# مؤشر اللاتوقف لمتتاليات في فضاء هيلبرت

غادة علي جوجة[1] و شحادة الأسدي[2]

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ [1]جامعة دمشق ـ [2] جامعة حلب ـ سورية

تاريـخ الإيداع 2004/02/23
قبل للنشـر في 2005/04/07

## الملخص

نتناول في هذا العمل دراسة مؤشر اللاتوقف (Nonstationary index) لمتتاليات في فضاء هيلبرت. اعتماداً على مصفوفة فروق الارتبـاط لمتتاليـة متجهيـة، ومـن أجـل المتتاليـات الممثلـة تجـذيرياً (Evolutionary Representable) توصلنا إلى الشرط اللازم والكـافي لمحدوديـة مؤشـر اللاتوقـف. واستناداً إلى تعريف المتتاليات شبه الهانكلية (Quasi-Hankel Sequences)، تم الربط بين تلك المتتاليات والمتتاليات الممثلة تجذيرياً.

**الكلمات المفتاحية:** مؤشر اللاتوقف، مصفوفة فروق الارتباط، المتتالية شبه الهانكلية، المتتالية التوقفية، المتتالية الممثلة تجذيرياً.

# Non Stationary Index of Sequences in Hilbert Space

**Gh. A. Jouja[1] and Sh. Al-Asadi[2]**

**Department of Mathematics-Faculty of Sciences-[1] Damascus Univ.,- [2]Aleppo Univ.,**

**Received 23/02/2004**
**Accepted 07/04/2005**

## ABSTRACT

**In this paper, we study the non stationary index $\rho$ of sequences in Hilbert space *H*.**

**Applying the correlation differences matrix of evolutionary representable sequences we achieved to the necessary and sufficient condition which's for the non stationary index is bounded. And according to the Quasi-Hankel sequences definition we join between these sequences and evolutionary once.**

**Key Words:** Nonstationary index, Correlation differences matrix, Quasi-Hankel sequences, Stationary sequence, Evolutionary representable sequence.

## المقـدمـة

لتكن $\vec{X}(n) = (x_1(n), \dots, x_k(n))$ متتالية متجهية في فضاء هيلبـرت $H$. أي أن $x_j(n) \in H$ من أجل $0 \le n$ ، $j = 1,2,\dots,k$ .

في العمل [1] عرفت مصفوفة الارتبـاط $\hat{K}_{\alpha\beta}(n,m)$ (Correlation matrix) ذات العناصر $K_{\alpha\beta}(n,m) = < x_\alpha(n) , x_\beta(m) >$ حيث $<.,.>_H$ الجداء الـداخلي فـي الفضاء $H$ .

كما عرفت مصفوفة تابع لمتغيرين منفصلين $\hat{W}_{\alpha\beta}(n,m)$ وهي مـصفوفة فـروق الارتباط (Correlation differences matrix) للمتتالية المتجهية $\vec{X}(n)$ بالعلاقة:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(n,m) = (K_{\alpha\beta}(n+1,m) - K_{\alpha\beta}(n,m+1))$$

والتي تميز انحراف تلك المتتالية عن المتتالية الهانكلية [2].

من المعلوم [3] أنه إذا كانت $K_{\alpha\beta}(n,m) = K_{\alpha\beta}(n-m)$ أي أن $\vec{X}(n)$ متتاليـة توقفية (Stationary sequence)، فإن:

$$x_j(n) = U^n \; x_{0j} \quad ; \quad x_{0j} \in H \, , n \in Z$$

و $U$ مؤثر وحدي (Unitary operator) في $H$ .

**تعريف (1)**

نقول عن المتتالية المتجهية $\vec{X}(n) = (x_1(n), \dots, x_k(n))$ في الفـضاء $H$ ، إنهـا قابلة للتمثيل تجذيرياً (Evolutionary representable)، إذا كان:

$$x_j(n) = A_j^n \; x_{0j} \quad ; \quad x_{0j} \in H$$

و $A_j$ مؤثرات خطية محدودة في $H$ .

من أجل المتتاليات الممثلة تجذيرياً يكون لـ $W_{\alpha\beta}(n,m)$ الشكل [1]:

$$W_{\alpha\beta}(n,m) = i < \frac{A_\alpha - A_\beta^*}{i} \, x_\alpha(n), x_\beta(m) > \quad ; \quad (\alpha, \beta = \overline{1\,, k})$$

**تعريف (2)**

نـسمي المتتاليـة المتجهيـة $\vec{X}(n) = (x_1(n), \dots , x_k(n))$ شـبه هانكليـة (Quasi-Hankel) إذا كان:

$$x_j(n) = A_j^n \ x_{0j}$$

$$\dim \overline{\frac{A_\alpha - A_\beta^*}{i} H} < \infty \quad ; \quad (\alpha , \beta = \overline{1 , k})$$

وفقاً لذلك إذا كان $A = A_j$ $(\dim \overline{2I\ mAH} < \infty)$ فإننا نسمي مثل تلك المتتاليـة بمتتالية بسيطة شبه هانكلية.

**تعريف (3)**

نسمي الرتبة الأعظمية للصيغ التربيعية

$$i \sum_{n,m} < \hat{W}(n,m)\ \vec{a}(n)\ ,\ \vec{a}(m) >_{H_2}$$

حيـث $\vec{a}(n) \in H_2$ مـن أجـل كـل عـدد $1 \le m,n$ بمؤشـر اللاتوقـف (Nonstationary index) ونرمز له بـ $\rho$ .

في حالة المتتاليـة المتجهيـة التوقفيـة $(A^* = A^{-1})$ و $A_j = A$ يكـون $\rho = 0$ ([1],[3]) وذلك لأن $W_{\alpha\beta}(n,m) = 0$ .

لـتكن $\vec{X}(n) = (x_1(n), x_2(n))$ و $< x_1(n) , x_2(m) > = 0$ مـن أجـل $Z \ni m , 0 \le n$ و $K_{22}(n,m) = < x_2(n) , x_2(m) > = K_{22}(n-m)$ كمـا أن $x_1(n) = A_1^n x_{01}$ حيث

$$\frac{A_1 - A_1^*}{i} = < ., g_1 > g_1 \quad ; \quad g_1\ ,\ x_{01} \in H$$

عندئذٍ بسهولة نجد أن $\rho = 1$ .

وأمـــا إذا كـــان $x_2(n) = A_2^n x_{02}$ و $\frac{A_2 - A_2^*}{i} = <.,e_1> e_1$ فإنـــه مـــن أجل $<x_1(n)\,,x_2(m)> = 0$ وذلك مهما يكن $0 \le n, m$، يكـون مؤشـر اللاتوقـف $\rho = 2$ .

## تحديد مؤشر اللاتوقف

**مبرهنة (حول مؤشر اللاتوقف)**

الشرط اللازم والكافي كـي يكـون مؤشـر اللاتوقـف لمتتاليـة ممثلـة تجـزيرياً $\vec{X}(n) = (x_1(n)\,,x_2(n))$ [(*)] محدوداً هـو أن تكـون جميـع الفـضاءات الجزئيـة $G_{\alpha\beta} = \overline{\frac{A_\alpha - A_\beta^*}{i} H}$ منتهية البعد.

**البرهان:**

لبرهان الشرط اللازم نلاحظ أن

$$K_{\alpha\beta}(n,m) = <x_\alpha(n)\,,x_\beta(m)> = <A_\alpha^n\ x_{0\alpha}\ ,A_\beta^m\ x_{0\beta}>$$

عندئذٍ من أجل

$$W_{\alpha\beta}(n,m) = K_{\alpha\beta}(n+1,m) - K_{\alpha\beta}(n,m+1)$$

يكون لدينا

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(n,m) &= <A_\alpha^{n+1}\ x_{0\alpha}\ ,A_\beta^m\ x_{0\beta}> - <A_\alpha^n\ x_{0\alpha}\ ,A_\beta^{m+1}\ x_{0\beta}> \\ &= <A_\alpha\ x_\alpha(n)\,,x_\beta(m)> - <x_\alpha(n)\,,A_\beta\ x_\beta(m)> \\ &= i < \frac{A_\alpha - A_\beta^*}{i}\ x_\alpha(n)\,,x_\beta(m)> \end{aligned}$$

---

(*) بغية تبسيط العلاقات اخترنا المتتالية المتجهية من الشكل المذكور دون أن يؤثر ذلك في عمومية المسألة.

ومن ثم فإن:

$$\hat{W}(n,m) = i \begin{pmatrix} < \frac{A_1 - A_1^*}{i} x_1(n) , x_1(m) > & < \frac{A_1 - A_2^*}{i} x_1(n) , x_2(m) > \\ < \frac{A_2 - A_1^*}{i} x_2(n) , x_1(m) > & < \frac{A_2 - A_2^*}{i} x_2(n) , x_2(m) > \end{pmatrix}$$

ليكن الآن

$$rank \sum_{n,m} < \hat{W}(n,m) \vec{a}(n) , \vec{a}(m) > = \rho < \infty$$

ونظراً لأن:

$$\sum_{n,m} < \hat{W}(n,m) \vec{a}(n) , \vec{a}(m) > =$$

$$= i \left\langle \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Im}\,A_1 & \frac{A_1 - A_2^*}{i} \\ \frac{A_2 - A_1^*}{i} & 2\,\mathrm{Im}\,A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_n a^1(n)\, x_1(n) \\ \sum_n a^2(n)\, x_2(n) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \sum_m a^1(m)\, x_1(m) \\ \sum_m a^2(m)\, x_2(m) \end{pmatrix} \right\rangle$$

فإن رتبة مصفوفة البلوك (Block-matrix)

$$D = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Im}\,A_1 & \frac{A_1 - A_2^*}{i} \\ \frac{A_2 - A_1^*}{i} & 2\,\mathrm{Im}\,A_2 \end{pmatrix}$$

أيضاً تكون محدودة، وهذا يعني أن مرتبة المعين الأصغري الأعظم والمختلف عـن الصفر محدودة. ولهذا فإن مراتب جميع المعينات الأصغرية المختلفة عن الصفر لا تزيد على $\rho$ .

ومن بين تلك المعينات الأصغرية المعينات المقابلة للمصفوفات $\alpha , \beta = 1, 2$ ; $\frac{1}{i}(A_\alpha - A_\beta^*)$ .

من ذلك نستنتج أن جميع الفضاءات الجزئية $G_{\alpha\beta} = \overline{\frac{A_\alpha - A_\beta^*}{i} H}$ تكون منتهية البعد.

لبرهان كفاية الشرط، نفرض أن جميع الفضاءات الجزئية $G_{\alpha\beta}$ منتهية البعد، ولنضع:

$$\dim G_{11} = \dim \overline{(2\operatorname{Im} A_1)\, H} = r_1$$

$$\dim G_{22} = \dim \overline{(2\operatorname{Im} A_2)\, H} = r_3$$

$$\dim G_{12} = \dim \overline{(A_1 - A_2^*)\, H} = \dim \overline{(A_2 - A_1^*)\, H} = \dim G_{21} = r_2$$

ولتكن $\{e_k\}_1^{r_1}$ ، $\{f_\lambda\}_1^{r_2}$ ، $\{h_\nu\}_1^{r_3}$ قواعد متعامدة منظمة في الفضاءات الجزئية المقابلة. نظراً لأن:

$$< 2\operatorname{Im} A_1\; x_1(n) , x_1(m) > = \sum_{k=1}^{r_1} < 2\operatorname{Im} A_1\; x_1(n) , e_k > < e_k \;, x_1(m) >$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1} < x_1(n) , 2\operatorname{Im} A_1\; e_k > < e_k \;, x_1(m) >$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1} \sum_{P=1}^{r_1} < x_1(n) , b_{Pk}\; e_P > < e_k \;, x_1(m) >$$

حيث:

$$b_{Pk} = < 2\operatorname{Im} A_1\; e_k \;, e_P >$$

$$\frac{1}{i} < (A_1 - A_2^*)\, x_1(n)\, x_2(m) >= \frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2} < (A_1 - A_2^*)\, x_1(n)\,,\ f_\lambda >< f_\lambda\,,\, x_2(m) >$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2} < x_1(n)\,,(A_1^* - A_2)\, f_\lambda >< f_\lambda\,,\, x_2(m) >$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2}\sum_{P=1}^{r_2} < x_1(n)\,, C_{P\lambda}\ f_P >< f_\lambda\,,\, x_2(m) >$$

مع العلم أن

$$C_{P\lambda} =< (A_1^* - A_2)\, f_\lambda\,,\ f_P >$$

وكما أن:

$$\frac{1}{i} < (A_2 - A_1^*)\, x_2(n)\,,\, x_1(m) >= \frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2} < (A_2 - A_1^*)\, x_2(n)\,,\ f_\lambda >< f_\lambda\,,\, x_1(m) >$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2} < (A_1^* - A_2)\, x_2(n)\,,\ f_\lambda >< f_\lambda\,,\, x_1(m) >$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2} < x_2(n)\,,(A_1 - A_2^*)\ f_\lambda >< f_\lambda\,,\, x_1(m) >$$

$$= -\frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2}\sum_{P=1}^{r_2} < x_2(n)\,, d_{P\lambda}\ f_P >< f_\lambda\,,\, x_1(m) >$$

حيث إن:

$$d_{P\lambda} =< (A_1 - A_2^*)\ f_\lambda\,,\ f_P >= \overline{C}_{\lambda P}$$

$$< 2\operatorname{Im} A_2\ x_2(n)\ ,\ x_2(m) >= \sum_{\nu=1}^{r_3} < 2\operatorname{Im} A_2\ x_2(n)\ ,\ h_\nu >< h_\nu\ ,\ x_2(m) >$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r_3} < x_2(n)\ ,\ 2\operatorname{Im} A_2\ h_\nu >< h_\nu\ ,\ x_2(m) >$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r_3} \sum_{P=1}^{r_3} < x_2(n)\ ,\ q_{P\nu}\ h_\nu >< h_\nu\ ,\ x_2(m) >$$

حيث:

$$q_{P\nu} =< 2\operatorname{Im} A_2\ h_\nu\ ,\ h_P >$$

فإن:

$$\hat{W}(n,m) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{r_1}\sum_{P=1}^{r_1} \bar{b}_{Pk}\ \varphi_{1P}(n)\ \bar{\varphi}_{1k}(m) & \frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2}\sum_{P=1}^{r_2} \bar{C}_{P\lambda}\ \psi_{1P}(n)\ \bar{\theta}_{2\lambda}(m) \\ -\frac{1}{i}\sum_{\lambda=1}^{r_2}\sum_{P=1}^{r_2} \bar{d}_{P\lambda}\ \theta_{2P}(n)\ \bar{\psi}_{1\lambda}(m) & \sum_{\nu=1}^{r_3}\sum_{P=1}^{r_3} q_{P\nu}\ \phi_{2P}(n)\ \bar{\phi}_{2\nu}(m) \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\varphi_{1P}(n) =< x_1(n)\ ,\ e_P >$$

$$\psi_{1P}(n) =< x_1(n)\ ,\ f_P >$$

$$\theta_{2P}(n) =< x_2(n)\ ,\ f_P >$$

$$\phi_{2P}(n) =< x_2(n)\ ,\ h_P >$$

من هذا يتـضح أن الـصيغة التربيعيـة $\sum_{n,m}^{N} < \hat{W}(n,m)\ \vec{a}(n)\ \vec{a}(m) >$ سـتكون تركيبات منتهية لجداءات متعلقة بمتغير منفصل واحد، ومن ثم فإن رتبتها محـدودة مـن أجل أي عدد طبيعي $N$ . بهذا ينتهي البرهان.

اعتماداً على المبرهنة السابقة وعلى تعريف المتتالية شبه الهانكلية يمكـن أن نخلـص إلى المبرهنة الآتية:

**مبرهنة:**

الشرط اللازم والكافي لتكون المتتالية غير التوقفية والممثلة تجذيرياً شبه هانكلية هـ ـ و أن تكون جميع الفضاءات الجزئية $G_{\alpha\beta} = \overline{\dfrac{A_\alpha - A_\beta^*}{i} H}$ منتهية البعد.

لنستعرض بعض الأمثلة في حساب مؤشر اللاتوقف $\rho$ لمتتاليات في فضاء هيلبرت.

**مثال (1):**

لتكن لدينا المتتالية $\vec{X}(n) = (\alpha_0^n \; x_{01} \; , \; A^n \; x_{02})$

حيث:

$$A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$$

معرف بالعلاقة:

$$Af = \int_0^1 \varphi(x) \, \overline{\varphi}(y) \; f(y) \, dy$$

أما $\alpha_0$ فهو عدد حقيقي.

عندئذ بحساب $A^n$ نجد أن:

$$A^n f = \|\varphi\|^{2n-2} \; Af = \|\varphi\|^{2n-2} \; \varphi(x) \int_0^1 \overline{\varphi}(y) \; f(y) \, dy$$

وبحساب مصفوفة الارتباط $\hat{K}(n,m)$ نجد

$$\hat{K}(n,m) = \begin{pmatrix} K_{11}(n+m) & \psi(n) \, \overline{\theta(m)} \\ \\ \overline{\psi(m)} \, \theta(n) & K_{22}(n+m) \end{pmatrix}$$

حيث

$$\theta(n) = \|\varphi\|^{2n-2} < A \, x_{02} \, , x_{01} > \; , \; \psi(n) = \alpha_0^n$$

ولإيجاد مؤشر اللاتوقف $\rho$ نحسب مصفوفة فـروق الارتبـاط $\hat{W}(n,m)$ . فنجـد بسهولة أن:

$$\hat{W}(n,m) = i \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\psi}(n)\,\overline{\tilde{\theta}(m)} \\ \overline{\tilde{\psi}(m)}\,\theta(n) & 0 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\tilde{\theta}(n) = -\frac{1}{i}(\alpha_0 - \|\varphi\|^2)\,\|\varphi\|^{2n-2} < A\,x_{02}\,,\,x_{01} >$$

$$\tilde{\psi}(n) = \alpha_0^n$$

ومن ثم فإن:

$$i\sum_{n,m} < \hat{W}(n,m)\,\vec{a}(n)\,,\,\vec{a}(m) >_{H_2} =$$

$$= i\sum_{n,m} \tilde{\psi}(n)\,\overline{\tilde{\theta}(m)}\,\overset{(2)}{a}(n)\,\overline{\overset{(1)}{a}(m)} + \overline{\tilde{\psi}(n)}\,\tilde{\theta}(m)\,\overset{(1)}{a}(n)\,\overline{\overset{(2)}{a}(m)}$$

وباستخدام بعض التحويلات الخطية نجد أن

$$\rho = 4$$

**مثال (2):**

لتكن لدينا المتتالية $\vec{X}(n) = (\alpha_0^n\; x_{01}\,,\,A^n\; x_{02})$

حيث

$$A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$$

معرف بالعلاقة:

$$Af = i\int_0^1 \varphi(x)\,\varphi(y)\,f(y)\,dy$$

أما $\alpha_0$ فهو عدد حقيقي.

باتباع الخطوات الواردة في المثال الأول نفسها وبعد حساب $A^n$ :

$$A^n = (i)^n \|\varphi\|^{2n-2} Af$$

يمكن حساب مصفوفة فروق الارتباط $\hat{W}(n,m)$ فنجد:

$$\hat{W}(n,m) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\varphi}(n)\overline{\tilde{\psi}(m)} \\ -\overline{\tilde{\varphi}(m)}\,\tilde{\psi}(n) & \tilde{\theta}(n)\,\overline{\tilde{\psi}(m)} \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\tilde{\varphi}(n) = \alpha^n(\alpha + i\,\|\varphi\|^2) < x_{01}\ ,\ A\,x_{02} >$$

$$\tilde{\psi}(n) = (-i)^n\,\|\varphi\|^{2n-2}$$

$$\tilde{\theta}(n) = i^{n+1}\,\|\varphi\|^{2n}\,\|A\,x_{02}\|^2$$

ومنه:

$$i\sum_{n,m} < \hat{W}(n,m)\,\vec{a}(n)\,\vec{a}(m) >_{H_2} =$$

$$= i\sum_{n,m} \tilde{\varphi}(n)\,\overline{\tilde{\psi}(m)}\,\overset{(2)}{a}(n)\,\overline{\overset{(1)}{a}(m)} - \overline{\tilde{\varphi}(m)}\,\tilde{\psi}(n)\,\overset{(1)}{a}(n)\,\overline{\overset{(2)}{a}(m)} + \tilde{\theta}(n)\,\overline{\tilde{\psi}(m)}\,\overset{(2)}{a}(n)\,\overline{\overset{(2)}{a}(m)}$$

وباستخدام بعض التحويلات الخطية نجد:

$$\rho = 6$$

## REFERENCES المراجـع

1- الأسدي شحادة - جوجة غادة، حول صف متتاليات في فضاء هيلبرت. مجلة بحوث جامعة حلـب – سلسلة العلوم الأساسية، العدد رقم 38 لعام 2003 .

2- Berezansky, Yu. M., Expansions in Eigenfunctions of selfadjoint operators (Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1965. English translation, Amer Math. Soc. Transl., Vol. 17, Providence, 1965.

3- Rozanov, Ju. A., Stationary random processes. Fizmatyiz, Moscow, 1963, English transl., Holden-Day, San Francisco, Calif., 1967. MR 28. No. 2580; 35, No. 4985.