varphi(<x>)}$، وهذا ما يبيّن أن μ هو H – تماثل شبكي فوق M

مثال 7.3: لنأخذ الزمرتين B,G التاليتين اللتين كل منهما جداء شبه مباشر داخلي لزمرة دوارة مرتبتها 91 على زمرة دوارة مرتبتها 3 :

$$G =< a >_3 \leftthreetimes < b >_{91} \quad ; (ab)^3 = 1 \ \& a^{-1}ba = b^9$$
$$B =< x >_3 \leftthreetimes < y >_{91} \quad ; (xy)^3 = 1 \ \& x^{-1}yx = y^{16}$$

- سنبيّن في هذا المثال أنه يوجد تماثل شبكي $\varphi: L(G) \to L(B)$ يحقق الآتي:

1. $\forall K \leq G: ord(K) = ord(\varphi(K))$
2. φ عبارة عن A- تماثل شبكي
3. φ عبارة عن H-تماثل شبكي فوق كل زمرة جزئية سيلوفية من G

نلاحظ أولاً أنّ $G \ncong B$ وذلك لأنه لو فرضنا جدلاً أنه يوجد تماثل مثل $f: G \longrightarrow B$. عندئذ يكون $f(b) = y^i \ \ \& \ \ f(a) = x^j y^t$

إذْ:

$1 \le i < 91$, $1 \le j < 3$, $1 \le t \le 91$، والعددان i,91 أوليان نسبياً. ولما كان $a^{-1}ba = b^{9}$ فإنّ $\left(f(a)\right)^{-1}f(b)f(a) = (f(b))^{9}$ ومن ثمَّ $y^{-t}x^{-j}y^{i}x^{j}y^{t} = y^{9i}$ ومن ثمَّ $16^{j} \equiv 9(mod\, 91)$ وهذا غير صحيح.

- بناء التماثل الشبكي $\varphi: L(G) \to L(B)$ الذي يحقق الشرطين:

$(\forall K \le G$ فإن $ord(K) = ord(\varphi(K))$ & (φ عبارة عن A-تماثل شبكي):

$$\varphi(G) = B \ \&\varphi(\{e\}) = \{e\}, \varphi(< b >_{91}) =< y >_{91}, \varphi(< b^{7} >_{13}) =< y^{7} >_{13}$$

$$\varphi(< b^{13} >_{7}) =< y^{13} >_{7}$$

$$\varphi(< ab^{r} >_{3}) =< xy^{r} >_{3}; \ \ r = 0,1,2,\dots,90$$

$$\varphi\left(< ab^{i}, b^{7} >\right) = \left(< xy^{i}, y^{7} >\right); \ \ i = 0,1,2,3,4,5,6$$

$$\varphi\left(< ab^{j}, b^{13} >\right) = \left(< xy^{j}, y^{13} >\right); \ \ j = 0,1,\dots,12$$

ومن الواضح أنّه من أجل كل i من $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ يكون لدينا :

$$M_{i} =< ab^{i}, b^{7} >=< ab^{i} >_{3} \ltimes < b^{7} >_{13} \ \ ; (ab^{i})^{-1}b^{7}ab^{i} = (b^{7})^{9}$$

وأيضاً:

$$\varphi(M_{i}) =< xy^{i}, y^{7} >=< xy^{i} >_{3} \ltimes < y^{7} >_{13} \ \ ; (xy^{i})^{-1}y^{7}xy^{i} = (y^{7})^{16}$$

ومنه بحسب المبرهنة 2.2 يكون $M_{i} \cong \varphi(M_{i})$ إذْ $i = 0,1,2,3,4,5,6$

وكذلك من أجل كل j من $\{0,1,2,\dots,12\}$ يكون لدينا

$$N_{j} =< ab^{j}, b^{13} >=< ab^{j} >_{3} \ltimes < b^{13} >_{7} \ \ ; (ab^{j})^{-1}b^{13}ab^{j} = (b^{13})^{9}$$

وأيضاً:

$$\varphi\left(N_{j}\right) =< xy^{j}, y^{13} >=< xy^{j} >_{3} \ltimes < y^{13} >_{7} \ \ ; (xy^{j})^{-1}y^{13}xy^{j} = (y^{13})^{16}$$

ومنه يكون $N_{j} \cong \varphi\left(N_{j}\right)$ إذْ $j = 0,1,\dots,12$

وبـــــذلك يكـــــون $Aut(N_{j}) \cong \mathrm{Aut}(\varphi\left(N_{j}\right))\& \ Aut(M_{i}) \cong \mathrm{Aut}(\varphi(M_{i}))$

إذْ $i = 0,1,2,3,4,5,6$ & $j = 0,1,\dots,12$

ومثل هذا الأمر واضح بالنسبة إلى الزمر الدوارة التي لها المرتبة ذاتها.

وأيضاً $\mathrm{Aut(G)} \cong \mathrm{Aut(B)}$ لأن التماثلات لـــــ G تملك الشكل الآتي: إذْ $a \mapsto ab^v \ \ \&\ \ b \mapsto b^u$ والعددان $1 \le \mathrm{v} \le 91 , 1 \le \mathrm{u} < 91$ u, 91 أوليان نسبياً.

وأخيراً فإنّ 3. ينتج مباشرة من المبرهنة 6.3

مبرهنة 8.3: لتكن H,G زمرتين مـــا ولـــيكن $\varphi: L(G) \to L(H)$ A- تمـــاثلاً شبكياً. ولتكن G عبارة عن p- زمرة منتهية. عندئذٍ:

1) H تكون p-زمرة منتهية .

2) $ord(G) = ord(H)$.

البرهان:

لدينا G زمرة منتهية وعليه تكون H زمرة منتهية [6].

1) لنفرض مؤقتاً أن H ليست p- زمرة من ثمَّ هناك قاسم اولي لمرتبتها مثل r، إذْ $r \neq p$. مـــــن ثـــــمَّ يوجـــــد $y \in H$ بحيـــــث يكـــــون $o(y) = r$.
ومن جهة أخرى توجد M بحيث يكون $M \le G$ و $\varphi(M) =< y >$. ومنه بالاســتفادة من المبرهنة 3.2 ومن كون G هي p-زمرة يوجد $x \in G$ بحيث يكون $M =< x >_p$ ومن ثمَّ $\varphi(< x >_p) =< y >$ وكون φ عبـــارة عـــن A- تماثـــل شـــبكي يكـــون $Aut(< x >_p) \cong Aut(< y >_r)$ أي $p - 1 = r - 1$ ومن ثمَّ p=r مـــا ينـــاقض كون $r \neq p$. اذاً H هي p-زمرة

2) ليكن $ord(G) = p^n \& ord(H) = p^m$

لنفرض أن $n \ge m$

لنبرهن بالاستقراء الرياضي القوي (على العدد الطبيعي n) أن n=m:

من أجل n=1 وكون $n \ge m$ يكون n=m

نفرض صحة النص من أجل $k < n$ ولنبرهن صحته من أجل n ولنفرض مؤقتـــاً $n \neq m$ فيكـــون $m < n$ ومـــن ثـــمَّ $p^m \lneqq p^n$. كمـــا أن $p^m | p^n$ أي $p^m | ord(G)$ ومـــن ثـــمَّ ثمـــة $T \le G$ بحيـــث يكـــون p^m =ord(T).

وكون $p^m \lneqq p^n$ يكون $T \lneqq G$. ولـيكن $\varphi(T) = B \leq H$ فيـصبح لـدينا $\varphi_{|T}: L(T) \xrightarrow{\sim} L(B)$. وحيث إن $\varphi_{|T}$ هو A- تماثل شبكي (التمهيدية 3.3) وأن ord(T)= p^m إذْ $m < n$ فبحـسب الفـرض الاسـتقرائي نجـد أنّ

$$ord(T) = ord(B) = p^m$$

وعليه يكون $B \leq H; ord(B) = ord(H)$ ومن ثمّ $H = B$ ، ومـن ثـمَّ

$$\varphi(T) = B = H = \varphi(G)$$

ومن ثمَّ $G = T$ وهذا يناقض $T \lneqq G$. إذاً n=m

وبالأسلوب نفسه يُبرهن على أن n=m بافتراض $n \leq m$.

إذاً $ord(G) = ord(H)$

مبرهنة 9.3: لتكن G زمرة منتهية وليكن $\varphi: L(G) \to L(H)$ عبارة عن A-تماثل شبكي. عندئذ: $ord(G) = ord(H)$.

البرهان:

لدينا G زمرة منتهية من ثمَّ H زمرة منتهية [6].

إذا كـان $ord(G) = n = 1$ فمـن الواضـح أن $ord(G) = ord(H)$.

لنفـرض أن $n > 1$.عندئـذٍ $ord(G) = n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$ إذْ p_i ، $i = 1, \dots, r$، أعداد أولية مختلفة ، و $b_i \in \mathbb{N}^*$ ، $i = 1, \dots, r$. ومن ثمَّ توجد في G زمر جزئية سيلوفية من أجل كل p_i من المجموعة $\{p_1, \dots, p_r\}$. لـتكن G_i أية p_i- زمرة جزئية سيلوفية من G. عندئـذٍ $ord(G_i) = p_i^{b_i}$. ثـم بفـرض أنّ $\varphi(G_i) = H_i \leq H$ يكون $\varphi_{|G_i}: L(G_i) \xrightarrow{\sim} L(H_i)$ هـو A- تماثـل شـبكي (بحسب التمهيدية 3.3) وبحسب المبرهنـة 8.3 يكـون $ord(H_i) = ord(G_i) = p_i^{b_i}$

الآن لنفرض أن H_i ليست سيلوفية ومن ثم تكون H_i محتواة في زمرة سيلوفية ولـتكن B من ثمّ $ord(B) = p_i^{c_i}; c_i \gneqq b_i$ ومنه توجد في G زمرة جزئية مثـل A بحيـث يكون $\varphi(A) = B$. ومن جهة أخرى لدينا $\varphi_{|A}: L(A) \xrightarrow{\sim} L(B)$ هو A- تماثل شـبكي

فبحسب المبرهنة8.3 نجد $ord(A) = ord(B) = p_i^{c_i}; c_i \gneqq b_i$ وهــذا مرفــوض كون $p_i^{c_i}$ ليس قاسماً لمرتبة G اذاً H_iهي زمرة سيلوفية في الزمرة H. كما أنّه لا يوجد في H زمر سيلوفية أخرى (مختلفة عن $H_i; 1 \leq i \leq$ r) لأنه بفرض هناك زمــرة سيلوفية مثــل B_1 مختلفــة عــن H_i، r $\geq i \geq 1$، إذْ $ord(B_1) = p_{r+1}^{c_{r+1}}$، p_{r+1} عدد أولي يحقق $p_{r+1} \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$، (مثلاً) فعندئذٍ توجد في G زمرة جزئية مثل A_1 بحيث يكون $\varphi(A_1) = B_1$. ومنــه $\varphi_{|A_1}: L(A_1) \xrightarrow{\sim} L(B_1)$ يكون A- تماثلاً شبكياً (بحسب التمهيديــة3.3) ومنــه بحـسب المبرهنــة 8.3 نجــد $ord(A_1) = ord(B_1) = p_{r+1}^{c_{r+1}}$ وهذا مرفوض كون $p_{r+1}^{c_{r+1}}$ ليس قاسماً لمرتبة G $(p_{r+1} \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_r\} \Rightarrow p_{r+1}^{c_{r+1}} \nmid n)$

ذلك كلّه يستدعي أن يكون $ord(H) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_r^{b_r} = ord(G)$

تمهيدية 10.3:

لتكن B,G زمرتين بحيث $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبارة عن H- تماثــل شــبكي. وليكن f من $Aut(G)$ بحيث $g = R_G(f)$ إذْ R_G المشار إليــه فــي الترميــز* وليكن$x \in G$ عندئذٍ:

1. $f(< x >) =< x > \Leftrightarrow g(\varphi < x >) = \varphi(< x >)$.
2. $f_{|< x >}$هو المطابق على <x> إذا وفقط إذا كان $g_{|\varphi(<x>)}$ هــو المطــابق علــى $\varphi(< x >)$.
3. إذا كان $f_{|<x>}: < x > \to < x >$ عندئذٍ $f_{|<x>}$ مرتبته s إذا وفقط إذا كان $g_{|\varphi(<x>)}$ مرتبته s

البرهان:

1. بفرض $f(< x >) =< x >$ من ثــمّ تكــون $f_{|<x>}: < x > \to < x >$ وكــون $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبــــارة عــــن H- تماثـــــل شـــــبكي يكــــون

$g_{|\varphi(<x>)}: \varphi(<x>) \to \varphi(<x>)$ وهــــــذا مـــــا يؤكـــــد أن $g(\varphi<x>) = \varphi(<x>)$ وبالآلية نفسها نبرهن العكس .

2. لدينا $R_{<x>}: Aut(<x>) \rightleftarrows Aut(\varphi(<x>))$ هو تماثل زمري كمـا لـدينا $f_{|<x>}$ هــو المطــابق علــى $<x>$ ومــن ثــمَّ $f_{|<x>} = I_{Aut(<x>)}$ إذاً $R_{<x>}(f_{|<x>}) = I_{Aut(\varphi<x>)}$ وكون $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبارة عــنH- تماثــل شبكي يكون $R_{<x>}(f_{|<x>}) = g_{|\varphi(<x>)} = I_{Aut(\varphi<x>)}$ وهذا ما يبــيّن أن g هــو المطابق على $\varphi(<x>)$ وبالآلية نفسها نبرهن العكس.

3. لدينا $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبارة عن H- تماثل شبكي وعليه يكــون $R_{<x>}$ تماثــل زمري يحقق $R_{<x>}(f_{|<x>}) = g_{|\varphi(<x>)}$ (يحافظ على المرتبة) إذاً المطلوب قد تم.

مبرهنة11.3: لتكن B,G زمــرتين بحيــث $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبــارة عــن H- تماثل شبكي عندئذٍ إذا كانت G عبارة عن p – زمرة منتهية تبديلية إذْ p أولي فردي فإن B هي p – زمرة منتهية وتبديلية.

البرهان:

لدينا G زمرة منتهية من ثم B زمرة منتهية. إنّ φ يكون A- تماثلاً شبكياً وبحــسب المبرهنة 8.3 يكون ord(G)=ord(B)، من ثمَّ B عبارة عن p – زمرة و لنبــيّن أنهــا تبديلية: لدينا G زمرة تبديلية من ثمَّ التطبيــق $f: G \to G : x \mapsto x^{-1}$ هــو تماثــل زمري مرتبتــه 2 $(fof = I_G)$ وكمــا أنــه مــن أجــل كــل x مــن G يكــون $f_{|<x>}: <x> \to <x>$ تماثلاً زمرياً مرتبته 2. ونظراً إلى أن φ عبــارة عــن H- تماثل شبكي فبفرض أن $g = R_G(f)$ يكون $g_{|\varphi(<x>)}: \varphi(<x>) \to \varphi(<x>)$ تماثلاً زمرياً مرتبته 2 (التمهيدية 10.3). من جهة أخرى لدينا φ تماثل شبكي، من ثــمّ من أجل كل y من B يوجد x من G بحيث $<y> = \varphi(<x>)$ مما سبق نجــد من أجل كل y من B يكون $g_{|<y>}: <y> \to <y>: y \mapsto y^i$ تماثلاً زمرياً مرتبتــه 2.

لنحدد قيمة i بفرض أنَّ $o(y) = p^r$ (B عبارة عن p – زمرة) وكون $g_{|<y>}$ مرتبته 2 عليه يكون: $y^{i^2} = y \rightarrow p^r|i^2 - 1 = (i-1)(i+1)$

$$(i-1)(i+1) = dp^r$$

من ثم العدد p يقسم $(i+1)$أو$(i-1)$ أو يقسم كليهما لنبرهن أنه لايمكن أن يقسم كليهما

$$(i-1) = np\&(i+1) = mp\ ,m \gneqq n$$

$$i = 1 + np = mp - 1 \rightarrow (m-n)p = 2\ ,m \gneqq n$$

اذاً p|2 وهذا يناقض الفرض (p أولي فردي)

من ثم العدد p يقسم $(i+1)$أو$(i-1)$ ومن المساواة $(i-1)(i+1) = dp^r$ نجد أنَّ

$p^r|(i-1)or(i+1)$نستنتج:

$$if\ \ p^r|(i-1) \rightarrow y^{i-1} = e \rightarrow y^i = y \Leftrightarrow$$

مرتبة $g_{|<y>}$ تساوي 1 وليست 2 وهذا يناقض الفرض اذاً لا بدَّ أنّ يكون

$$p^r|(i+1) \rightarrow y^{i+1} = e \rightarrow y^i = y^{-1} \Rightarrow g_{|<y>}:<y> \rightarrow <y>: y \mapsto y^{-1}$$

ذلك من أجل كل y من B وبذلك يمكن تمديد $g_{|<y>}$ على B بالشكل $g = R_G(f): B \rightarrow B; y \mapsto y^{-1}$

وكون $g = R_G(f)$ تماثلاً زمرياً ذلك كفيل بأن تكون B تبديلية.

مبرهنة12.3: لتكن G زمرة تبديلية منتهية و p- زمرة إذْ p عدد أولي فردي وليكن $\varphi: L(G) \rightarrow L(B)$ عبارة عن H- تماثل شبكي عندئذٍ $G \cong B$

البرهان: بحسب المبرهنة 8.3 يكون ord(G)=ord(B) من ثمّ B هي p- زمرة وبحسب المبرهنة 11.3 تكون B زمرة تبديلية وبحسب المبرهنة 4.2 يكون المطلوب قد تم.

مبرهنة13.3: لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث ord(G) لا يقبل القسمة على 2^k إذْ $k \geq 3$. ولتكن B زمرة بحيث $\varphi: L(G) \rightarrow L(B)$ عبارة عن A-تماثل شبكي ويحقق أنه H- تماثل شبكي فوق كل زمرة جزئية سيلوفية من G عندئذٍ $G \cong B$

البرهان:

ما دامت G زمرة منتهية عندئـذٍ $ord(G) = n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$ إذْ p_i أعـداد أوليـة مختلفـة و $b_i \in \mathbb{N}^*$، $1 \le i \le r$ ، ومـن ثـمّ بحـسب المبرهنـة 9.3 $ord(B) = ord(G) = n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$ وكون G تبديلية فهي جداء مباشر لزمرها السيلوفية أي إنّ $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_r)\,; (G(p_i):1) = p_i^{b_i}$. وكذلك لدينا G زمرة تبديلية ومن ثمّ $G(p_i)$ ، $1 \le i \le r$ ،هـي زمـر ناظميـة وسـيلوفية مـن ثـمَّ $G(p_i)$ هـي الوحيـدة p_i- سـيلوفية. ومنـه، بفـرض : $\varphi(G(p_i)) = B_i \le B; 1 \le i \le r$ ، فإنّ $\varphi_{|G(p_i)}: L(G(p_i)) \to L(B_i)$ وإنّ $\varphi_{|G(p_i)}$ هو A- تماثل شبكي (بحسب التمهيدية3.3)، وبحسب المبرهنة8.3 يكون $(B_i:1) = p_i^{b_i}$ ومن ثمَّ تكون B_i سيلوفية في B. وما دامت $G(p_i)$هي الوحيـدة p_i-سيلوفية تكون B_i الوحيـدة p_i- سـيلوفية اذاً B_i ناظميـة مـن ثـمّ يكـون $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_r$. وايضاً لدينا $\varphi_{|G(p_i)}$ هو H- تماثل شبكي وهنا نميز الحالتين الآتيتين:

إذا كـان p_i عـدداً فرديـاً إذْ $1 \le i \le r$ يكـون بحـسب المبرهنـة 12.3 $G(p_i) \cong B_i$

وإذا كان هناك i من المجموعة $\{1, \dots, r\}$ بحيث p_i عدد زوجي فبحـسب الفـرض يكون $b_i = 1$ أو $b_i = 2$. فإذا كان $b_i = 1$ فإنّ $G(p_i)$ مرتبتها 2 فهي زمرة دوارة مرتبتها 2 وبحسب المبرهنة 8.3 يكون B_i مرتبتها 2 أيضاً مـن ثـمَّ B_i زمـرة دوارة مرتبتها 2 إذاً $G(p_i) \cong B_i$. وإذا كان $b_i = 2$ يكـون $G(p_i)$ مرتبتهـا 4 وبحسب المبرهنة 8.3 B_i مرتبتها 4 أيضاً إذاً B_i تبديلية وبحسب المبرهنة 4.2 يكـون $G(p_i) \cong B_i$ وبذلك نستخلص

$$G(p_i) \cong B_i \le B; 1 \le i \le r$$

وكون $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_r) \,\&\, B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_r$

يكون $G \cong B$

مبرهنة 14.3:

لتكن G زمرة تبديلية منتهية بحيث $ord(G) = n = p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2$، $p_1, p_2, \dots, p_r$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى ولتكن B زمرة بحيث $\varphi: L(G) \to L(B)$ عبارة عن A- تماثل شبكي عندئذٍ $G \cong B$

البرهان:

بحسب المبرهنة 9.3 $ord(B) = ord(G) = n = p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2$ وكون G تبديلية فهي جداء مباشر لزمرها السيلوفية أي إنَّ:

$$G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_r)\,; (G(p_i):1) = p_i^2$$

من ثمَّ $G(p_i)$ هي الوحيدة p_i-سيلوفية. ومنه، بفرض : $\varphi(G(p_i)) = B_i \le B; 1 \le i \le r$ فإنّ $\varphi_{|G(p_i)}: L(G(p_i)) \to L(B_i)$ وإن $\varphi_{|G(p_i)}$ هو A-تماثل شبكي (بحسب التمهيدية3.3) وبحسب المبرهنة 8.3 يكون $(B_i:1) = p_i^2$ ومن ثمَّ تكون B_i سيلوفية في B . ومادامت $G(p_i)$ هي الوحيدة p_i-سيلوفية تكون B_i الوحيدة p_i- سيلوفية اذاً B_i ناظمية من ثم يكون $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_r$.

من جهة أخرى B_i مرتبتها p_i^2 فتكون B_i تبديلية وبحسب المبرهنة 4.2 يكون $G(p_i) \cong B_i$ وبذلك نستخلص $G(p_i) \cong B_i \le B; 1 \le i \le r$

وكون $G = G(p_1) \times G(p_2) \times \dots \times G(p_r) \,\&\, B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_r$

يكون $G \cong B$

REFERENCES

[1]Baer, R., (1939). The significance of the system of subgroups for the structure of a group, Amer. Journ.Math., 71, 1 - 44.

[2]Breaz, S., Contiu, C., (2009). Groups which are determined by subgroup lattices, Acta Universitatis Apulensis, Special Issue, 449-463.

[3]Calugareanu, G., (2006). Abelian Groups Determined By Subgroup Lattices Of Direct Powers, Arch. Math. (Basel) 86,97-100.

[4] Hall, M. J., (1959). The Theory Of Groups, The Macmillan Company New York, 446 P.

[5]Lukacs, E., and Palfy, P., (1986). Modularity Of The Subgroup Lattice Of A Direct Square.Arch. Math. (Basel) 46, 18-19.

[6]Schmidt, R., (1994). Subgroup Lattices of Groups, de Gruyter Expositions in Mathematics 14, de Gruyter, Berlin , 584 p .

[7]Suzuki, M., (1951). On The Lattice Of Subgroups Of Finite Groups .Trans. Amer. Math. Soc. 70, 345-371.