وحدانية ووجود الحل لمسألة قيم حدية لـ جملة معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية

محمد مناف محمد أمين الحمد

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريـخ الإيداع 2004/09/01

قبل للنشـر في 2005/08/14

الملخص

تؤول معظم مسائل الفيزياء الرياضية عند حلها إلى حل معادلة تفاضلية جزئيـة أو أكثـر بـشروط ابتدائية وشروط حدية مفروضة. وهذا ما يعرف بمسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية.

يدرس هذا البحث حل جملة معادلات تفاضلية جزئية من النوع القطعي المكـافئ والقطعـي الزائـدي بشروط حدية مفروضة في مناطق مختلفة من المستوى x o y.

وقد تم في هذا البحث إثبات مبرهنة وحدانية ووجود الحل. ويعد هذا العمل امتـداداً للبحـوث التـي نشرت لـ أليموف، صلاح الدنيوف، جوا ريف والحمد،...

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية، مسائل القيم الحدية.

The existence and uniqueness of the solution for the boundary values problem for systems of partial differential equations of second order

Mhd. Mounaf Mhd Amin Al Hamad

Department of Mathematic-Faculty of Sciences-Damascus University-Syria

Received 01/09/2004
Accepted 14/08/2005

ABSTRACT

Most of mathematical physics problems can be translated into solve one partial differential equation or more with specific initial conditions and boundary conditions. This is called the boundary value problem for the differential equations.

This paper studies the solution of systems of hyperbolic and parabolic partial differential equations assuming some boundary conditions in different domains in the plane xoy.

In this paper we have proved theorem about the existence and uniqueness of the solutions. This article is considered to be a continuation to the works of Alimove, Ssallah Aldinov, Gooraev and Alhamad.......

Key words: Differential equations, boundary value of problems..

1- المقـدمـة

يعالج البحث نظرية المعادلات التفاضلية المختلطة التي تعد إحدى النظريـات التـي تعالجها حالياً المعادلات التفاضلية الجزئية، وعلى الرغم من أنها عولجت أول مـرة مـن قبل الرياضي الإيطالي تريكومي في الأربعينيات من القرن الماضي، فإن الاهتمام بها لـم يبدأ على نحو جدي، إلا في أواخر السبعينيات من القرن نفـسه، وذلـك عنـدما أشـار الرياضي الهولندي فرانكل إلى أهميتها في حل بعـض المعـضلات المتـصلة بتحريـك الغازات والسوائل وانحناءات السطوح.

والمؤسسون الرئيسيون لمسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الجزئية نـذكر مـنهم بيتسادزي [2]، جورا يف [3]، كيريفوف [7]، سابويف [4]، أليموف وبولا توف [1].

نجد مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية المكافئية في الأعمـال [3]، [8]، ونجـد مسائل القيم الحدية للمعادلات القطعية المكافئية -الزائدية في الأعمال [3]، [4]، [7].

أما هذا البحث فيعد امتداداً للبحوث التي نشرت لـ [1]، [3]، [8]، وصلاح الدينوف، وقد تم إثبات مبرهنة وحدانية ووجود الحل لمسألة قيم حدية لجملـة معـادلات تفاضـلية جزئية من المرتبة الثانية، كذلك توصلت إلى إيجاد الدوال التي تحقق هذه المعادلات فـي ساحات معينة وبشروط حدية مفروضة، وهنا أثبت أيضاً أنه لدى تحقق بعض الـشروط، فإن وجود الحل يقتضي وحدانيتها. كذلك فقد أرجعت حل هذه المسألة الحدية إلى حل نظام من المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولوم من النوع الثاني.

2- تعاريـف أساسيـة

2-1- تعريف شرط كيلدر:

نقول: إن الدالة $a(x,y)$ تحقق شرط كيلدر بمعامل α حيـث $0<\alpha\leq$ إذا وجـد ثابـت موجب k بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$|a(x,y_1)-a(x,y_2)|\leq k|y_1-y_2|^{\alpha}$$

وذلك من أجل أية نقطتين (x,y_1) , (x,y_2) تنتميان إلى ساحة ما G .

2-2- تعريف الحل المنتظم:

يسمى حل المعادلة التفاضلية منتظماً إذا كان مستمراً هو ومـشتقاته الجزئيـة حتـى المرتبة الثانية ضمناً في جميع أنحاء المسألة G.

2-3- تعريف معادلة فريدهولوم الخطية :

إذا كانت المعادلة التكاملية الخطية من الشكل :

$$\upsilon(y)-\lambda\int_a^b k(y,\eta)\upsilon(\eta)d\eta = p(y) \qquad \text{(A)}$$

حيث إن:

- $k(y,\eta)$ تسمى نواة المعادلة التكاملية. وهي دالة معلومة للمتحولين المستقلين y و η.
- P(y) الطرف الأيمن من المعادلة وهي دالة معلومة (الطرف الحر).
- $\upsilon(y)$ دالة مجهولة غايتنا تحديدها.
- λ وسيط عددي.

فإنها تسمى معادلة فريدهولوم التكاملية الخطية من النوع الثاني .

2-4- المعادلة التكاملية المنقولة:

إذا كانت المعادلة التكاملية من الشكل:

$$\upsilon_1(y)-\lambda\int_a^b k(\eta,y)\upsilon_1(\eta)d\eta = p_1(y) \qquad \text{(B)}$$

فإنها تسمى المعادلة التكاملية المنقولة لـ (A)

ولنلاحظ أن النواة في (B) لا تختلف عن النواة فـي (A) سـوى أن y و η تبـادلا موضعهما.

2 – 5-فرضية فريدهولوم في المعادلات التكاملية:

لتكن لدينا المعادلة (A) ولنميز الحالتين الآتيتين:

(أ)– إذا كانت λ ليست قيمة مميزة للنواة $K(Y,\eta)$ عندئذ يكون للمعادلة التكامليـة المتجانسة ولمنقولها الحل الصفري فقط، ويكون للمعادلة (A) ولمنقولها حل وحيد.

(ب)– إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $K(Y,\eta)$ عندئذ يكـون للمعادلـة المتجانـسة الموافقة لـ (A) حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء ذا بعد منته كما يكون لمنقول هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء له البعد نفسه.

2 – 6- تعريف النواة الحالة:

لننظر في المتسلسلة الآتية:

$$H_1(y,\eta)+\lambda H_2(y,\eta)+\lambda^2 H_3(y,\eta)+.....+\lambda^{m-1}H_m(y,\eta)+.......$$

هذه المتسلسلة هي متسلسلة قوى في λ ويرمز لها بالرمز $R(y,\eta,\lambda)$ وتسمى النواة الحالة بـ $H(y,\eta)$ ومنه:

$$R(y,\eta,\lambda)=H_1(y,\eta)+\lambda H_2(y,\eta)+\lambda^2 H_3(y,\eta)+....+\lambda^{m-1}H_m(y,\eta)+.....$$

أما صيغة الحل لمعادلة فريدهولوم التكاملية الخطية من النوع الثاني باستخدام النـواة الحالة فتعطى بالمعادلة:

$$\upsilon(y)=P(y)+\lambda\int_a^b R(y,\eta,\lambda)P(\eta)d\eta$$

ومن الصيغ المهمة التي تحققها النواة الحالة هي الصيغة الآتية:

$$R(y,\eta,\lambda)=H_1(y,\eta)+\lambda\int_a^b H_1(y,x)R(x,\eta,\lambda)dx$$

3- عرض المسالة

لننظر في جملة المعادلات الآتية:

(1) $U_{xx}-U_y+a(x,y)U_x+b(x,y)U=0 \quad ; (x,y)\in D_1$

(2) $U_{xx}-U_{yy}+a_1U_x+b_1U_y+c_1U=0 \quad ; (x,y)\in D_2$

(3) $U_{xx}-U_{yy}+a_2U_x+b_2U_y+c_2U=0 \quad ; (x,y)\in D_3$

وذلك بفرض أن $a\ (x,\ y)$ دالة مستمرة معلومة قابلة للاشتقاق مرة واحد ة فقط فـي الساحة $\overline{D}_1$ وتحقق شرط كيلدر بمعامل α [9] وحيـث $0<\alpha\leq 1$، وإن $b(x,\ y)$ دالـة مستمرة معلومة وتحقق شرط كيلدر بمعامل α في الساحة $\overline{D}_1$.

حيث: D_1 - ساحة مفتوحة، محـدودة بالمـستقيمات AB, BB_0, B_0A_0, A_0A والتـي معادلاتها على الترتيب:

$y=0, x=1, y=1, x=0$، (أي أن D_1 هـي المربـع $\{0< x<1, 0 < y < 1\}$). وحيـث $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$ و D_2 – مثلث محـدود بالمـستقيمات AA_0, AC, A_0C التي معادلاتها هي على الترتيب:

$x= 0$, $x+y = 0$, $y-x=1$ وحيث $C(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$، وتمثل ساحة مفتوحة.

وD_3- مثلث محدود بالمستقيمات BB_0, BE, B_0E التي معادلاتها هي على الترتيب:

$x= 1$, $x-y=1$, $x-2 = -y$ وحيث $E(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, وتمثل أيضاً ساحة مفتوحة.

أما $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ فهي ثوابت اختيارية.

لنرمز بـ: $\overline{D}$ لصاقة D ; $D= D_1\cup AA_0 \cup BB_0 \cup D_2 \cup D_3$

إذا أجرينا في (1) التحويل الآتي:

$$U (x, y) = V(x, y) \exp \{ -\frac{1}{2}\int_0^x a(t, y)dt \{$$

فإننا نحصل على المعادلة:

$$V_{xx} - V_y + C(x, y) V = 0$$

حيث:

$$C(x, y) = -\frac{1}{4} a^2 (x, y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x a(t, y)dt + b(x, y)$$

وكذلك إذا أجرينا في (2) التحويل الآتي:

$$U(x, y) = V(x, y)\, e^{\alpha_1 x+\beta_1 y}$$

فإننا نحصل على المعادلة:

$$V_{xx} - V_{yy} + \lambda_1 V = 0$$

وذلك بفرض أن:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(4c_1^2 - a_1^2 - b_1^2) \quad ; \alpha_1 = \frac{-a_1}{2} \ ; \beta_1 = +\frac{b_1}{2}.$$

وبشكل مشابه إذا أجرينا في (3) التحويل الآتي:

$$U(x, y) = V(x, y)\, e^{\alpha_2 x+\beta_2 y}$$

فإننا نحصل على المعادلة:

$$V_{xx} - V_{yy} + \lambda_2 V = 0$$

حيث:

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(4c_2 - a_2^2 + b_2^2) \quad ; \alpha_2 = -\frac{a_2}{2} \; ; \beta_2 = +\frac{b_2}{2} \quad .$$

ولهذه الأسباب يكفي البحث في جملة المعادلات الآتية:

(4) $U_{xx} - U_y + C(x, y)\,U = 0 \quad ; (x,y) \in D$

(5) $-U_{xx} + U_{yy} - \lambda_1 U = 0 \quad ; (x,y) \in D_2$

(6) $-U_{xx} + U_{yy} - \lambda_2 U = 0 \quad ; (x,y) \in D_3$

4- مسـألة (N)

المطلوب البحث عن الحل المنتظم $U(x, y)$ للمعادلات (4) و(5) و(6) في الساحة D باستثناء نقاط المستقيمين AA_0 و BB_0 والذي يحقق الشرط:

$$U(x, y)\in c(\overline{D}_1)\cap[c^1 (D_2\cup AA_0) \cap c^1 (D_3 \cup BB_0) \cap c^1(D_1 \cup AA_0 \cup BB_0)]$$

وكذلك للشروط الحدية الآتية:

(7) $U\big|_{A_0C} = \psi_1(y) \quad ; \quad \frac{1}{2} \le y \le 1$

(8) $U\big|_{BE} = \psi_2(y) \quad ; \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}$

(9) $U\big|_{y=0} = \varphi(x) \quad ; \quad 0 \le x \le 1$

والشروط الآتية:

(10)
$$\begin{aligned}
&U(-0, y) = \alpha_1 (y)\, U(+0, y) + \gamma_1 (y)\\
&U_x (-0, y) = \beta_1 (y)\, U_x (+0, y) + \delta_1 (y)\, U(+0, y) + \sigma_1 (y)\\
&U (1+0, y) = \alpha_2 (y)\, U (1-0, y) + \gamma_2 (y)\\
&U_x (1+0, y) = \beta_2 (y)\, U_x (1-0, y) + \delta_2 (y)\, U(1-0, y) + \sigma_2 (y)
\end{aligned}$$

وذلك بفرض أن:

$\alpha_1(y), \alpha_2(y), \beta_1(y), \beta_2(y), \gamma_1(y), \gamma_2(y), \sigma_1(y), \sigma_2(y), \delta_1(y), \delta_2(y), \psi_1(y), \psi_2(y)$, $\varphi(x)$ - دوال معطـاة معرفـة ومـستمرة وعـلاوة علـى ذلـك فـإن الـدوال $\alpha_1''(y), \varphi'(x), \psi_2''(y), \psi_1''(y), \gamma_1''(y)\ \gamma_2''(y), \beta_2''(y), \beta_1''(y), \alpha_2''(y)$, مستمرة.

لندخل الفرضيات الآتية:

$$(11)\qquad \begin{cases} U(+0,y)=\tau_1^{+}(y),\ U_x(+0,y)=\upsilon_1^{+}(y), \\ U(-0,y)=\tau_1^{-}(y),\ U_x(-0,y)=\upsilon_1^{-}(y), \\ U(1+0,y)=\tau_2^{-}(y),\ U_x(1+0,y)=\upsilon_2^{-}(y), \\ U(1-0,y)=\tau_2^{+}(y),\ U_x(1-0,y)=\upsilon_2^{+}(y) \end{cases}$$

وكما في العمل [4]، على المستقيمين AA_0 و$\mathbf{B}B_0$ نحصل على العلاقتين التـابعيتين الأساسيتين بين الدالتين $\overline{\tau_1}(y)$ و $\overline{\upsilon_1}(y)$ من جهة وبين الدالتين $\overline{\tau_2}(y)$ و $\overline{\upsilon_2}(y)$ مـن جهة ثانية وذلك في الساحتين D_2 وD_3 على الترتيب بالشكل الآتي:

$$(12)\qquad \tau_1^{-}(y)=\rho_1(y)+\int_y^1 J_0[\lambda_1(y-t)]\upsilon_1^{-}(t)dt \quad , \quad 0<y<1$$

$$(13)\qquad \tau_2^{-}(y)=\rho_2(y)+\int_0^y J_0[\lambda_2(y-t)]\upsilon_2^{-}(t)dt \quad , \quad 0<y<1$$

حيث:

$$\rho_1(y)=2\psi_1\left(\frac{y+1}{2}\right)-\psi_1(1)+\int_y^1\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda_1\sqrt{(y-1)(y-t)}\right)\ \left[2\psi_1\left(\frac{t+1}{2}\right)-\psi_1(1)\right]dt\ ;$$

$$\rho_2(y)=2\psi_2\left(\frac{y}{2}\right)-\psi_2(0)-\int_0^y\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda_2\sqrt{t(t-y)}\right)\ \left[2\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)-\psi_2(0)\right]dt\ ;$$

حيث J_0 – دالة بسل من النوع الأول والمرتبة صفر.

5- مبرهنـــة

إذا تحققت الشروط الآتية:

(14) $C(x, y) \le 0 \quad ; (x, y) \in D_1$

(15) $\dfrac{1}{\alpha_1(0)\beta_1(0)} > 0 \ , \ \dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1}{\alpha_1(y)\beta_1(y)}\right] \ge 0 \ , \ \dfrac{\delta_1(y)}{\beta_1(y)} \le 0$

(16) $\dfrac{1}{\alpha_2(1)\beta_2(1)} > 0 \ , \ \dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1}{\alpha_2(y)\beta_2(y)}\right] \le 0 \ , \ \dfrac{\delta_2(y)}{\beta_2(y)} \ge 0$

عندئذ يوجد للمسألة (N) حل وحيد.

__البرهان__: سنثبت أولاً وحدانية الحل:

نفرض أن الدالة $U(x, y) \neq const$ في $\overline{D}$ حل للمسألة المتجانسة الآتية:

$$U_{xx} - U_y + C(x, y)\, U = 0 \qquad ; (x,y) \in D_1$$

$$U_{yy} - U_{xx} - \lambda_j U = 0 \quad ; (x,y) \in D_i \quad i = 2, 3 \ ; j = 1,2$$

$$U\big|_{A_0C} = 0 \ ; \ U\big|_{BE} = 0 \ ; \ U\big|_{y=0} = 0$$

$$U(-0, y) = \alpha_1(y)\, U(+0, y)$$

$$U_x(-0, y) = \beta_1(y)\, U_x(+0, y) + \delta_1(y)\, U(+0, y)$$

$$U(1+0, y) = \alpha_2(y)\, U(1-0, y)$$

$$U_x(1+0, y) = \beta_2(y)\, U_x(1-0, y) + \delta_2(y)\, U(1-0, y)$$

سنبرهن أن الدالة: $U(x,y) \equiv 0$ حل لهذه المسألة المتجانسة وبناء عليه فإن المسألة غير المتجانسة تملك حلاً وحيداً.

عندئذ من أجل D_1 تكون المساواة الآتية صحيحة:

(17) $\dfrac{1}{2}\int_0^1 U^2(x,1)dx + \int_0^1 \tau_1^+(y)\upsilon_1^+(y)dy - \int_0^1 \tau_2^+(y)\upsilon_2^+(y)dy + \iint_{D_1}[U_x^2 - c(x,y)U^2]dxdy = 0$

من الضروري إيجاد التكاملين:

$$I_j = \int_0^1 \tau_j^+(y)\upsilon_j^+(y)dy \quad , j = 1,2$$

عندئذ من (12) و (13) وبملاحظة الشروط (10) مستفيدين من تعريف دالة بسل نجد ما يأتي:

$$I_1 = \int_0^1 \tau_1^+(y)\upsilon_1^+(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz\{\frac{1}{\alpha_1(0)\beta_1(0)} \times [(\int_0^1 \cos\lambda_1 zt\overline{\upsilon}_1(t)dt)^2 +$$

$$+(\int_0^1 \sin\lambda_1 zt\overline{\upsilon}_1(t)dt)^2] \quad \int_0^1 [\frac{1}{\alpha_1(y)\beta_1(y)}]'[(\int_y^1 \cos\lambda_1 zt\overline{\upsilon}_1(t)dt)^2 +$$

$$+(\int_y^1 \sin\lambda_1 zt\overline{\upsilon}_1(t)dt)^2]dy\} - \int_0^1 \frac{\delta_1(y)}{\alpha_1^2(y)\beta_1(y)}\overline{\tau}_1(y)dy \quad ,$$

$$I_2 = \int_0^1 \tau_2^+(y)\upsilon_2^+(y)dy \quad =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \times \{\frac{1}{\alpha_2(1)\beta_2(1)} \times (\int_0^1 \cos\lambda_2 zt\overline{\upsilon}_2(t)dt)^2 +$$

$$+\int_0^1 [\frac{1}{\alpha_2(y)\beta_2(y)}]' \times (\int_0^y \cos\lambda_2 zt\overline{\upsilon}_2(t)dt)^2 dy - \frac{1}{\alpha_2(1)\beta_1(1)} \times$$

$$\times(\int_0^1 \sin\lambda_2 zt\overline{\upsilon}_2(t)dt)^2 + \int_0^1 [\frac{1}{\alpha_2(y)\beta_2(y)}]'(\int_0^y \sin\lambda_2 zt\overline{\upsilon}_2(t)dt)^2 dy\} -$$

$$-\int_0^1 \frac{\delta_2(y)}{\alpha_2^2(y)\beta_2(y)}\overline{\tau}_2(y)dy$$

لنلاحظ أنه إذا تحققت جميع المتراجحات (15) و(16)، عندئذ من الـسهل الحـصول على:

$$I_1 = \int_0^1 \tau_1^+(y)\upsilon_1^+(y)dy \quad > 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \tau_2^+(y)\upsilon_2^+(y)dy \quad < 0$$

وعندئذ نستنتج من (17) أن: $U_x = 0$

إذن: $U(x, y) = \mu(y)$

ولما كان: $U(0,y) = U(1, y) = 0$

فإننا نجد: $\mu(y) \equiv 0$

أي أن: $U(x, y) \equiv 0 \quad ; \quad (x, y) \in \overline{D}_1$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية وبحسب وحدانية حل مسألة كوشي لجملة المعادلتين (2) و(3) في الساحتين D_2 وD_3 على الترتيب يجب أن يكون: $U(x, y) \equiv 0 \; ; \; (x, y) \in \overline{D}$ وهذا تناقض.

ونكون بهذا قد برهنا على صحة وحدانية الحل.

لننتقل الآن إلى إثبات وجود الحل:

يعطى حل المسألة المختلطة الأولى من أجل المعادلة القطعية المكافئية في الساحة المفتوحة D_1 [3] بالشكل الآتي:

$$U(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\tau_1^+(\eta)d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\tau_2^+(\eta)d\eta + \int_0^1 G(x,y,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^1 d\xi + \times\int_0^y C(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)U(\xi,\eta)d\eta \;) \qquad (18)$$

حيث:

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \quad -\exp\{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\}] \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\exp\{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\}$$

حيث $G(x,y;\xi,\eta)$ هي دالة غرين للمسألة المختلطة الأولى في الساحة D_1.

من أجل الحصول على العلاقة بين الدالتين $\tau_1^+(y)$ و $\upsilon_1^+(y)$ و كذلك العلاقة بـين الدالتين $\upsilon_2^+(y)$ و $\tau_2^+(y)$ على المستقيمين AA_0 وBB_0 ، يجب حل المعادلة التكامليـة (18) باستخدام النواة الحالة [9] وبناء عليه يكون:

$$U(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\tau_1^+(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\tau_2^+(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y \phi_1(\eta;x,y)\tau_1^+(\eta)d\eta+\int_0^y \phi_2(\eta;x,y)\upsilon_2^-(\eta)d\eta+\psi(x,y)+V(x,y)$$

حيث:

$$\phi_1(\eta;x,y)=\int_\eta^y\int_0^1 G_\xi(\theta,t,0,\eta)R_1(x,y;\theta,t)d\theta dt \quad ;$$

$$\phi_2(\eta;x,y)=-\int_\eta^y\int_0^1 G_\xi(\theta,t,1,\eta)R_1(x,y;\theta,t)d\theta dt \quad ;$$

$$V(x,y)=\int_0^1 G(x,y;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi;$$

$$\psi(x,y)=\int_0^y\int_0^1\int_0^1 R_1(x,y;\theta,t)G(\theta,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi d\theta dt$$

وذلك بفرض أن $R_1(x, y; \theta,t)$ النواة الحالة لـ $C(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)$.

لنستنتج الآن المشتقات الجزئية:

$$U_x\big|_{x=0}\equiv\upsilon_1^+(y)=\int_0^y\{-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})\}\tau_1^{+\prime}(\eta)d\eta+\int_0^y\{\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp[-\frac{1}{\sqrt{4(y-\eta)}}]+$$

$$+\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'[\exp\{-\frac{(-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}+\exp\{-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}]\}\times$$

$$(19)\times\ \tau_2^{+\prime}(\eta)d\eta+\int_0^y\phi_{1x}(\eta;0,y)\tau_1^+(\eta)d\eta+\int_0^y\phi_{2x}(\eta;0,y)\tau_2^+(\eta)d\eta+F_1(y)$$

$$u_x\big|_{x=1}\equiv\upsilon_2^+(y)=\int_0^y\{-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp[-\frac{1}{4(y-\eta)}]-$$

$$-\frac{1}{\pi(y-\eta)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}\ \tau_1^{+\prime}(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y\{\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})+$$

$$+\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp[-\frac{1}{y-\eta}]+\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{(1+2n)^2}{y-\eta}]\}\tau_2^{+\prime}(\eta)d\eta+\int_0^y\phi_{1x}(\eta;1,y)\tau_1^+(\eta)d\eta+$$

$$(20)\qquad +\int_0^y\phi_{2x}(\eta;1,y)\tau_2^+(\eta)d\eta+F_2(y)$$

حيث:

$$(21)\qquad F_{i+1}(y)=[\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}]_{x=i}\quad ;i=0,1$$

بحذف الدوال $\tau_i^+(y)$ و $\upsilon_i^+(y)$ و $\tau_i^-(y)$ عندما $i=1,2$ مـن (12) و(13) و(19) و(20) و(21) مستفيدين من الشروط (10)، نحصل على جملة معادلتين تكامليتين هما:

$$(22)\ \overline{\upsilon}_1(y)+\int_0^y M_1(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)d\eta+\int_y^1 M_2(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)d\eta+\int_0^y M_3(y,\eta)\overline{\upsilon}_2(\eta)d\eta=P_1(y);$$

$$(23)\ \overline{\upsilon}_1(y)+\int_0^y M_1(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)d\eta+\int_y^1 M_2(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)d\eta+\int_y^1 M_6(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)d\eta=P_2(y)\ .$$

وذلك بفرض أن:

$$M_1(y,\eta)=\frac{\beta_1(y)}{\alpha_1(\eta)\sqrt{\pi(y-\eta)}}[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})]+\beta_1(y)\times$$

$$\times\int_0^{\eta}\frac{\alpha_1(t)-\alpha_1'(t)}{\alpha_1^2(t)\sqrt{\pi(y-t)}}[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-t})]\frac{\partial}{\partial t}J_0\times$$

$$\times[\lambda_1(t-\eta)]dt-\beta_1(y)\int_0^{\eta}J_0[\lambda_1(t-\eta)\phi_{1x}(t;0,y)dt\ \ ;$$

$$M_2(y,\eta)=\beta_1(y\int_0^{y}\frac{\alpha_1(t)-\alpha_1'(t)}{\alpha_1^2(t)\sqrt{\pi(y-t)}}[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-t})]\frac{\partial}{\partial t}J_0$$

$$\times[\lambda_1(t-\eta)]d\eta-\beta_1(y)\int_0^{y}J_0[\lambda_1(t-\eta)\phi_{1x}(t;0,y)dt-\frac{\delta_1(y)J_0[\lambda_1(y-\eta)]}{\alpha_1(y)};$$

$$M_3(y,\eta)=\frac{\beta_1(y)}{\alpha_2(\eta)\sqrt{\pi(y-\eta)}}\{\exp[-\frac{1}{4(y-\eta)}]+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'[\exp\{-\frac{(-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}+$$

$$\beta_1(y)\int_{\eta}^{y}\frac{\alpha_2(t)+\alpha_2'(t)}{\alpha_2^2(t)\sqrt{\pi(y-t)}}\{\exp[-\frac{1}{4(y-t)}]+\ +\exp\{-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}]\}+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{2}[\exp\{-\frac{(-1+2n)^2}{4(y-t)}\}+\exp\{-\frac{(1+2n)^2}{4(y-t)}\}]\}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}J_0[\lambda_2(t-\eta)]dt+\beta_1(y)\int_{\eta}^{y}J_0[\lambda_2(t-\eta)]\phi_{2x}(t;0,y)dt\qquad;$$

$$\frac{\beta_2(y)}{\alpha_2(\eta)\sqrt{2\pi(y-\eta)}}\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})\ M_4(y,\eta)=+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}+\ +\exp[-\frac{1}{y-\eta}]+$$

$$+\beta_2(y)\int_{\eta}^{y}\frac{\alpha_2(t)+\alpha_2'(t)}{\alpha_2^2(t)\sqrt{2\pi(y-t)}}\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-t})+\exp[-\frac{1}{y-t}]+$$

$$[\lambda_2(t-\eta)]dt++\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{/}\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-t)}]\}\frac{\partial}{\partial t}J_0$$

$$+\frac{\delta_2(y)J_0[\lambda_2(y-\eta)]}{\alpha_2(y)}\quad ;+\beta_2(y)\int_{\eta}^{y}J_0[\lambda_2(t-\eta)]\phi_{2x}(t;1,y)dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{/}\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}\ \frac{\beta_2(y)}{\alpha_1(\eta)\sqrt{\pi(y-\eta)}}\{\exp[-\frac{1}{y-\eta}]+M_5(y,\eta)=+$$

$$+\beta_2(y)\int_{0}^{\eta}\frac{\alpha_1(t)-\alpha_2'(t)}{\alpha_1^2(t)\sqrt{\pi(y-t)}}\{\exp[-\frac{1}{4(y-t)}]+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{/}\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}\frac{\partial}{\partial t}J_0\ \times[\lambda_1(t-\eta)]dt-$$

$$-\beta_2(y)\int_{0}^{\eta}J_0[\lambda_1(t-\eta)]\phi_{1x}(t;1,y)dt\ \ ;$$

$$\beta_2(y)\int_{0}^{y}\frac{\alpha_1(t)-\alpha_1'(t)}{\alpha_1^2(t)\sqrt{\pi(y-t)}}\{\exp[-\frac{1}{4(y-t)}]+M_6(y,\eta)=$$

$$[\lambda_1(t-\eta)]dt-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{/}\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-t)}]\}\frac{\partial}{\partial t}J_0\times$$

$$\frac{\delta_1(y)J_0[\lambda_1(y-\eta)]}{\alpha_1(y)}\qquad ;-\beta_2(y)\int_{0}^{y}J_0[\lambda_1(t-\eta)]\phi_{1x}(t;1,y)dt-$$

$P_1(y)=\beta_1(y)\,F_1(y)+\sigma_1(y)+$

$$+\frac{\delta_1(y)[\rho_1(y)-\gamma_1(y)]}{\alpha_1(y)}+\beta_1(y)\int_{0}^{y}\{\frac{\rho_1(t)-\gamma_1(t)}{\alpha_2(t)}+\phi_{1x}(t;0,y)+$$

$$\phi_{2x}(t;0,y)\}dt-\beta_1(y)\int_0^y\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times+\frac{\rho_2(t)-\gamma_2(t)}{\alpha_2(t)}\times$$

$$\times\{\frac{\alpha_1(\eta)\rho_1'(\eta)-\alpha_1'(\eta)\rho_1(\eta)+\alpha_1'(\eta)\gamma_1(\eta)-\alpha_1(\eta)\gamma_1'(\eta)}{\alpha_1^2(\eta)}\times$$

$$\times[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})]\}d\eta+\ \beta_1(y)\int_0^y\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times$$

$$\times\frac{\alpha_2(\eta)\rho_2'(\eta)-\alpha_2'(\eta)\rho_2(\eta)+\alpha_2'(\eta)\gamma_2(\eta)-\alpha_2(\eta)\gamma_2'(\eta)}{\alpha_2^2(\eta)}\times$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'[\exp\{-\frac{(-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}+\times\{\exp[-\frac{1}{4(y-\eta)}]+$$

$$+\exp\{-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\}]\}d\eta\qquad;$$

$$P_2(y)=\beta_2(y)\,F_2(y)+\sigma_2(y)+$$

$$+\frac{\delta_2(y)[\rho_2(y)-\gamma_2(y)]}{\alpha_2^2(y)}+\beta_2(y)\int_0^y[\frac{\rho_1(t)-\gamma_1(t)}{\alpha_1(t)}\times\phi_{1x}(t;1,y)+$$

$$\phi_{2x}(t;1,y)]dt-\beta_2(y)\int_0^y\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times\quad+\frac{\rho_2(t)-\gamma_2(t)}{\alpha_2(t)}\times$$

$$\times\frac{\alpha_1(\eta)\rho_1'(\eta)-\alpha_1'(\eta)\rho_1(\eta)+\alpha_1'(\eta)\gamma_1(\eta)-\alpha_1(\eta)\gamma_1'(\eta)}{\alpha_1^2(\eta)}\times$$

$$\beta_2(y)\int_0^y\frac{1}{2\times\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}d\eta+\times\{\exp[-\frac{1}{4(y-\eta)}]+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\exp[-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}]\}d\eta\ \exp[-\frac{1}{(y-\eta)}]+\times\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2}{y-\eta})+.$$

بحل المعادلة (23) بالنسبة للدالة $\overline{\upsilon}_2(y)$ نجد:

$$\overline{\upsilon}_2(y)=P_3(y)-\int_0^y M_7(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)\,d\eta-\int_y^1 M_8(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)\,d\eta\quad(24)$$

حيث:

$$\int_0^{\eta} M_6(t,\eta)R_2(y,t)dt;\ M_7(y,\eta)=M_5(y,\eta)+\int_{\eta}^{y} M_5(t,\eta)R_2(y,t)dt+$$

$$M_8(y,\eta)=M_6(y,\eta)+\int_0^{y} M_6(t,\eta)R_2(y,t)dt\ ;P_3(y)=P_2(y)+\int_0^{y} P_2(\eta)R_2(y,\eta)d\eta\ ;$$

وذلك بفرض أن $R_2(y,\eta)$ النواة الحالة لـ $M_4(y,\eta)$.

ولو فرضنا أن:
$$k(y,\eta)=\begin{cases} k_1(y,\eta) & if \quad 0\le\eta\le y \\ k_2(y,\eta) & if \quad y<\eta\le 1 \end{cases}$$

وعوضنا (24) في (22) نحصل بذلك على معادلة فريدهولوم التكاملية من النوع الثاني بالنسبة للتابع $\overline{\upsilon}_1(y)$:

$$\overline{\upsilon}_1(y)+\int_0^1 k(y,\eta)\overline{\upsilon}_1(\eta)\,d\eta=P(y) \qquad (25)$$

حيث:

$$k_1(y,\eta)=M_1(y,\eta)-\int_{\eta}^{y} M_3(y,t)M_7(t,\eta)dt - \int_0^{\eta} M_3(y,t)M_8(t,\eta)dt\ ;$$

$$k_2(y,\eta)=M_2(y,\eta)-\int_0^{y} M_3(y,t)M_8(t,\eta)dt\ ;P(y)=P_1(y)-\int_0^{y} M_3(y,t)P_3(t)dt\ .$$

ومن ثم نجد استناداً إلى فرضية فريدهولوم في المعادلات التكاملية واعتماداً على برهان وحدانية الحل أن المعادلة التكاملية (25) لها حل وحيد مستمر. ثم من العلاقات (10)، (12)، (13)، (23)، (25) تحدد بشكل وحيد الدوال $\tau_1^+(y)$, $\tau_2^+(y)$ $\tau_1^-(y)$, $\tau_2^-(y)$, $\upsilon_1^+(y)$, $\upsilon_2^+(y)$, $\upsilon_1^-(y)$, $\upsilon_2^-(y)$, . وبهذا نحصل على حل المسألة المطروحة في الساحة D_1. أما إيجاد الحل في الساحتين D_2 و D_3 فيتم على نحو مشابه لحل مسألة كوشي في المستوي xoy.

وبهذا نكون قد أثبتنا وجود حل للمسألة المطروحة.

المــراجــع

1. أليموف ش. آ و بولاتوف آ. ك. إحدى مسائل القيم الحدية اللاموضعية لمسألة بيتـسادزي. مجلـة أكاديمية العلوم في جمهورية أوزبكستان. رقم (1)، ص 8-12، 1992.
2. بيتسادزي أ. ب. مسائل القيم الحدية اللاموضعية. مجلة أكاديمية العلـوم فـي اتحـاد الجمهوريـات الاشتراكية السوفياتية. الجزء (277)، رقم (1)، ص 17- 19، 1984.
3. جورايف ت. د. مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية المختلطة وذات التكوين المخـتلط. طـشقند 1979.
4. سابويف آ. إحدى مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية المكافئية- الزائدية. مجلة أكاديمية العلوم في جمهورية أوزبكستان، رقم (2)، ص 87-99، 1982.
5. سميرنوف م. م. المعادلات التفاضلية المختلطة. موسكو 1985.
6. فلاديميروف ف. ش. المعادلات الرياضية الفيزيائية. موسكو 1981.
7. كيريفوف آ. آ. مسألة جيفري لإحدى المعادلات التفاضلية المكافئية " مجلة المعـادلات التفاضـلية ". الجزء (13)، رقم (1)، ص 76-83، موسكو 1977.
8. محمد مناف الحمد. إحدى مسائل القيم الحدية اللاموضعية للمعادلات التفاضـلية المختلطـة. مجلـة جامعة دمشق للعلوم الأساسية. المجلد 12- العدد الأول، ص 41-50، 1996.
9. موسخيليشيفي ن. ي. المعادلات التكاملية الشاذة. موسكو 1962.