تمديدات الزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$

دانا صالح و عبد اللطيف هنانو

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سورية

تاريخ الإيداع 2010/07/27

قبل للنشر في 2010/11/29

الملخّص

تبحث هذه الورقة العلميـة تمديـدات الزمـرة $C(n)=C_{p^\infty} \oplus C_{p^\infty} \oplus .....\oplus C_{p^\infty}$ حيـث $C_{p^\infty}=\langle a_0,a_1,.....;pa_0=0,\ pa_1=a_0,....\rangle$ بمساعدة الزمرة $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$ (حيـث p عـدد أولي) و تَم التوصل إلى المبرهنة الآتية:

إن جميع التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$ الموافقة للـ Z_p- تمثيلات غير الخزولة للزمرة A :

هي الزمر:

1) $G(T,0,0,0)$ ، $G(T,0,0,a_0)$

2) $G(U,0,0,0)$ ، $G(U,0,\beta,0)$ ، $G(U,0,0,c_0)$ ، $G(U,0,\beta,c_0)$

إذ:

$$\beta=(\ a_0\ ,2a_0\ ,...\ ,\ (p-1)\,a_0\ \in C(p-1)\quad ;\quad c_0=(a_0\ ,0,...,0)\ \in C(p-1)$$

التصنيف الرياضي العالمي: 20K35

الكلمات المفتاحية: تمديدات، تمديدات غير متماثلة، تمثيلات غير خزولة.

Extensions of the Group $C(n)$ by Means of the Direct Product of Two Cyclic Groups of Order p $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$

D. Saleh and A. Hanono
Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

Received 27/07/2010
Accepted 29/11/2010

ABSTRACT

This paper reports the investigation of extensions of the group $C(n)=C_{p^\infty}\oplus C_{p^\infty}\oplus.....\oplus C_{p^\infty}$, where $C_{p^\infty}=\langle a_0,a_1,.....;pa_0=0,pa_1=a_0,....\rangle$ by means of the direct product of two cyclic group $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$ of order p, where p is a prime number.

It has been concluded from this work that all non isomorphic extensions of the group $C(n)$ by means of the group $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$, that correspond to Z_p-irreducible representations of the group $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$, are:

1) $G(T,0,0,0)$ ، $G(T,0,0,a_0)$

2) $G(U,0,0,0)$ ، $G(U,0,\beta,0)$ ، $G(U,0,0,c_0)$ ، $G(U,0,\beta,c_0)$

Where

$\beta=(a_0, 2a_0, \dots, (p-1)a_0 \in C(p-1)$; $c_0=(a_0,0,\dots,0)\in C(p-1)$

The international mathematical code: 20K35

Key words: Extensions, Non isomorphic extensions, Irreducible representations.

تعريف:

نعرف تمديد زمرة H بمساعدة زمرة K بأنـه كـل زمـرة G بحيـث يكـون $G/H \cong K$. [1],[2]

لتكن $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$ الجداء المباشر لزمرتين دوارتين من المرتبة p ، (p عدد أولـي)، و لـتكن $C(n)$ زمـرة المجمـوع المباشـر لـ ـ n زمـرة مـن الـشكل:

$$C_{p^\infty}=\langle a_0,a_1,.....;\ pa_0=0,\ pa_1=a_0,....\rangle$$

أي إن:

$$C(n)=C_{p^\infty}\oplus C_{p^\infty}\oplus.....\oplus C_{p^\infty}$$

إن كل تمديد للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A هو زمرة G تعرف بتشاكل

$$R: A\to Aut(C(n))$$
$$a\mapsto R(a)$$

وبنظام $m_{a,b}$ (حيث $a,b\in A$) [1] لذلك سنرمز لكل تمديد للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A بالرمز $G(C(n),A,R,m_{a,b})$ أو اختصاراً بالرمز $G(R,m_{a,b})$.

لتكن الزمرة G تمديداً للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A عندئـذٍ: $G/C(n)\cong A$ ومن ثم إذا كان a,b ممثلي صفي التكافؤ المقابلين للعنصرين $\bar{a},\bar{b}$ فإن العناصر:

$$a^i b^j\ ;\ 0\le i,j\le p-1$$

تكون ممثلي صفوف التكافؤ للعناصر المتبقية، و من ثم أياً كان $c\in C(n)$ فإن:

$$\left(a^i b^j\right)^{-1} c\ \left(a^i b^j\right)=R\left(a^i b^j\right)c$$

و أن:

$$a^p=c_a\ ,\ \ b^p=c_b\ ;\ \ ba=abc_0$$

حيث c_0,c_a,c_b عناصر مناسبة من الزمرة $C(n)$ تحقق العلاقات:

$$R(a)\,c_a=c_a\qquad ;\qquad R(b)\,c_b=c_b$$

كما أن :

$$b^p a=a^p b\left(R\left(b^{p-1}\right)+R\left(b^{p-2}\right)+...+R(b)+I\right)h_0;$$ (حيث h_0 عنصر مناسب من $C(n)$)

و ينتج من ذلك أن:

$$R(a)\, c_b = c_b\left(I + R(b) + \ldots + R\left(b^{p-1}\right)\right) c_0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$R(b)\, c_a = c_a\left(I + R(a) + \ldots + R\left(a^{p-1}\right)\right) c_0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

و لما كان: $a^p b^p = b^p a^p$ فإن:

$$(\, I + R(a) + R(b) + R(ab) + \ldots + R(a^{p-1} b^{p-1})\, c_0 = 0 \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

وبـذلك كـل تمديـد للزمـرة $C(n)$ بمـساعدة الزمـرة A يتعـين بتـشاكل $R : A \to Aut(C(n))$ و بالعناصر $c_0, c_a, c_b \in C(n)$ المعرفة بالعلاقات الـسابقة. ولذلك سنرمز لكل تمديد للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمـرة A بـالرمز $G(R, c_a, c_b, c_0)$ [4] إذ:

$$c_a \in A(R(a)) / B(R(a)) \quad ، \quad c_b \in A(R(b)) / B(R(b))$$

وأن:

$$A(R(a)) = \left\{ x \in C(n)\ ;\ R(a)(x) = x \right\}$$

$$B(R(a)) = \left\{ \left(R\left(a^{p-1}\right) + R\left(a^{p-2}\right) + \ldots. + I\right)(x)\ ;\ x \in C(n) \right\}$$

ولما كانت الزمرة $C(n)$ ما هي إلا $Z_p -$ مودول حر قاعدته مؤلفة مـن n عنـصراً، فإن التشاكل $R : A \to Aut\ (C(n))$ مـا هـو إلا $Z_p -$ تمثيـل (Representation) للزمرة A وكل قاعدة $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ للمودول $C(n)$ تعين تمثـيلاً مـصفوفاتياً $R : A \to GL(n, Z_p)$ للزمرة A.

لنوجد جميع التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A الموافقة للـ $Z_p -$ تمثيلات غير الخزولة للزمرة A، وهذه التمثيلات هي فقط التمثيلان: [3]

$$T : A \to GL(1\,,\, Z_p) \qquad\qquad U\ :\ A \longrightarrow\ GL\ (\,p - 1\,,\ Z_p\,)$$

$$a \mapsto 1 \quad , \quad b \mapsto 1 \qquad\qquad a\ \mapsto I_{p-1} \quad , \quad b \mapsto \varepsilon$$

إذ:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&0&...&0&-1\\1&0&...&0&-1\\0&1&...&0&-1\\..&..&..&..&..\\0&0&...&1&-1\end{pmatrix}$$

I - التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A الموافقة للتمثيل T:

إن:

$$A(T(a))=\left\{x\in C(1)\ ;\ T(a)(x)=x\right\}$$
$$=\left\{x\in C(1)\ ;\ 1.x=x\right\}$$
$$=C(1)=C_{p^{\infty}}$$
$$B(T(a))=\left\{\left(T\left(a^{p-1}\right)+T\left(a^{p-2}\right)+....+I\right)(x)\ ;\ x\in C(1)\right\}$$
$$=\left\{px\ ;\ x\in C(1)\right\}$$
$$=C(1)=C_{p^{\infty}}$$

و بالمثل نجد أن: $A(T(b))=C_{p^{\infty}}$ ، $B(T(b))=C_{p^{\infty}}$

و من ثم

$$A(T(a))/B(T(a))=\langle 0\rangle\quad ;\quad A(T(b))/B(T(b))=\langle 0\rangle$$

و ينتج من ذلك أن: $c_a=c_b=0$

و من العلاقة (1) ينتج أن $c_0^p=0$ ، وحلول هذه المعادلة في الزمرة $C_{p^{\infty}}=\langle a_0,a_1,.....;pa_0=0,pa_1=a_0,....\rangle$ هي العناصر :

$$\lambda\, a_0\quad ;\quad \lambda=0,1,...,p-1$$

وبذلك عدد التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمـساعدة الزمـرة A الموافقـة للتمثيل T لا يتجاوز p تمديداً و هذه التمديدات تنتمي إلى المجموعة:

$$\{G(T,0,0,\lambda\, a_0)\ ;\ \lambda=0,1,\ldots\ldots,p-1\}$$

و لوجود الأوتومورفيزم :

$$c \to \lambda\, c \qquad ; \quad \lambda = 1,2,\ldots,p-1$$

في الزمرة $C(1)$ نجد أن هناك فقط تمديدين غير متماثلين للزمـرة $C(1)$ بمـساعدة الزمرة A وهما:

$$G(T,0,0,0) \quad , \quad G(T,0,0,a_0).$$

التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة A الموافقة للتمثيل U:

$$A(U(a)) = \left\{ x \in C(p-1)\ ;\ U_a(x) = x \right\}$$

$$= \left\{ x \in C(p-1)\ ;\ I.x = x \right\}$$

$$= C(p-1)$$

$$B(U(a)) = \left\{ \left(U\left(a^{p-1}\right) + U\left(a^{p-2}\right) + \ldots. + I\right)(x)\ ;\ x \in C(p-1) \right\}$$

$$= \left\{ px\ ;\ x \in C(p-1) \right\}$$

$$= C(p-1)$$

إذاً: $A(U(a)) = B(U(a)) = C(p-1)$ و بالتالي: $A(U(a))/B(U(a)) = \langle 0\rangle$.

و ينتج من ذلك أن $c_a = 0$.

و بالمثل نجد أن:

$$A(U(b)) = \left\{ \lambda\left(a_0, 2a_0, \ldots, (p-1)a_0 \quad ;\ \lambda = 0,1,\ldots,p-1 \right) \right\}$$

$$B\left(U(b)\right) = <0>$$

و لما كان $c_b \in A(U(b))/B(U(b))$ فإن:

$$c_b = \lambda\beta \quad ; \quad \beta = (a_0, 2a_0, ..., (p-1)a_0) \in C(p-1)$$

ومن العلاقة (3) ينتج أن $h_0^p = 0$ ، وبملاحظة أن مجموعة العناصر ذات المرتبة p في الزمرة $C(p-1)$ تشكل زمرة جزئية:

$$H = \left\{ (x_1 , x_2 , ..., x_{p-1}) \; ; \; x_i^p = 1 \right\} \subseteq C(p-1)$$

فإن العنصر h_0 يتعلق بطريقة اختيار ممثل صف التكافؤ $a.C(p-1)$. فإذا أخذنا $a_1 = a.x \; ; \; x \in H$ ممثلاً جديداً بدلاً من الممثل a و حيث إن $U(a) = I_{p-1}$ فإن العنصرين a و x مترافقان في الزمرة G و أن $p(ax) = 0$ و بذلك لا تتغير طبيعة العنصرين c_a و c_b أي:

$$c_a = 0 \; ; \; c_b = \lambda\beta \; ; \; \lambda = 0,1,...p-1 \; ; \; \beta = (a_0, 2a_0, ..., (p-1)a_0)$$

ولنوجد c_0 : لدينا

$$\begin{aligned} ba_1 &= b.(ax) = abc_0x = abxc_0 \\ &= ax.x^{-1}bxc_0 \\ &= a_1x^{-1}bxc_0 = a_1U(b)(x^{-1})xc_0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن العنصر c_0 يجب اختياره من زمرة القسمة H/H_0 حيث:

$$H_0 = \left\{ xU(b)(x^{-1}) \, , \; x \in H \right\}$$

إن:

$$H/H_0 = \left\{ \mu(a_0, 0, 0, ..., 0) \quad ; \quad \mu = 0,1,..., p-1 \right\}$$

وبذلك يكون عدد التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(p-1)$ بمساعدة الزمرة A والموافقة للتمثيل U لا تتجاوز p^2 تمديداً وهذه التمديدات تنتمي إلى مجموعة:

$$\{ G(U, 0, \lambda\beta, \mu c_0) \; ; \; \lambda = 0, 1, ..., p-1 \quad ; \quad \mu = 0, 1, ..., p-1 \}$$

إذ:

$$\beta = (a_0, 2a_0, ..., (p-1)a_0 \in C(p-1) \quad ; \quad c_0 = (a_0, 0, ..., 0) \in C(p-1)$$

ولوجود الأتومورفيزم

$$c \to \lambda c \quad ; \quad \lambda = 1,2,\dots, p-1$$

في الزمرة $C(p-1)$ تكون التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(p-1)$ بمساعدة الزمرة A والموافقة للتمثيل U هي من الزمر $G(U,0,\beta,\lambda c_0)$ و لوجود الأتومورفيزم.

$$a \to \mu a \quad , b \to \mu b \quad ; \quad \mu = 1,2,\dots, p-1$$

في الزمرة A نجد أن التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمـرة A والموافقة للتمثيل U هي الزمر:

$$G(U,0,0,0) \ , \ G(U,0,\beta,0) \ , \ G(U,0,0,c_0) \ , \ G(U,0,\beta,c_0)$$

إذ:

$$\beta = (a_0, 2a_0, \dots, (p-1)a_0 \in C(p-1) \quad ; \quad c_0 = (a_0, 0, \dots, 0) \in C(p-1)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

إن جميع التمديدات غير المتماثلة للزمرة $C(n)$ بمساعدة الزمرة $A=\langle \bar{a}\rangle_p \times \langle \bar{b}\rangle_p$ والموافقة لـ $Z_p -$تمثيلات غير الخزولة للزمرة A :

هي الزمر:

1) $G(T,0,0,0) \quad , \quad G(T,0,0,a_0)$

2) $G(U,0,0,0) \ , \ G(U,0,\beta,0) \ , \ G(U,0,0,c_0) \ , \ G(U,0,\beta,c_0)$

إذ:

$$\beta = (a_0, 2a_0, \dots, (p-1)a_0 \in C(p-1) \quad ; \quad c_0 = (a_0, 0, \dots, 0) \in C(p-1)$$

REFERENCES المراجع

1. Kurosh, A. T. (1953). The theory of groups. Chelsea publishing company. NEW YORK .
2. Hall, M. (1962). The Theory of groups. Reprinted by American Mathematical Society
3. Drobotenko, V; Hanano, A. (1995). Representations of cyclic group of order p^2 . Тези доп . проф. – вик. Складу УжДу. Ужгород.
4. Hanano,A. (2007). Extensions of the group $C(n)$ by means of cyclic group of order p . Damascus University journal vol.23-No.1.