المجموعات المرقـمة بشكل عودي

محمد جمال اللبن

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريـخ الإيداع 2006/03/27

قبل للنشـر في 2006/06/27

الملخص

من المعروف أن نظرية الحوسبة (computation theory) قد نشأت قبل وجود الحاسـوب، وهنـاك بعض الأفكار التي صيغت فيما بعد (نتيجة للحاجة التطبيقية)، من قبل مصممين ومهندسين بمـا يتوافـق والبعد العملي لها دون التركيز على الناحية النظرية للصياغة والتقديم، بالإضافة إلـى أن هنـاك أفكـاراً موجودة ضمن نظرية الحوسبة يمكن تقديمها بشكل واضح وبآلية تتوافق مع التطورات التي توصل إليها علم الحاسوب.

قـدمت فـي بحثـي هـذا تعريفـاً للمجموعـات المرقمـة (القابلـة للعـد) بـشكل عـودي (Recursively enumerable set) وذلك بالاستفادة من فكرة مساقط المجموعات العودية الأوليـة ممـا يسمح بتوضيح الأفكار دون الاعتماد على مبدأ الأولويات لتعريف التكرار، ويسمح بتقديم الأفكار بصياغة جديدة وبرهان مبرهنات كانت قد تم تجاوزها عند ذكرها وبأسلوب دقيق وواضـح وذلـك بمـا يتوافـق والمفاهيم الحديثة المطبقة بعد وجود الحاسوب.

إن الفكرة المطروحة هذه يمكن تعميمها وذلك بهدف الوصول إلى مفـاهيم تتعلـق بـآلات تيورينـغ (Turing machines) المتعددة، المتناوبة وغير الحتمية.

رقم التصنيف الرياضياتي العالمي للموضوع: Msc68Q68 Msc68Q55

الكلمات المفتاحية: المجموعات المرقمة بشكل عودي، الترقيمات، التـرقيم الفعـال، نظرية الاحتساب.

Recursively enumerable set

Mohammed Jamal AL-Laban
Mathematics Department-Faculty of sciences-Damascus University-Syria

Received 27/03/2006
Accepted 27/06/2006

ABSTRACT

No need to say that the computation theory had evolved before the appearance of computers. There are some ideas, shaped afterwards (due to application needs in line with their practical aspects) by engineers and designers without focusing on theoretical aspects of formation or presentation. There are also ideas in the computation theory that can be presented clearly in a away consistent with latest developments in computer sciences.

In this research, I present a definition of recursively enumerable sets making use of the idea of "projection of primitive recursive sets" in a way allowing clarification of ideas without relying on the principle of primes to define enumerability, and making possible illustrating ideas in a new form and proving theorems that were left behind when referred to, all in a clear precise way consistent with modern notions applied after the appearance of computers.

The idea elaborated herein allows for generalization aiming to attain notions on multitape, non deterministic and alternating Turning machines.

Msc68Q68 - Msc68Q55

Key Words: Recursively enumerable set, Enumerations, Effective enumerability, Post, Computation theory.

المقـدمـة

يمكن تصنيف مسائل الحساب ضمن الأنواع الآتية:

النوع الأول: هو عندما نريد حساب قيم بعض الدوال. وهنا نريد معرفـة إجـراء أو أداة للقيام بهذا، ونريد أيضاً أن نعرف هل الحسابات سـتتوقف أم لا عنـد فئـة معينـة للصفوف أو المداخل، ونريد في حال توقفها أن نعرف مدى فاعليتها، أي تحديداً أن نعرف حجم الذاكرة وعدد الخطوات الحسابية المطلوبين [1]، [4]، [5].

النوع الثاني: هي المسائل التي تقدم على شكل مجموعة من البيانات حيث لا تعطـى الدوال أو المضامين، نعتمد في الحل على البحث عن إجراء (أو أداة) وذلـك مـن أجـل التحقق أن قيمة بيانية ما منتمية إلى هذه المجموعة أم لا [1]، [4]، [5].

من الأمثلة الجيدة لهذا النوع من المسائل مسألة التحقق من صحة صياغة التعابير.

النوع الثالث: وهي المسائل التي تتعلق بموضوع الإدراج المتتالي لكل البيانات فـي مجموعة ما وبالتحديد مسألة ترقيم البيانات [1]، [4]، [5].

وهنا لا بد من الدخول في مفهوم المجموعات القابلة للحساب والمجموعات المرقمـة بشكل عودي.

سوف أقدم في بحثي هذا نموذجاً جديداً لنظرية المجموعة المرقمة بشكل عودي.

سنقوم في البداية بعرض بعض النقاط التي سنعتمد عليها في هذا البحث بشكل أساسي، ثم سننتقل لعرض البحث.

تعريف (*): العودية الأولية (primitive recursion)

يمكننا من أجـل دالتـين معطتـين، دالـة $g(x_1, .., x_n)$ لهـا n مـضمون، ودالـة $h(x_1, .., x_n, u, v)$ لها n+2 مضمون، حيث $n\in\{0,1,2,..\}$، أن نعـرف دالـة جديـدة $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ لها n +1 مضمون، بحيث

$$f(x_1, .., x_n, 0) = g(x_1, .., x_n) \qquad \text{(I)}$$

و

$$f(y_1, .., x_n, y+1) = h(x_1, .., x_n, f(x_1, .., x_n, y), y)$$

وذلك من أجل كل $y \in Nat$.

ويمكن كتابة التعريف (I) بأسلوب أكثر عملية وذلك كما يأتي:

$$\text{(II)} \qquad f(x_1, .., x_n, y) = \text{if } y=0 \text{ then } g(x_1, .., x_n)$$
$$\text{else } h(x_1, .., x_n, f(x_1, .., x_n, y-1), y-1)$$

تعرف الصيغتان (I) و (II) دالة جديدة f.

تقترح الصيغة (I) القيام بالحساب بأسلوب تكراري في حـين تقتـرح الـصيغة (II) القيام به بأسلوب عودي وكلتا الطريقتين متكافئتان (يمكن تحويل أي منهما إلى الأخرى). يدعى الأسلوبان (I) و (II) أسلوباً عودياً أولياً.

تعريف (**): عملية الحد الأدنى المحدود (bounded minimum operation)

يمكننا من أجل دالة ما g ذات n+1 متغير هم $x_1,\ldots,x_n,z$، ومن أجل وسـيط مـا y، والذي هو عدد طبيعي، تعريف دالة جديدة f ذات n مضمون متعلقة بالوسيط y ومعطـاة وفق الصيغة الآتية:

$$f(x_1,\ldots x_n)=\begin{cases} smallest z: 0\le z\le y s.t\ [g(x_1,\ldots x_n,z)=0] & if\ such z\ exists \\ y+1 & otherwise \end{cases}$$

ويرمز لنتيجة هذه العملية بالآتي:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = BMIN^y\ z\ \ [g(x_1,\ldots,x_n,z) = 0\ ]$$

تعريف (***): تكون دالة ما $f: X \to Y$ قابلة لحساب بواسـطة أداة M إذا قامـت الأداة M بطباعة المخرج $y \in Y$ بحيث $y = f(x)$، وذلك عند قراءتها للمدخل $x \in X$.

تعريف (****): نقول عن مجموعة A من الأعداد إنها قابلة للحـساب إذا وفقـط إذا وجدت آلة اختبار M\` (لترتيبات نظامية تصف أعداد طبيعية) تقبل ترتيبـاً $(q_1)\ 1^{X+1}$ إذا كان $x \in A$ وترفضه إذا كان $x \notin A$ [1]، [2]، [3].

تعريف (1): يدعى أصغر صف من الدوال والحاوي على كل من الدوال succ, zero وعائلة دوال الاختيار sel [n,k] بحيث $1\le k \le n$ $n = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$ والمغلق بالنسبة لعملية تركيب الدوال وبالنسبة للأساليب العودية الأولية بصف الدوال العودية الأولية.

تعريف (2) :المجموعة المنتهية هي دائماً قابلة للحساب، أما المجموعة غير المنتهيـة فهي قابلة للحساب إذا وفقط إذا كانت مجموعة قيم الدالة قابلة للحساب ومتزايدة.

إن المجموعات المرقمة بشكل عودي، تشكل صفاً أوسع مـن المجموعـات القابلـة للحساب. يوجد في الأدبيات تعريفان محتملان للمجموعات المرقمة بـشكل عـودي مـن الأعداد الطبيعية.

تعريف (3): نقول عن مجموعة غير خالية: إنها مرقمة بشكل عـودي إذا وفقـط إذا أمكن لعناصرها أن تدرج بشكل فعال كمجموعة قيم لدالة عودية أولية.

التعريف الآخر المحتمل يستخدم آلات تيورينغ (Turing machine) بصورة مباشرة.

تعريف (4): سنقول: إن عدداً طبيعياً x يعطي ترتيب توقف لآلة M إذا قاد الترتيـب (q_1) 1^{X+1} إلى ترتيب توقف نهائي. وتكون مجموعة ما مرقّمة بشكل عودي إذا وفقط إذا كانت مجموعة من الأعداد الطبيعية والتي تعطي كل ترتيبات التوقف لآلة تيورينـغ مـا [1]، [4]، [5]. كما هو ملاحظ فإن هذا التعريف أقل حدسية بكثير من التعريف الأول.

سنقوم ببرهان التكافؤ بين التعريفين السابقين للمجموعات المرقمة بشكل عودي. لنقوم بهذا بأسلوب أكثر بساطة، سوف نستخدم تعريفاً ثالثاً يعتمد علـى المجموعـات العوديـة الأولية.

تعريف(5): تكون مجموعة ما مرقمة بشكل عـودي إذا وفقـط إذا كانـت إسـقاطاً لمجموعة عودية أولية.

ترقيم الثنائيات (pairs enumeration)

نعرف الدالة $num[2,0] : Nat \times Nat \to Nat$ وذلك كما يأتي:

$$num[2,0](x,y) = \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1} = (x+y+1)\,(x+y)/2 + x \qquad (1)$$

لقد أعطيت القيم في الجدول الآتي:

x \ y	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	3	6*	10	15	21
1	2	4	7*	11	16	22	-
2	5	8*	12	17	23	-	-
3	9*	13	18	24	-	-	-
4	14	19	25	-	-	-	-
5	20	26	-	-	-	-	-
6	27	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-

إذا ما عوضنا $x + y = u$، نجد:

$$t = u\,(u+1)/2 + x \qquad (2)$$

ومن ثم تأخذ u القيم $u = 0,1,2,3,\ldots$، وتكون من أجل كـل uقيمـة مقابلـة xهـي 0,1,2,..,u. فعلى سبيل المثال بالنظر إلى القطر الذي علّمت مدخلاته بـ "*"، تكون لدينا u=3؛ إذاً x=0,1,2,3 ونحصل على t =6,7,8,9. بعد هذا ومن أجل u=4، نحـصل مـن أجل x =0,1,2,3,4 على قيم لـ t هي t =10,11,12,13,14.

بفرض أن u هي قيمة معطاة، عندئذ نحصل على t_{max} عندما x=u ونحصل على t_{min} عندما x=0. ومن ثم يكون لدينا:

$$t_{min} \le t \le t_{max}$$

إذاً

$$u\ (u+1)/2 \le t \le u\ (u+1)/2+u = u\ (u+3)/2$$

ومن ثم

$$u\ (u+1) \le 2t \le u\ (u+3)$$

ومن ثم نعرف:

$$f(t) = BMIN^t\ u[u\ (u+1) \le 2\ t \le u\ (u+3)]$$

إن $f(t)$ دالة عوديه أولية. يمكن التعبير عن f وبشكل صريح وذلك كما يأتي:

$$(u+1/2)^2 < u\ (u+1)+1 \le 2\ t+1 \le u\ (u+3)+1 < (u+3/2)^2$$

ومن ثم يمكننا استنتاج أن:

$$f\ (t) = u = rof\ (sqr\ (2\ t+1))$$

وذلك حيث ترمز الدالة sqr إلى الجذر التربيعي، وترمز الدالة rof إلى التدوير إلـى أقرب عدد صحيح.

الآن، ومن أجل قيمة ما t، وبمعرفة أن u = f(t)، يمكننا حساب:

$$y = u - x = 2u - t \quad , \quad x = t - u$$

إذاً الدوال العكسية للدالة (1) هي:

$$num\ [2,1](t) = x = t - f(t) \qquad (3)$$
$$num\ [2,2](t) = y = 2 * f(t) - t$$

وهي تمثل دوال عودية أولية.

ومن ثم وحسب (2) و (3) نكون قد عرفنا التطبيقين:

$$num[2,0] : Nat^2 \to Nat$$
$$num[\ 2,0](x,y) = t$$

و

$$num[2,1]\times num[2,2] : Nat \to Nat \times Nat \qquad (4)$$
$$num[2,1]\times num[2,2](t)=(num[2,1](t),num[2,2](t))= (x,y)$$

واللذان هما عكوسان بالنسبة لبعضهما بعضاً، ودالتان عوديتان أوليتان أيضاً. حيث تقوم الدالة الأولى بتطبيق الأزواج (x,y) واحداً إلى واحد على الأعداد الطبيعية (تطبيق متباين وغامر)، وتسمح بترميز الثنائيات كأعداد مفردة. أما الدالة الثانية فتقوم بتطبيق الأعداد الطبيعية t على الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية، وتسمح بترقيم كل الثنائيات وفق ترتيب معين. فبأخذ

$$t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots$$

نحصل على الترقيم (الإدراج) الآتي:

$$(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,0), (3,0), \ldots$$

إن استخدام العلاقة (4) يعطينا ثانية القيم $t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots$.

الترقيم الفعال effective enumerability

سنقوم الآن بتفحص مجموعات يمكن لعناصرها أن تدرج بشكل فعال. يعني هذا بأنه يوجد إجراء فعال يعطي عناصر المجموعة L مثلاً في ترتيب ما.

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots\ldots \quad (1)$$

وحسب التعريف (2) فإنه عندما تدرج العناصر بترتيب تصاعدي تكون المجموعة L قابلة للحساب.

ولكن عموماً، عندما لا يكون ترتيب الإدراج (1) متزايداً، فإن إجراء كالذي وصف في التعريف (2) لا يضمن كون المجموعة مقررة. وسوف نشرح هذا بطريقة أكثر حذراً.

نرغب في أن نقرر فيما إذا كان $x\in L$، ونبدأ بإدراج العناصر كما في (1). وإذا أدرجنا في خطوة ما m مثلاً $x = x_m$، عندئذ يجب علينا الإجابة بـ "نعم" للسؤال $x\in L$. ولكن ما الذي يحدث إذا لم ندرج العنصر x، لخطوة ما، m مثلاً؟ ليس لدينا أية معلومات في هذه الحالة عن كيفية الإجابة عن هذا السؤال. فقد يحدث أنه بعد عدد قليل أو كثير من الخطوات سنقوم بإدراج العنصر x. ولكن ربما يحدث أيضاً أن لا ندرج العنصر x أبداً. الحالة الأخيرة تحدث في حال كون $x\notin L$. وهذا أمر معاكس للتعريف (2)، حيث إننا هناك نعرف أنه يجب علينا التوقف عن عملية الإدراج بعد x خطوة، أما في حالتنا أعلاه فنحن لا نملك أية معلومات عن متى نوقف عملية الإدراج ويكون الجواب "لا".

سوف نقدم تعريفاً آخر للمجموعات المرقمة بشكل عودي: لنبدأ أولاً بتعريف مساعد:

تعريف(6): نقول عن مجموعة L من n- مركبة $(x_1,\ldots\ldots, x_n) \in Nat^n$ من الأعداد الطبيعية إنها إسقاط لمجموعة S مؤلفة من (n+1)- مركبة من $Nat^{(n+1)}$ من الأعداد الطبيعية إذا وفقط إذا كان:

$(x_1,\ldots\ldots,x_n) \in L$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي y بحيث:

$(x_1, \ldots\ldots, x_n, y) \in S$

مثال:

المجموعة $S = \{(1,7), (2,5), (2,6), (2,7), (3,3)\}$ عندما يتم الإسقاط على طول الإحداثي الثاني على الأول نحصل على $L = \{1, 2, 3\}$.

مثال:

من أجل أية دالة $f : Nat \rightarrow Nat$ يعطي إسقاط لـ ـ Graph(f)، المعـرف وفـق
$Graph(f) = \{ (x,y) : y = f(x) \}$

على طول الإحداثي x الصورة $L = f(Nat)$، ويعطي الإسقاط على طول الإحداثي y المجموعة D من هذه الـ x والتي من أجلها يكون f(x) معرفاً.

سنقدم الآن تعريفاً للمجموعات المرقمة بشكل عودي:

تعريف (7): تدعى مجموعة L عناصرها مؤلفة من n- مركبة من الأعداد الطبيعيـة بأنها مرقمة بشكل عودي (اختصاراً .r.e) إذا كانت إسقاطاً لمجموعـة عوديـة أوليـةS عناصرها مؤلفة من (n + 1)- مركبة من الأعداد الطبيعية.

أمثلة:

المجموعة Φ (المجموعة الخالية) هي مجموعة مرقمة بشكل عـودي. فهـي إسـقاط للمجموعة Φ والتي هي مجموعة عودية أولية.

المجموعة Nat هي مجموعة مرقمة بشكل عودي حيث Nat هي إسـقاط Nat x Nat والتي هي مجموعة عودية أولية.

وعموماً تكون لدينا المبرهنة الآتية:

مبرهنة (1):

كل مجموعة عودية أولية هي مجموعة مرقمة بشكل عودي.

البرهان:

لتكن المجموعة L عودية أولية، عندئذ تكون المجموعة S = L x Nat عودية أوليـة، ولكن L هي إسقاط لـ S على طول الإحداثي الثاني.

مبرهنة (2):

من أجل دالة عودية أولية f(x) تكون الصورة f(Nat) مجموعة مرقمة بشكل عودي.

البرهان :

إن الرسم البياني E = {(x , y) : y = f(x)} وأيضاً $\overline{E}$ = {(y , x) : y = f (x)}

مجموعات عودية أولية. ومن ثم فإسقاط E على طول المحور x والذي هو المجموعة f(Nat) هي مجموعة مرقمة بشكل عودي.

دعنا نلاحظ أن المبرهنة تقول ببساطة: إنه من أجل دالة عودية أولية f عندما نـدرج بتعاقب القيم f(0) ,f(1) ,f(2) ,f(3) ,…………..

تكون المجموعة الناتجة f (Nat) ={ f(0) ,f(1) ,…………..} مجموعـة مرقمـة بشكل عودي.

دعنا من الجهة الأخرى نأخذ مجموعة مرقمة بشكل عودي غير خاليةL من الأعـداد الطبيعية. هدفنا هو برهان أنه يمكن إدراج عناصرL بواسطة دالة عودية أولية. لنختـار عدداً مثبتاً من L.

المجموعة L هي إسقاط لمجموعة عودية أوليةE. ومن ثم لدينا y ∈ L إذا وفقـط إذا وجدت x بحيث: (y , x) ∈ E

لتكن g(y, x) دالة عودية أولية بحيث g(y, x) = 0 إذا وفقط إذا (y , x) ∈ E .

دعنا نعرف الدالة الاتية :

$$\begin{cases} num\,[2,1]\,(x) & \text{if } g(\,num[2,1]\,(x)\,,\,num\,[2,2](x)\,) = 0 \\ \end{cases}$$

$f(x) =$

$$a \qquad \text{if } g(\text{num}[2,1](x), \text{num}[2,2](x)) \neq 0$$

إن هذه الدالة معرفة بإجراء IF وباستخدام دوال عودية أولية، ومن ثم فهي دالة عودية أولية ولدينا من أجل هذه الدالة $L = f(\text{Nat})$

مبرهنة (3):

تكون مجموعة L مرقمة بشكل عودي إذا وفقط إذا كانت صورة لمجموعـة الأعـداد الطبيعية وفق دالة عودية أولية.

تعطي هذه المبرهنة اسم المجموعات المرقمـة بـشكل عـودي للمجموعـات التـي يمكن أن ترقم "عودياً" (أي تدرجاً عودياً). كما تصنف هذه المبرهنة المجموعات المرقمة عودياً بلغة الدوال العودية. ولكن يمكن لهذا التصنيف أن يعطى بلغة مختلفة تماماً. دعنـا أولاً نلاحظ أن المجموعة المرقمة بشكل عودي هي من النقاط والتي تعرف بدلالتها دالـة عودي جزئية ما. ففي الحقيقة تكون مجموعة مرقمة بشكل عوديL إسـقاطاً لمجموعـة عودية أولية E. ومن ثم توجد دالة عودية أولية g بحيث: $(y, x) \in E$ إذا و فقـط إذا كان $g(x, y) = 0$.

ويكون لدينا: $x \in L$ إذا وفقط إذا وجدتy بحيث $(x, y) \in E$ وإذا وفقط إذا وجدتy بحيث $g(x, y) = 0$.

وإذا عرفنا دالة $f(x)$ وفق الصيغة:

$$f(x) = \text{MIN } y[\, g(x, y) = 0]$$

يكون لدينا $x \in L$ إذا و فقط إذا كانت $f(x)$ معرفة. وتكون الدالة f عودية جزئية.

لنقوم الآن ببناء آلة تيورينغ M تحسب الدالة $\text{MIN } y[g(x, y) = 0]$

تقوم الآلة باختبار $g(x, y) = 0$ بشكل متعاقب من أجل $y = 0,1,2,\ldots\ldots$

إذا وجدت y بحيث $g(x, y) = 0$، عندئذٍ $x \in L$.

وإذا لم توجد y كهذه (أي عندما $g(x, y) \neq 0$ دائماً)، عندئذٍ تعمل الآلة إلى اللانهايـة ويكون $x \notin L$.

فالآلة تتوقف إذا وفقط إذا كانت $f(x)$ معرفة، والذي يعني إذا وفقط إذا كانت $x \in L$. ونكون بهذا قد برهنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة (4):

إن كل مجموعة مرقمة بشكل عودي هي مجموعة كل النقاط والتي تعـرف بـ دلالتها دالة عودية جزئية ما.

دعنا نلاحظ أن الدالة f معرفة باستخدام إجراء minimum من أجل دالة عودية أولية ما. المجموعة L هي مجموعة كل النقاط التي باستخدامها تتوقف كل آلة تيورينـغ تقـوم بحساب f. إن المبرهنة العكسية هي أيضاً صحيحة.

مبرهنة (5):

إذا كانت L هي مجموعة تلك القيم x التي تتوقف من أجلها آلـة تيورينـغ M علـى $1^{x+1}q_1$ عندئذٍ تكون المجموعةL هي مجموعة تلك القيم x والتي تعـرف بـ دلالتها دالـة عودية جزئية ما. تكون المجموعة L في كلتا الحالتين مجموعة مرقمة بشكل عودي.

ليكن $1^{x+1}q_1$ ترتيب توقف لآلة تيورينغ ما M. إن عددها هو $k= num[3,0](2^{x+1}-1,1,0)$.

تعطي الدالة العودية الأولية $h(M , k , n)$ عدد الترتيب الذي تم الحصول عليه بعـد n خطوة لـ M .

ويكون هذا الترتيـب ترتيـب توقـف نهائيـاً إذا وفقـط إذا كـان عـدد حالاتهـا $num[3,2] (h(M , k , n))$ مساوياً للصفر.

الدالة $g(x, n)= num[3,2] (h(M, num[3, 0] (2^{x+1}-1, 1,0), n)$ هي دالـة عوديـة أولية. وحسب تعريف h.

$x\in L$ إذا وفقط إذا وجدتn بحيث $g(x , n) = 0$ ومن ثم فالمجموعة L مرقمة بـشكل عودي.

كما أن المجموعة L هي أيضاً مجموعة كل الـ x التي من أجلها تكون الدالة العودية الجزئية الآتية:

$comp (M , num[3 , 0](2^{x+1} - 1 , 1 , 0))$ معرفة.

سنبين الآن مدى أهمية المبرهنة (5):

لنأخذ الدالة التعاودية الجزئية

$$H'(x)=\begin{cases} 0 & \text{إذا توقفت الآلة } M \text{ على } k \\ 1 & \text{إذا لم تتوقف الآلة } M \text{ على } k \end{cases}$$

لنعرف دالة عودية جزئية أخرى كالآتي:

$$f(x) = [\text{if } H'(x) = 0 \text{ then } zero1(x) \text{ else } none(x)]$$

حيث none(x) هي دالة عودية جزئية غير معرفة في أي مكان. عندئـذٍ المجموعـة غير المقررة S (حيث S هي مجموعة تلك الـ x والتي من أجلها ستتوقف الآلةM) هي مجموعة هذه النقاط x والتي من أجلها تكون الدالـة f(x) معرفـة. ومـن ثـم وحـسب المبرهنة (5) المجموعة غير المقررة S هي مجموعة مرقمة بشكل عودي.

مبرهنة (6): لتكن B مجموعة عودية أولية عناصرها مؤلفة منn-مركبة. ولـتكن π تبديلات مختلفة للمتحولات $(x_1,\ldots\ldots.,x_n)$. عندئذ π (B) هي مجموعة عودية أولية.

إضافة إلى هذا المجموعة B × Nat والتي عناصـرها لهـا (n+1)- مركبـة هـي مجموعة عودية أولية.

أيضاً المجموعة C التي عناصرها مؤلفة من (n-1)-مركبة، بحيث:

$(x_1 ,\ldots\ldots\ldots., x_{n-1}) \in C$ إذا وفقط إذا كان $(x_1 ,\ldots\ldots., x_{n-1} , x_{n-1}) \in B$

(تم تكرار المركبة الأخيرة فقط)، هي مجموعة عودية أولية.

أيضاً المجموعة D التي عناصرها مؤلفة من (n+1) مركبة بحيث:

$(x_1, \ldots\ldots., x_{n-1} , x_n , x_n) \in D$ إذا وفقط إذا كان $(x_1 ,\ldots\ldots.., x_{n-1} , x_n) \in B$

(تم تكرار المركبة الأخيرة فقط من مركباتB)، هي مجموعة عودية أولية.

خواص المجموعات المرقمة بشكل عودي

(Properties of recursively enumerable sets)

سنقوم بتقديم مبرهنة تجمع بعض الخواص التقنية جداً، ولكن المهمـة، للمجموعـات المرقمة بشكل عودي.

مبرهنة (7) :

لتكن A وB مجموعتين مرقمتين بشكل عودي، ولـيكن F_1 و F_2 تطبيقـين معـرفين بدلالة دوال عودية أولية، ولنفرض أن :

D هي إسقاط لـ B

$L = F_1(A)$ هي إسقاط لـ A .

$C = F_2^{-1}(B)$ هي الصورة العكسية لـ B عندئذٍ:

a) تكون D مجموعة مرقمة بشكل عودي.

b) تكون C مجموعة مرقمة بشكل عودي.

c) تكون $A \cup B$ مجموعة مرقمة بشكل عودي.

d) تكون $A \cap B$ مجموعة مرقمة بشكل عودي.

e) تكون L مجموعة مرقمة بشكل عودي.

البرهان :

a) لتكن E مجموعة عودية أولية بحيث $(x, y) \in B$ إذا وفقـط إذا وجـدت z بحيـث $(x , y , z) \in E$.

الآن، إذا كانت D إسقاطاً لـ B عندئذٍ

$x \in D$ إذا وفقط إذا وجدت y بحيث $(x , y) \in B$

ومن ثم $x \in D$ إذا وفقط إذا وجدت y و z بحيث $(x , y, z) \in E$

لاحظ أن التطبيقF الذي يطبق زوجاً (x, t) على ثلاثية (x, y, z) المعرف كالآتي:

$x \quad x \; , t \quad (y , z) = (num [2 , 1] (t) , num [2 ,z] (t))$

هو دالة عودية أولية.

ومن ثم الصورة العكسية $W = F^{-1}(E)$ تكون أيضاً مجموعة عودية أولية.

ولكن $x \in D$ إذا و فقط إذا وجدت t بحيث $(x , t) \in W$ هذا يبرهن أن D مجموعـة مرقمة بشكل عودي كإسقاط لـ W .

b) للتبسيط، تم برهان هذا من أجل كلتا المجموعتينB وC بكونهما مجموعتي أزواج.

لتكن $F(y_1, y_2) = (f_1(y_1, y_2) , f_2(y_1, y_2))$ حيث f_2 , f_1 هي دوال عودية أولية.

لتكن E مجموعة عودية أوليـة بحيـث $(x_1, x_2) \in B$) إذا وفقـط إذا وجـدz بحيـث $(x_1, x_2, z) \in E$)

لنعرف التطبيق $G(y_1 , y_2 , z) = (f_1(y_1 , y_2) , f_2(y_1 , y_2) , z)$

المجموعة $W = G^{-1}(E)$ هي مجموعة عودية أولية إضافة إلى هذا

$(x_1 , x_2 , z) \in E$ إذا وفقط إذا كان $(y_1 , y_2 , z) \in W$

حيث $x_1 = f_1(y_1 , y_2)$ و $x_2 = f_2(y_1 , y_2)$

الآن، نظراً لأن $C = F^{-1}(B)$ إذاً، $(y_1, y_2) \in C$ إذا وفقط إذا $(x_1, x_2) \in B$ من أجـل الـ x_1 والـ x_2 السابقين. وبناء عليه يكون :

$(y_1, y_2) \in C$ إذا وفقط إذا وجدت z بحيث $(x_1, x_2, z) \in E$ ومن ثم $\longrightarrow$

$(y_1, y_2) \in C$ إذا وفقط إذا وجدت z بحيث $(y_1, y_2, z) \in W$.

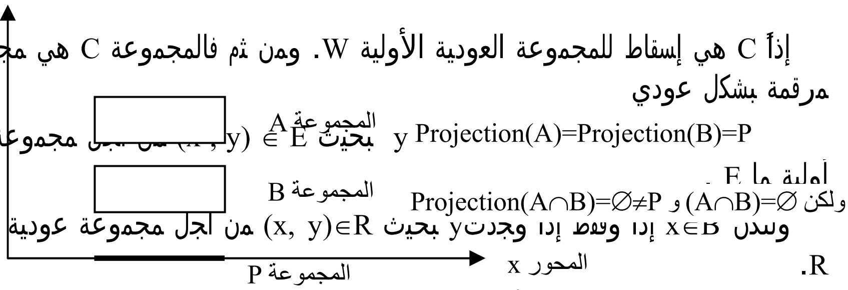
إذاً C هي إسقاط للمجموعة العودية الأولية W. ومن ثم فالمجموعة C هي مجموعة مرقمة بشكل عودي

y بحيث $(x , y) \in E$ من أجل مجموعة عودية أولية ما E.

وكذلك $x \in B$ إذا وفقط إذا وجدت y بحيث $(x, y) \in R$ من أجل مجموعة عودية أولية ما R.

المجموعة $E \cup R$ عودية أولية. ولكن $x \in A \cup B$ إذا وفقط إذا وجدت y بحيـث $(x , y) \in E \cup R$.

d) من أجل المجموعتين المرقمتين بشكل عودي B وA لتكن R,E مجموعتين عوديتين أوليتين بحيث $x \in A$ إذا و فقط إذا وجدت y بحيث $(x , y) \in E$ و $x \in B$ إذا وفقط إذا وجدت z بحيث $(x , z) \in R$



الشكل (1) إسـقاط مجموعتين

لتكن R^T هي منقول R، أي مجموعة بحيث $(x, z) \in R$ إذا وفقط إذا $(z , x) \in R^T$
عندئذ حسب المبرهنة (6) تكون المجموعة R^T مجموعة عودية أولية أيضاً.
ولدينا من أجل هذه المجموعة:
$x \in B$ إذا وفقط إذا وجدت z بحيث $(z , x) \in R^T$

المجموعتان $E` = Nat \times E$ و$R` = R^T \times Nat$ هما مجموعتان عوديتان أوليتان حسب المبرهنة(6). الآن: $x \in A \cap B$ إذا وفقط إذا وجدت z و y بحيث $(z, x, y) \in E` \cap R`$

بالتأكيد إذا كانت $x \in A \cap B$، عندئذ من أجل y وz ما يكون $(x,y) \in E$ و$(z,x) \in R^T$ ومن أجل الـ y والـ z هاتين يكون $(z, x, y) \in E` \cap R`$. وإذا من أجـل z وy لـدينا $(z , x, y) \in E` \cap R`$، عندئذ $(z, x) \in R^T$ و$(x, y) \in E$، ومن ثَمَّ $x \in A \cap B$. هذا يبين أن $A \cap B$ هي إسقاط لإسقاط المجموعة العودية الأولية$E` \cap R`$. ولكن حسب المبرهنة (7) إسقاط مجموعة عودية أولية هو مجموعة عودية أولية.

ومن ثم $A \cap B$ هي مجموعة مرقمة بشكل عودي كإسقاط لمجموعة مرقمة بشكل عودي.

مبرهنة (8):

كل مجموعة قابلة للحساب هي مجموعة مرقمة بشكل عودي.

البرهان:

لتكن A مجموعة قابلة للحساب و h(x) دالتها المميزة. نعرف الآن دالة عودية جزئية f(x) كما يأتي:

$$f(x) =(\text{ if } h(x) =1 \text{ then } one(x) \text{ else } nil(x))$$

حيث nil (x) هي دالة عودية جزئية غير معرفة في أي مكان .

نظراً لأن h(x) دالة قابلة للحساب، إذاً f(x) دالة عودية جزئية. المجموعة A هي مجموعة النقاط التي تكون الدالة معرفة من أجلها، ومن ثم وحسب المبرهنة (5) تكون A مجموعة مرقمة بشكل عودي.

إن عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً.

وعموماً، يمكن لعناصر مجموعة مرقمة بشكل عودي L أن تدرج بشكل فعال كقيم لدالة عودية أولية f بالشكل $f(0),f(1),f(2),\ldots,f(n),f(n+1),..$.

سنبرهن بأن إدراجاً كهذا غير متزايد بالضرورة ليضمن إجراء قرار لحقيقة كون المجموعة S غير مقررة، كمجموعة مرقمة بشكل عودي يمكن أن تدرج بطريقة كهذه.

لدينا حالة أخرى تماماً عندما تكون المجموعتان L و L\`=Nat\L مجموعتين مرقمتين بشكل عودي. عندئذ توجد دالتان عوديتان أوليتان f و f\` بحيث:

$$L = f(Nat) \quad \text{و} \quad L` = f`(Nat)$$

ويمكننا إدراج عناصر كلتا المجموعتين وفق الشكل:

$$f(0) =x_0, f`(0) =y_0, f(1) =x_1, f`(1) =y_1, f(2) =x_2, f`(2) =y_2,\ldots \qquad (2)$$

حيث $L = \{ x_0 , x_1 , x_2 , \ldots\}$ و $L` = \{y_0 , y_1 , y_2 , \ldots\}$

يمكن للمتتالية (2) أن تشكّل بشكل فعال. كل عناصر Nat سوف تكون في المتتالية (2). ومن ثم تعطي المتتالية إجراء قرار من أجل $x \in L$. سندرج عناصر (2). إذا وجدت x على موقع فردي نقرر بـ "نعم" لـ $x \in L$، وإلاّ في حال وجدت x على موقع زوجي فإننا نقرر بـ "لا" لـ $x \in L$. إذاً المجموعة L تماماً كما المجموعة \`L مجموعتان مقررتان.

نفترض هنا ضمنياً أن كلتا المجموعتين L و`L غير منتهيتين، ولكن في حال كانـت إحداهما منتهية، عندئذ نعتمد المبرهنة (تشكل مجموعات الأعداد الطبيعية القابلة للحـساب جبراً بوليانياً يحتوي على كل المجموعات المنتهية) وتكون المبرهنة محققة.

مبرهنة (9) مبرهنة Post :

تكون مجموعةL قابلة للحساب إذا وفقط إذا كانت كل مـنL ومجموعتهـا المتممـة L` = Nat\ L مجموعتين مرقمتين بشكل عودي.

في المبرهنة السابقة قدمنا برهاناً للاتجاه الأول (إذا) ولنقدم الآن برهاناً للجزء "وفقـط إذا".

لتكن L و`L مجموعتين مرقمتين بشكل عودي. نريد برهان أن الدالة المميـزة h(x) للمجموعة L هي دالة قابلة للحساب. ليكنL إسقاطاً للمجموعة العودية الأوليةE، ولـيكن `L إسقاطاً للمجموعة العودية الأولية لهما. ولتكن دالتان عوديتان أوليتانg و `g بحيث:

$(x , t) \in E$ إذا وفقط إذا $g(x , t) = 0$ و $(x , t) \in W$ إذا وفقط إذا $g`(x , t) = 0$.

ولنعرف $f(x) = MIN\ t[g(x , t) * g`(x , t) = 0]$. الدالة f دالة عودية جزئية معرفـة في كل مكان (حيث من أجل $x \in L$ يوجد t بحيث $g(x , t) = 0$، ومن أجل $x \in L`$ يوجد t بحيث $g`(x , t) = 0$). ومن ثم f(x) دالة قابلة للحساب.الدالة المميزة h(x) للمجموعة L يمكن الآن أن تعرف كدالة قابلة للحساب:

$$h(x) = [\text{ if } g(x , f(x)) = 0 \text{ then } one(x) \text{ else } zero_1(x)]$$

نظراً لأنه إذا كان $g(x , f(x)) = 0$ ، فعندئذ $g`(x , f(x)) = 0$ و $x \in L`$.

لاحظ أن كلاً من L و`L مقررتين أو كلتاهما غير مقررتين.

الخاتمة

أستطيع في النهاية القول إنني قمت بتقديم نموذج رياضي لتوصيف ودراسة جانب مهم جداً في نظرية الحوسبة إذ بدأت بصياغة التعاريف اللازمة معتمداً على مراجع مهمة في هذا الاختصاص ([1]، [2]، [3]، [4]، [5]) علماً بأن كل التعاريف والأفكـار صـيغت بشكل جديد تماماً بعيداً عن استخدام الرئيسيات في تعريف الحسابات حيث تـصبح الآلـة أكثر من أبجدية لا بل هي نظم برمجية طبيعية، مما جعلني أقدم صياغة لأفكار ومبرهنات (أهمل بعضها في كثير من المراجع) مستفيداً من فكرة مـساقط المجموعـات العوديـة الأولية.

إن ما توصلت إليه من أفكار يسمح بتطبيق التعاريف والمبرهنات ليشمل مبرهنة البيان التي تصنف الدوال العودية الجزئية كدوال تملك رسماً بيانياً قابلاً للترقيم بشكل عودي كما أنني أرى أنه من الممكن الاعتماد على الأفكار نفسها لتقديم إثبات آخر لمبرهنة Rice.

كما يمكن الاستفادة مما قدمت لدراسة محاكاة آلات تيورنغ ذات الأشـرطة المتعـددة والمتناوبة.

REFERENCES

[1] Hopcroft, J. E., ULLman, J. D. 1979,2000. Introduction to Automata Theory, Language and Computations, Addison – Wesley

[2] John Gough, K. 1988. Syntax Analysis and Software Tools. Addison – Wesley publishing company.

[3] KubiaK, R., RudzinsKi, R., Sokolowski, S. 1991. An Introduction to Programming With Specifications: a Mathematical Approach. London Academic Press.

[4] Landweber, L. h., Brainerd, W. s. 1974. Theory of Computation Valey and Sons.

[5] Raymond, T. yeh, 1976. Applied Computation Theory: Analysis, Design, Modeling, Prentice – Hall , inc.