محدودية الحلول في الفضاء $L^p[0, +\infty[$ لفئة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة

أسماء خالد نجيب[1] ومحمد مناف الحمد[2]

تاريخ الإيداع 2014/03/02
قبل للنشر في 2014/05/04

الملخص

عُرضت في هذا البحث مبرهنات تتضمن الشروط الّتي تكون من أجلها الحلول مع مشتقاتها من المرتبة الأولى والثانية محدودة في المجال $[0, +\infty[$ ، فضلاً عن الشروط الّتي من أجلها تنتمي الحلول إلى الفضاء $L^p[0, +\infty[$ وذلك من أجل المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة:

$$a(t)x''' + b(t)f(x')g(x'')x'' + h(x)x' + c(t,x) = p(t,x,x',x'') \quad (1)$$

استُخدمتْ مبرهنة القيمة الوسطى الثانية للتكامل (Bonnet formula)، والمتراجحات التكاملية. كما أُدرِجتْ بعض الأمثلة التوضيحية.

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية غير خطية، المرتبة الثالثة، محدودية الحلول، الفضاء $L^p[0, +\infty[$.

MSC 2010: 34C11

[1] طالبة ماجستير، [2] أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Boundedness of solutions in the $L^p[0, +\infty[$ space for some classes of third order non-linear differential equations

A. Kh. Najeep[1] and M. M. Al-Hamed[2]

Received 02/03/2014
Accepted 04/05/2014

ABSTRACT

Conditions of boundedness of solutions, and their first and second derivatives, in the $L^p[0, +\infty[$ space are demonstrated in this work for the following nonlinear third order differential equation :

$$a(t)x''' + b(t)f(x')g(x'')x'' + h(x)x' + c(t,x) = p(t,x,x',x'') \quad (1)$$

The results are obtained using the second integral mean value theorem (Bonnet formula) and the integral inequalities. Some suitable examples are also demonstrated .

Key Words: Nonlinear differential equation, Third order, Boundedness solutions, $L^p[0, +\infty[$ space.

MSC 2010 :34*C*11

[1]MCS., Student, [2] Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

1- المقدمة

عُرِضتْ في هذا البحث مبرهنات عن وجود حلول محدودة في الفـضاء $L^p[0, +\infty[$ لفئة من المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة من الشكل :

$$a(t)x''' + b(t)f(x')g(x'')x'' + h(x)x' + c(t,x) = p(t,x,x',x'') \quad (1)$$

$$a(t)x''' + b(t)f(x')g(x'')x'' + h(x)x' = p(t,x,x',x'') \quad (2)$$

إذْ: $a(t), b(t), f(x'), g(x''), h(x), c(t,x), p(t,x,x',x'')$ دوال حقيقية، و$f(x'), g(x''), h(x)$ مستمرة في $\mathbb{R}$، فضلاً عن ذلك فإنّ الدالتين $a(t), b(t)$ مستمرتان في المجال $]0, +\infty[$، في حين $c(t,x)$ مستمرة في $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ و$p(t,x,x',x'')$ مستمرة في $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$.

هدف البحث إلى التحري عن محدودية جميع حلول المعادلتين (1) و(2) مع مشتقاتها من المرتبة الأولى والثانية، فضلاً عن إعطاء شروط تضمن وجود هذه الحلول في الفضاء $L^p[0, +\infty[$.

إنّ مسألة محدودية الحلول في الفضاء $L^2[0, +\infty[$ وكذلك في الفـضاء $L^p[0, +\infty[$ لمعادلات تفاضلية غير خطية من مراتب مختلفة كانت مثار اهتمام العديد من الرياضيين عدة عقود في الأعمال [1، 2، 3، 7، 9، 10]. دُرستْ مثل هذه المسألة في الغالب من أجل معادلات تفاضلية غير خطية من المرتبة الثانية على سبيل المثال في [1، 7، 8، 11، 12، 13]، وهناك بضع نتائج فقط متعلقة بالمعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة [16] الّتي اقتصرت على الفضاء $L^2[0, +\infty[$. تعدُّ النتائج الّتي حصلنا عليها في هذا العمل استمراراً لأعمال [1، 7، 8، 10]، إذْ استخدمنا تقنية مشابهة لتلك المستخدمة في [1].

2- تعاريف ومبرهنات أساسية:

2-1- تعريف 1 [15. *P*175]:

نقول إنّ لجملة المعادلات التفاضلية:

$$x' = f(t,x) \;\; ; \;\; x(t_0) = \xi \; , \; x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

حلاً $\emptyset(t,t_0,\xi)$ محدوداً إذا وجد ثابت $0 < \beta$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$|\emptyset(t,t_0,\xi)| < \beta \qquad ; \forall t \geq t_0$$

2-2- تعريف:2

1). $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ تعني بأنّه من أجل كلّ $a \in \mathbb{R}$ يوجد $b \in \mathbb{R}$ بحيث إذا تحقق : $b < x$ فإنّ : $a < f(x)$.

2). $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ تعني بأنّه من أجل كلّ $a \in \mathbb{R}$ يوجد $b \in \mathbb{R}$ بحيث إذا تحقق : $b < x$ فإنّ : $a > f(x)$.

3). $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ تعني بأنّه من أجل كلّ $a \in \mathbb{R}$ يوجد $b \in \mathbb{R}$ بحيث إذا تحقق : $b > x$ فإنّ : $a < f(x)$.

4). $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ تعني بأنّه من أجل كلّ $a \in \mathbb{R}$ يوجد $b \in \mathbb{R}$ بحيث إذا تحقق: $b > x$ فإنّ : $a > f(x)$.

2-3- تعريف 3 [4 , p.143]

يرمز الفضاء $L^p[a,b]$ إلى مجموعة الدوال القابلة للقياس f بحيث يتحقق:

$$\int_{[a,b]} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

إذْ $1 \leq p < \infty$.

2-4- مبرهنة 1 [14 , p.10]: (مبرهنة Darboux)

لتكن: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة محدود، عندئذٍ تكون الدالة f قابلة للمكاملة ريمانياً على $[a,b]$ إذا وفقط إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$: $\delta > 0$ بحيث يتحقق من أجل كلّ تجزئة P للمجال $[a,b]$:

$$|P| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

إذْ:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad , \; m_i = inf\{f(x): \; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) \quad , \quad M_i=sup\{f(x):\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

2-5- تعريف 4 [18 , p.191]: (خاصة Darboux (خاصة القيمة الوسطية))

نقول إنّ الدالة : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تحقق خاصة Darboux، إذا وجد من أجل كلّ $\mu,\xi\in[a,b]$ عدد γ بحيث إذا كان y بين $f(\mu),f(\xi)$ فإنّ: $y=f(\gamma)$.

2-5-1- ملاحظة 1 [18 , p.191]:

كلّ دالة مستمرة تحقق خاصة Darboux .

2-6- مبرهنة 2 [19 , p.290]: (مبرهنة القيمة الوسطى الأولى للتكامل)

إذا كانت f,g دالتين قابلتين للمكاملة على $[a,b]$، بحيث يكون لــ g إشارة ثابتة، عندئذٍ يوجد

$\mu\in[m,M]$ (إذْ $M=\sup f(x) \ ,\ m=\inf f(x)$) بحيث يتحقق :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx \qquad (4)$$

2-7- مبرهنة 3[6، 19]: (مبرهنة القيمة الوسطى الثانية للتكامل)

بفرض f,g دالتان معرّفتان على $[a,b]$، إذْ g دالة قابلة للمكاملة، f دالة موجبة وتناقصية، عندئذٍ يوجد $\xi\in[a,b]$ بحيث يتحقق:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx \qquad (5)$$

الإثبات [19 , p.291]:

إذا كانت $f(a)=0$ عندئذٍ من : $0\le f(x)\le f(a)$ نجد أنّ $f(x)=0$ لذلك تكون العلاقة (5) قابلة للتطبيق من أجل أية $\xi\in[a,b]$.

لنفرض أنّ: $f(a)>0$ ، ولتكن: $\Delta=\{x_0,\dots,x_{n+1}\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$ إذْ : $x_0=a\ ,x_{n+1}=b$.

لنضع:

$$S=\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)g(x_k) \quad , \quad \acute{S}=\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\lambda_k$$

إذْ: $\lambda_k \in [m_k, M_k]$ باعتبار أنّ: m_k, M_k قيم الأطراف للدالة g في $[x_k, x_{k+1}]$. نفرض أنّ λ_k هي النقطة الوسطى تماماً للدالة g الّتي تظهر في مبرهنة القيمة الوسطى الأولى (العلاقة (4)) على $[x_k, x_{k+1}]$ عندئذٍ :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$$

لنضع:

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

عندئذٍ نلاحظ أنّ الدالة G مستمرة و تبلغ الحدود m_1, M_1 ، ومن ثمّ من المساواة :

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$$

نحصل على:

$$S' = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)[G(x_{k+1}) - G(x_k)] = -f(a)G(a) + G(x_1)[f(a) - f(x_1)]$$
$$+ \cdots + G(x_n)[f(x_{n-1}) - f(x_n)] + G(b)f(x_n)$$

نظراً إلى أنّ: $G(a) = 0$ و الدالة $f(x)$ تناقصية، نحصل على:

$$\grave{S} \geq m_1[f(a) - f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_n) + f(x_n)] = m_1 f(a)$$
$$\grave{S} \leq M_1[f(a) - f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_n) + f(x_n)] = M_1 f(a) \quad (6)$$

لنفرض أنّ:

$$A = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

عندئذٍ يجب برهان المتراجحة:

$$m_1 f(a) \leq A \leq M_1 f(a) \qquad (7)$$

في الواقع، إذا كان لدينا: $A > M_1 f(a)$، فعندئذٍ من تعريف تكامل ريمان وبتطبيق مبرهنة Darboux على الدالة g نجد:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 : \ \ \|\Delta\| < \delta \ \ \Rightarrow$$
$$D = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k)(M_k - m_k) < \varepsilon / f(a)$$ و
$$|A - S| < \varepsilon$$

من جهة أخرى:

$$|S-\grave{S}| \leq \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)|g(x_k)-\lambda_k| \leq Df(a) <$$
$$< f(a)\varepsilon/f(a) = \varepsilon$$

ومنه نستنتج:

$$|A-S| < \varepsilon \quad , \quad |S-\grave{S}| < \varepsilon$$

ولكون: $A > M_1 f(a)$، فعندئذٍ يكون:

$$-2\varepsilon < \grave{S} - A < 2\varepsilon$$

وبشكل أدق: $\grave{S} \to A > M_1 f(a)$ ومن أجل جميع قيم n الكبيرة بقدرٍ كافٍ يكون: $\grave{S} > M_1 f(a)$ مما يؤدي إلى تناقض مع (6).

لنفرض أنّ: $\alpha = A/f(a)$ ، واستناداً إلى (7) يكون لدينا :

$$m_1 \leq \alpha \leq M_1$$

ونظراً إلى أنّ G مستمرة، عندئذٍ بحسب خاصة القيمة الوسطية (خاصة Darboux) يوجد $\xi \in [a,b]$ إذْ يكون : $G(\xi) = \alpha$، ومن هنا نتنج صحة المساواة:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx$$

وهو المطلوب.

2-8- مبرهنة 4 [5 , *p*.17]:

إذا كانت D مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^{n+1}$، $f: D \to \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة و$\emptyset$(t) حلّ لـــ (3) على مجال ما، عندئذٍ يوجد تمديد لـــ $\emptyset(t)$ إلى مجال أعظمي لوجوده. أكثر من ذلك، إذا كان $]a,b[$ المجال الأعظمي لوجود الحلّ $\emptyset(t)$ لـــ(3)، فـــإنّ $(t,\emptyset(t))$ تسعى إلى حدود المجموعة D (Boundary of D) عندما $t \leftarrow a$ و $t \leftarrow b$.

2-8-1- ملاحظة 2[1] [18، 17 *p.* ,5]:

يمكن أن تستخدم المبرهنة 4 في أمثلة محددة للتحقق من أنّ الحلّ يكون معرفاً في مدة زمنية كبيرة.

على سبيل المثال، إذا كان المطلوب إثبات أنّ الحلّ معرّف على المجال $[t_0, +\infty[$ فعندئذٍ يكفي إجراء الآتي:

إذا كانت الدالة $f(t,x)$ مستمرة بالنسبة إلى t في المجال $]t_1, +\infty[$، $t_1 < t_0$، $|x| < \alpha$ واستطعنا إثبات أنّ الحلّ $x(t)$ يحقق المتراجحة: $|x(t)| \le \beta < \alpha$ وذلك من أجل قيم $t_0 \le t$ جميعها إذْ يكون $x(t)$ معرّفاً دوماً، فعندئذٍ من الضروري أن يكون $x(t)$ معرّفاً على $[t_0, +\infty[$.

لنختار: $t_0 \le T$ و $\beta < \gamma < \alpha$، ولنعرف المستطيل D_1 بالشكل: $D_1 = \{(t,x): t_0 \le t \le T, |x| \le \gamma\}$، فعندئذٍ تكون $f(t,x)$ محدودة في D_1، ونظراً إلى أنّ مبرهنة الامتداد تقتضي بأنّ الحلّ $x(t)$ يمتد إلى حدود D_1 و $\beta < \gamma$، فمن الضروري أنّ يصل الحلّ $x(t)$ إلى تلك الحدود بوصول صورة المستطيل المعرّف بـ $t = T$، لذلك يكون $x(t)$ موجوداً من أجل قيم $t_0 \le t \le T$ جميعها، ونظراً إلى أنّ T اختيارية يكون قد تم المطلوب .

3- النتائج الرئيسة

3-1- مبرهنة 5:

ليكن:

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(x)dx \ge 0, F(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)dy \ge 0, G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(z)}dz \ge 0$$

ولنفرض تحقق الشروط الستة الآتية:

a. $\forall x \in \mathbb{R} : H(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty$.

b. $a(t)$،$b(t)$ دالتان متناقصتان ، $\forall t \in [0, +\infty[$.

c. $0 < b(t) \le b_0$ ، $0 < a(t) \le a_0$، $\forall t \in [0, +\infty[$، إذْ a_0،b_0 ثابتان موجبان.

d. $0 < g(z) \le g_0$ ، $\forall z \in \mathbb{R}$ ، إذْ g_0 ثابت موجب.

e. $c(t,x) \ge 0$ ، $\forall (t,x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

f. توجد دالة غير سالبة $L^1[0,+\infty[\ni e(t)$ بحيث يتحقق:

$$|p(t,x,y,z)|\le e(t)g(z)$$

. $\forall z\in\mathbb{R}$ ، $\forall t\in[0,+\infty[$ ، $\forall(t,x,y,z)\in[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$

عندئذٍ تكون جميع حلول المعادلة (1) محدودة في المجال $[0,+\infty[$.

الإثبات:

باستخدام مبرهنة وجود الحلّ التقليدية [17]، ينتج أنّ للمعادلة **(1)** حلاً وحيداً على الأقل في المجال $[0,T[$ إذْ $0<\mathrm{T}$ ، وذلك من أجل أية شروط ابتدائية:

$$x(0)=x_0\ ,\ x'(0)=y_0\ ,\ x''(0)=z_0$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بالمقدار $1/g(x'')$ ومكاملة طرفي المعادلة الناتجة بالنسبة إلى t من 0 إلى t نحصل على:

$$\int_0^t a(\tau)x'''(\tau)/g(x''(\tau))d\tau+\int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))x''(\tau)d\tau+$$
$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)/g\big(x''(\tau)\big)d\tau+\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)/g\big(x''(\tau)\big)d\tau=$$
$$\int_0^t p\big(\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau)\big)/g\big(x''(\tau)\big)d\tau$$
$$\le\int_0^t|p(\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))|/g(x''(\tau))d\tau$$

و بمعاينة الشرط (f) نجد أنّ:

$$\int_0^t a(\tau)x'''(\tau)/g(x''(\tau))d\tau+\int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))x''(\tau)d\tau+$$
$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)/g(x''(\tau))d\tau+\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)/g(x''(\tau))d\tau\le k_1 \qquad (8)$$

إذْ: k_1 ثابت مستقل عن t، ولكون $L^1[0,+\infty[\ni e(t)$ وهي دالة غير سالبة فإنّ:

$$\int_0^t e(\tau)d\tau\le\int_0^\infty e(\tau)d\tau=k_1$$

وبالاستفادة من الشرطين $(e),(d)$ نحصل من جهة على:

$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)/g(x''(\tau))d\tau\ge\frac{1}{g_0}\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)\,d\tau$$
$$=\ \frac{1}{g_0}[H\big(x(t)\big)-H(x(0))]$$

$$\int_0^t c\big(\tau, x(\tau)\big)/g(x''(\tau))d\tau \geq \frac{1}{g_0}\int_0^t c\big(\tau, x(\tau)\big)\,d\tau \;> 0$$

ومن جهة ثانية واستناداً إلى المتراجحة (8) نجد:

$$\int_0^t a(\tau)x'''(\tau)/g(x''(\tau))d\tau + \int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))x''(\tau)d\tau + \frac{1}{g_0}H\big(x(t)\big) + \frac{1}{g_0}\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau \;\leq k_2 \quad ;\, k_2 = k_1 + \frac{1}{g_0}H\big(x(0)\big) \qquad (9)$$

وبتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى الثانية للتكامل على الحدين الأول والثاني مــن الطــرف الأيسر للمتراجحة (9)، آخذين بالحسبان الشرطين $(c), (b)$:

$$a(0)\int_0^\delta x'''(\tau)/g(x''(\tau))d\tau + b(0)\int_0^\mu f(x'(\tau))x''(\tau)d\tau + \frac{1}{g_0}H\big(x(t)\big) + \frac{1}{g_0}\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau \;\leq k_2$$

يكون:

$$H\big(x(t)\big) + \int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau \;\leq k_3 \qquad (10)$$

إذْ:

$$k_3 = g_0\{k_2 - a(0)[G\big(x''(\delta)\big) - G\big(x''(0)\big)] - b(0)[F\big(x'(\mu)\big) - F\big(x'(0)\big)]\}$$

إذْ: δ, μ عددان من المجال $[0,t]$، $F(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)dy \geq 0$.

ونظراً إلى أنَّ:

$$\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau \geq 0$$ (حسب الشرط (e))

فإنّ المتراجحة (10) تأخذ الشكل:

$$H\big(x(t)\big) \leq k_3$$

ونظراً إلى أنّ k_3 ثابت مستقل عن t فإنّ $H\big(x(t)\big)$ تكون محدودة، الأمر الّــذي يعني بأنّ $x(t)$ محدودة لأنّه لو لم تكن $x(t)$ محـــدودة لكانــت $H\big(x(t)\big)$ غيــر محدودة، وهذا يناقض الشرط (a) من الفرض .

أي إنّ $x(t)$ محدود في المجال $[0,T[$، واستناداً إلى الفقرة (2-8-1) نجد بشكل مشابه الوجود الشامل للحلّ $x(t)$ على المجال $[0,+\infty[$، أي إنّ $x(t)$ محدود في المجال $[0,+\infty[$، وهذا يعني بأنّه يوجد ثابت موجب $c_1 \in \mathbb{R}$ بحيث يتحقق:

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad : \quad |x(t)| \le c_1 \qquad (11)$$

3-2-مبرهنة 6:

لنفرض بأنّ شروط المبرهنة 5 محققة، أكثر من ذلك لنفرض تحقق الشرطين الآتيين:

g. $\forall y,z \in \mathbb{R}: \quad F(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} \infty \;, G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$.

h. توجد دالة غير سالبة $L^1[0,+\infty[\ni e_1(t)$ إذْ يتحقق:

$$e(t) \le e_1(t)a(t)b(t) \qquad ,\forall t \in [0,+\infty[$$

عندئذٍ فإنّ مشتقات الحلول للمعادلة (1) من المرتبة الأولى والثانية تكون محدودة في المجال $[0,+\infty[$.

الإثبات:

بضرب طرفي المعادلة (1) بالمقدار $1/(a(t)b(t)g(x''))$ ومكاملة طرفي المعادلة الناتجة بالنسبة إلى t من 0 إلى t نحصل على:

$$\int_0^t x'''(\tau)/\big(b(\tau)g(x''(\tau))\big)\,d\tau + \int_0^t f(x'(\tau))x''(\tau)/a(\tau)\,d\tau + \int_0^t h(x(\tau))x'(\tau)/\big(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau))\big)d\tau +$$

$$\int_0^t c(\tau,x(\tau))/(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau =$$

$$\int_0^t p(\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))/(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau$$

$$\le \int_0^t |p(\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))|/(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau$$

$$\le \int_0^t e(\tau)/(a(\tau)b(\tau))d\tau \le \int_0^t e_1(\tau)\,d\tau \le \int_0^\infty e_1(\tau)\,d\tau = k_4$$

وذلك بالاستفادة من الشرطين (f) و(h) .

أصبح لدينا:

$$\int_0^t x'''(\tau)/(b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau + \int_0^t f(x'(\tau))x''(\tau)/a(\tau)\, d\tau +$$

$$\int_0^t h(x(\tau))x'(\tau)/\big(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau))\big)d\tau +$$

$$\int_0^t c(\tau, x(\tau))/(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau \le k_4 \tag{12}$$

و بمعاينة الشروط $(e), (d), (c)$ نجد أنّ :

$$\int_0^t x'''(\tau)/\big(b(\tau)g(x''(\tau))\big)d\tau \ge \frac{1}{\mathrm{b}_0}\int_0^t x'''(\tau)/g(x''(\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{\mathrm{b}_0}[G(x''(t)) - G(x''(0))] \ge 0$$

$$\int_0^t f(x'(\tau))x''(\tau)/a(\tau)\, d\tau \ge \frac{1}{a_0}\int_0^t f(x'(\tau))x''(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{a_0}[F(x'(t)) - F(x'(0)) \ge 0$$

$$\int_0^t h(x(\tau))x'(\tau)/\big(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau))\big)d\tau \ge \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}\int_0^t h(x(\tau))x'(\tau)/d\tau$$

$$= \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}[H(x(t)) - H(x(0))] \ge 0$$

$$\int_0^t c(\tau, x(\tau))/(a(\tau)b(\tau)g(x''(\tau)))d\tau \ge \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}\int_0^t c(\tau, x(\tau))\, d\tau \ge 0$$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية واستناداً إلى المتراجحة (12) نجد:

$$\frac{1}{\mathrm{b}_0}G(x''(t)) + \frac{1}{a_0}F(x'(t)) + \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}H(x(t)) + \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}\int_0^t c(\tau, x(\tau))\, d\tau \le k_5$$

إذ:

$$k_5 = k_4 + \frac{1}{\mathrm{b}_0}G(x''(0)) + \frac{1}{a_0}F(x'(0)) + \frac{1}{a_0\mathrm{b}_0 g_0}H(x(0))$$

ومنه يمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{b_0}G\big(x''(t)\big)+\frac{1}{a_0}F\big(x'(t)\big)\leq k_5 \qquad (13)$$

وذلك لكون:

$$\frac{1}{a_0 b_0 g_0}H\big(x(t)\big)\geq 0\ ,\quad \frac{1}{a_0 b_0 g_0}\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau\geq 0$$

ونظراً إلى أنَّ k_5 ثابت مستقل عن t فإنّ $G\big(x''(t)\big)$ ،$F\big(x'(t)\big)$ محدودتان، الأمر الّذي يعني بأنّ $x''(t)$ ،$x'(t)$ محدودتان لأنّه لو لم يتحقق ذلك لكانت $G\big(x''(t)\big)$ ،$F\big(x'(t)\big)$ غير محدودتين، وهذا يناقض الشرط (g) من الفرض.

أي إنّ $x''(t)$ ،$x'(t)$ محدودتان في المجال $[0,T[$، وبمناقشة مشابهة للفقرة (2-8-1) نجد الوجود الشامل للحلّ $x(t)$ على المجال $[0,+\infty[$ ومنه فإنّ $x''(t)$، $x'(t)$ محدودتان على كامل المجال $[0,+\infty[$، وهذا يعني بأنّه يوجد ثابتان موجبان $c_2,c_3\in\mathbb{R}$ بحيث يتحقق:

$$\forall t\in[0,+\infty[\ :\ \left|x'(t)\right|\leq c_2 \qquad (14)$$

$$\forall t\in[0,+\infty[\ :\left|x''(t)\right|\leq c_3 \qquad (15)$$

3-3- مبرهنة7:

لنفرض بأنّ شروط المبرهنة 5 محققة، فضلاًعن تحقق الشرط الآتي:

i. $c(t,x)\geq M|x|^p$، إذْ $c(t,x)>0$، $1\leq p<\infty$، M ثابت موجب.

عندئذٍ تكون جميع حلول المعادلة (1) تنتمي للفضاء $L^p[0,+\infty[$.

الإثبات:

نظراً إلى أنَّ: $c(t,x)\geq M|x|^p$ فإنّ :

$$\int_0^t c\big(\tau,x(\tau)\big)\,d\tau\geq M\int_0^t|x(\tau)|^p\,d\tau$$

وبالأخذ بالحسبان العلاقة (10) نجد:

$$M\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau \le k_3$$

وذلك لكون: $H(x(t)) \ge 0$.

ومنه يكون:

$$\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau \le \frac{k_3}{M} = k_6 < \infty$$

ومنه فإنّ: $x(t) \in L^p[0,T[$.

كذلك بمناقشة مشابهة، ونظراً إلى أنَّ الحلول محدودة نجد أنّه يمكننا تمديـد الحلـول على كامل المجال $[0,+\infty[$، أي إنّ:

$$x(t) \in L^p[0,+\infty[$$

3-4- مثال تطبيقي 1:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة الآتية :

$$e^{-t}x'''(t) + e^{-t}\left(e^{x'(t)} + x'^2(t)\right)e^{-x''^2(t)}x''(t) + \left(x^2(t) + 2x^4(t)\right)x'(t) + \left(3x^4(t) + 3t\right) = \frac{e^{-4t}e^{-x''^2(t)}}{\left(x^2(t)+3x'^2(t)+2\right)} \tag{16}$$

نلاحظ أنّ:

$$H(x) = \int_{x_0}^{x}(x^2 + 2x^4)dx \ge 0 \ , \ F(y) = \int_{y_0}^{y}(e^y + y^2)dy \ge 0$$

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} e^{z^2}\,dz \ge 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$، $H(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty$.

$a(t) \equiv b(t) = e^{-t}$ وهـي دالـة متناقـصة ومحـدودة: $0 < e^{-t} \le 1$، $\forall t \in [0,+\infty[$.

و $0 < g(z) = e^{-z^2} \le 1$، $\forall z \in \mathbb{R}$.

$c(t,x) = 3x^4(t) + 3t \ge 0$، $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

كما أنّ:

$$|p(t,x,y,z)| = \frac{e^{-4t}e^{-z^2}}{(x^2+3y^2+2)} \le e^{-4t}e^{-z^2} = e(t)g(z)$$

إذْ: $e(t) = e^{-4t}$ وهي دالة غير سالبة ، كما أنّها قابلة للمكاملة .

ومنه فإنّ شروط المبرهنة 5 محققة، وأي حلّ $x(t)$ للمعادلة (16) يكون محدوداً في المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا أيضاً: $F(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} \infty$ ، $G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$.

و $e(t) = e^{-4t} \le e^{-3t} = e^{-2t}e^{-t}e^{-t} = e_1(t)a(t)b(t)$

إذْ: $e_1(t) = e^{-2t}$ دالة قابلة للمكاملة وهي دالة غير سالبة.

أي إنّ شروط المبرهنة 6 محققة، الأمر الّذي يعني بأنّ مشتقات الحلول من المرتبة الأولى والثانية للمعادلة (16) تكون محدودة.

و بملاحظة أنّ:

$$c(t,x) = 3x^4 + 3t \ge 3|x|^4$$

نجد أنّ حلول المعادلة (16) تنتمي للفضاء $L^4[0,+\infty[$، بحسب المبرهنة 7.

3-5- ملاحظة 3:

تبقى شروط المبرهنتين 5 و6 محققة من أجل المعادلة (2)، في حين لاتتحقق شروط المبرهنة 7، ولذلك سنضع شروطاً إضافية على أمثال المعادلة (2) لتنتمي حلولها إلى الفضاء $L^p[0,+\infty[$.

3-6- مبرهنة8:

لنفرض أنّ شروط المبرهنتين 5 و6 محققة، أكثر من ذلك نفرض تحقق الشرطين الآتيين:

j. $h(x)x \ge -h_0|x|^p$، $\forall x \in \mathbb{R}$، حيث: $1 \le p < \infty$، h_0 ثابت موجب.

k. $f(y) \ge f_0$ ،$\forall y \in \mathbb{R}$، f_0 ثابت موجب .

فإنّ جميع حلول المعادلة (2) تنتمي للفضاء $L^p[0,+\infty[$.

الإثبات:

بضرب طرفي المعادلة (2) بالمقدار $x(t)/a(t)$ ومكاملة طرفي المعادلة الناتجة بالنسبة إلى t من 0 إلى t نحصل على:

$$\int_0^t x'''(\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))g\big(x''(\tau)\big)x''(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau +$$

$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)x(\tau)/a(\tau)d\tau = \int_0^t p\big(\tau, x(\tau), x'(\tau), x''(\tau)\big)x(\tau)/a(\tau)d\tau$$
$$\leq \int_0^t |p(\tau, x(\tau), x'(\tau), x''(\tau))||x(\tau)|/a(\tau)d\tau$$
$$\leq c_1 \int_0^t e(\tau)g\big(x''(\tau)\big)/a(\tau)d\tau \leq c_1 g_0 \int_0^t e_1(\tau)b(\tau)\,d\tau$$
$$\leq c_1 g_0 b_0 \int_0^t e_1(\tau)\,d\tau$$
$$\leq c_1 g_0 b_0 \int_0^\infty e_1(\tau)\,d\tau = k_7$$

وذلك بالاستفادة من الشروط (c)،(d)، (f)، (h) ومن (7).

أصبح لدينا:

$$\int_0^t x'''(\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))g\big(x''(\tau)\big)x''(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau +$$
$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)x(\tau)/a(\tau)d\tau$$
$$\leq\ k_7 \qquad (17)$$

وبمكاملة الحدّ الأول من الطرف الأيسر للمتراجحة (17) بالتجزئة نجد:

$$x''(t)x(t) - \frac{x'^2(t)}{2} + \int_0^t b(\tau)f(x'(\tau))g\big(x''(\tau)\big)x''(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau +$$
$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)x(\tau)/a(\tau)d\tau$$
$$\leq\ k_8 \quad ;\ k_8 = k_7 + x''(0)x(0) - \frac{x'^2(0)}{2}$$

وبملاحظة أنّ:

$$\int_0^t b(\tau)f\big(x'(\tau)\big)g\big(x''(\tau)\big)x''(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau \geq \frac{f_0(-c_3)(-c_1)}{a_0}\int_0^t b(\tau)g\big(x''(\tau)\big)d\tau = \frac{f_0c_3c_1}{a_0}\int_0^t b(\tau)g\big(x''(\tau)\big)d\tau > 0$$

بالاستفادة من الشروط (c)،(k) ومن (11)، **(15)**.

عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$x''(t)x(t) - \frac{x'^2(t)}{2} + \int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau \leq k_8 \qquad (18)$$

ومن الشرط (j) نجد:

$$\int_0^t h\big(x(\tau)\big)x'(\tau)x(\tau)/a(\tau)\,d\tau \geq \frac{(-c_2)(-h_0)}{a_0}\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau = \frac{c_2h_0}{a_0}\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau$$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية واستناداً إلى المتراجحة (18) نجد:

$$\frac{c_2h_0}{a_0}\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau \leq k_8 - x''(t)x(t) + \frac{x'^2(t)}{2}$$
$$\leq \left|k_8 - x''(t)x(t) + \frac{x'^2(t)}{2}\right|$$
$$\leq |k_8| + |x''(t)||x(t)| + \left|\frac{x'^2(t)}{2}\right|$$
$$\leq |k_8| + c_3c_1 + \frac{c_1^2}{2} = k_9$$

عندئذٍ يكون:

$$\int_0^t |x(\tau)|^p\,d\tau \leq k_{10} < \infty$$

إذْ: $k_{10} = \frac{a_0k_9}{c_2h_0}$ وهو ثابت مستقل عن t .

ومنه فإنّ: $x(t) \in L^p[0,T[$.

كذلك بمناقشة مشابهة، ونظراً إلى أنَّ الحلول محدودة نجد أنّه يمكننا تمديد الحلول على كامل المجال $[0,+\infty[$، أي إنّ :

$$x(t) \in L^p[0,+\infty[$$

3-7- مثال تطبيقي 2:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثالثة الآتية:

$$e^{-t}x'''(t) + e^{-t}\frac{x'^2(t)+1}{x''^2(t)+1}x''(t) + 2x^2(t)x'(t) = \frac{t^2e^{-5t}}{\sqrt{(1+x^2(t))(x''^2(t)+1)}} \quad (19)$$

نلاحظ أنّ:

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} 2x^2 dx \geq 0 \ , \ F(y) = \int_{y_0}^{y}(y^2+1)dy \geq 0$$

$$G(z) = \int_{z_0}^{z}(z^2+1)dz \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}، \ H(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty \ .$$

$a(t) \equiv b(t) = e^{-t}$ وهي دالة متناقصة ومحـــدودة : $0 < e^{-t} \leq 1$ ، $\forall t \in [0,+\infty[$.

و $\forall z \in \mathbb{R}، \ 0 < g(z) = \frac{1}{z^2+1} \leq 1$.

كما أنّ:

$$|p(t,x,y,z)| = \frac{t^2e^{-5t}}{\sqrt{(1+x^2)(z^2+1)}} \leq \frac{t^2e^{-5t}}{(z^2+1)} = e(t)g(z)$$

إذْ: $e(t) = t^2e^{-5t}$ وهي دالة غير سالبة، كما أنّها قابلة للمكاملة.

ومنه فإنّ شروط المبرهنة 5 محققة، وأي حلّ $x(t)$ للمعادلة (19) يكون محدوداً في المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا أيضاً: $F(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} \infty$ ، $G(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$.

و $e(t) = t^2e^{-5t} \leq t^2e^{-2t}e^{-t}e^{-t} = e_1(t)a(t)b(t)$

إذْ: $e_1(t) = t^2e^{-2t}$ دالة قابلة للمكاملة وهي دالة غير سالبة.

أي إنّ شروط المبرهنة 6 محققة، الأمر الّذي يعني بأنّ مشتقات الحلول من المرتبة الأولى والثانية للمعادلة (19) تكون محدودة.

وبملاحظة أنّ:

$$h(x)x = 2x^3 \geq -2|x|^3 \ , \ \ f(y) = y^2 + 1 \geq 1$$

نجد أنّ حلول المعادلة (19) تنتمي للفضاء $L^3[0,+\infty[$، بحسب المبرهنة 8.

REFERENCES

[1] Athanassov, Z. S, 1987. Boundedness Criteria for Solutions of Certain Second Order Nonlinear Differential Equations, J. Math. Anal. Appl, 123, 461-479.

[2] Andres, J, and Vlcek, V, 1991. Square integrable processes in nonlinear oscillators I, Acta Upo, Vol 92, Phys. XXX , 91-104.

[3] Andres, J , and Vlcek, V, 1992. Square integrable processes in nonlinear oscillators II , Acta Upo, Vol 106, Phys. XXXI, 153-158 .

[4] Brunt, B.V and Carter, M, 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral, Springer, 230p.

[5] Hale, J. K, 1980. Ordinary differential equations, Robert E. Krieger publishing company, Inc., 361p.

[6] Hildebrandt, T. H, 1963. Introduction to the theory of integration, Academic press, 385p .

[7] Kroopnick, A, 1999. Bounded and L^2-solutions to a second order nonlinear differential equation with a square integrable forcing term, Internat. J. Math. & Math. Sci. , Vol. 22, No. 3, 569–571.

[8] Kroopnick, A 1995. General boundedness theorems to some second order nonlinear differential equation with integrable forcing term, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 18, No. 4, 823–824.

[9] Kroopnick, A, 1987. On the boundedness and oscillation of solutions to $(m(t)\, x) + a\,(t)\, b\,(x) = 0$, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 10, No. 1,47-50.

[10] Kroopnick, A, 1981. Note on bounded L^p-solutions of a generalized lienard equation, Pacific journal of mathematics, Vol. 94, No. 1, 171-175.

[11] Kroopnick, A, 1972. Properties of solutions of differential equations of the form $y'' + a(t)\, b(y) = 0$, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 34, No. 1, 319-320.

[12] Kroopnick, A , 1973. L^2-solutions to $y'' + c(t)\, y' + a(t)\, b(y) = 0$, Proceedings of the American Mathematical Society , Vol. 39, No. 1 , 217-218.

[13] Kroopnick, A, 2010. Bounded solutions to $x'' + q(t)\, b(x)=f(t)$, Internat. J. Math. Ed. sci.Tech., 41, 829-836 .

[14] Levermore, D, 2006. Riemann integrals and integrability, Math410, Advanced calculus, 45p .

[15] Miller, R. K, 1982. Ordinary differential equations, Academic press, 351p.

[16] Ogundare, B. S, Ayanjinmi, J. A and Adesina, O. A, 2006. Bounded and L^2-solutions of certain third-order non-linear differential equation with square integrable forcing term, Kragujevac J. Math. 29 151-156.

[17] O`Regan, D. 1997. Existence theory for nonlinear ordinary differential equations, Springer Science+Business Media Dordrecht, ISBN 978-94-017-1517-1, 196p.

[18] Sahoo, P. K and Riedel, T, 1998. Mean value theorems and functional equations, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 245p .

[19] Sandor, J, 2005. Selected chapters of geometry analysis and number theory, 460p .