صفان من المنطويات المترية التلامسية ثلاثية الأبعاد شبه المتناظرة جزئيا ومن نمط ريشي

ريم أبوراس[1] و محمد الشيخ[1] و سمير أبو عقل[2]

[1] قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق – سورية

[2] قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة المدنية – جامعة دمشق - سورية

تاريـــخ الإيداع 2008/03/09

قبل للنشـــر في 2008/07/15

الملخص

ندرس في هذا البحث صفين(صنفين) من المنطويات المترية التلامسية ثلاثية البعد M^3، حيث نوجد في البداية الشرط اللازم والكافي حتى يكون المنطوي المتري التلامسي منطوياً ريشي ***(Ricci)*** شبه متناظر جزئياً من النمط الثابت. ثم نوجد بعد ذلك علاقتين يجب أن يحققهما المنطوي المتري التلامسي ثلاثي البعد ومن النمط _ (k,m,n) ،ليكون منطوياً ريشياً شبه متناظر جزئياً ومن النمط الثابت.

الكلمات المفتاحية: المنطوي المتري التلامسي ثلاثي البعد، المنطوي ريشي شبه المتناظر جزئياً من النوع الثابت، المنطوي المتري التلامسي من النمط _ (k,m,n).

رقم التصنيف الرياضياتي: *53C25, 53D10*

Two classes of pseudo-Ricci-symmetric contact metric three manifolds

R. Abou ras[1]; M. Alshiek[1] and S. AbouAkl[2]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria
[2] Department of Basic Sciences, Faculty of Civil Ing, Damascus University, Syria

Received 09/03/2008
Accepted 15/07/2008

ABSTRACT

In this article we study two classes of contact metric three manifolds, where first we investigate the necessary and sufficient condition for the contact metric three manifold to be partially pseudo- Ricci-symmmetric manifold of constant type.

We find also two relations that the 3-dimensional (k,m,n)_ contact metric manifold has to satisfy to be partially pseudo- Ricci-symmetric manifold of constant type.

Key words: Contact metric three manifold, Contact metric partially pseudo- Ricci-symmmetric manifold of constant type, (k,m,n)_ Contact metric manifold.

Mathematics Subject Classification: 53D10 ,53C25

1- المقدمة [2][3][[6]

المنطوي التلامسي هو منطوٍ تفاضلي M^{2n+1} بعده $2n+1$، معرف عليــه شــكل أحادي شامل h بحيث يكون: $h \wedge (dh)^n \neq 0$ في كل نقطة من المنطوي M^{2n+1}.

يوجد لكل منطوٍ تلامسي بنية مترية تلامسية رديفة (f,x,h,g)، حيث x حقل متجهات شامل يدعى حقل المتجهات المميز، أوحقل ريب *(Reeb)*، f حقل تنسوري شــامل مــن النمط *(1,1)* ، و g مترك ريماني يدعى المترك المشارك، بحيث تتحقق العلاقات الآتية:

$$h(x) = 1 \quad , \qquad f^2 = -I + h \otimes x$$

$$g(fX, fY) = g(X,Y) - h(X)h(Y)$$

$$dh(X,Y) = g(X, fY)$$

$$dh(x, X) = 0$$

نرمز بــ ∇ إلى صلة ريمان (أو صلة ليفي- سيفيتا)، وبــ l إلى اشتقاق لــي *(Lie-derivation)* وبــ R،S،Q، r إلى تنسور التقوس المقابل لــ ∇، تنسور ريشي، مؤثر ريشي ،والتقوس السلمي على الترتيب.

نقول عن المنطوي المتري M^{2n+1} إنهK _تلامسي، إذا كان x حقــل متجهــات كيلينغ *(Killing)* أي $l_x g = 0$.

يؤدي الحقلان التنسوريان:

$$\ell = R(\cdot,x)x \qquad\qquad h = \frac{1}{2} l_x f$$

دوراً أساســـياً فـــي نظريـــة المنطويـــات التلامـــسية. إن h مـــؤثر متنـــاظر *(g(hX,Y)=g(X,hY))*، وهو مؤثر متبادل تخالفياً مع f أي إن $hf + fh = 0$.

يكون المنطوي M^{2n+1} منطويا K_تلامسي إذا وفقط إذا كان *h=0*.

إذا كانت البنية العقدية تقريبا J المعرفة على $M^{2n+1} \times R$ بالشكل:

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (fX - fx, h(X)\frac{d}{dt})$$

(حيث f دالة حقيقية)، قابلة للمكاملة فنقول عن البنية التلامسية إنها ناظمية، ويـــسمى M^{2n+1} عندئذٍ منطوي سازاكي *(Sasakian manifold)*.

أي إن المنطوي السازاكي هو منطوٍ متري تلامسي ناظمي، ويكون المنطـــوي غيـــر سازاكي إذا كان لا يحقق شرط الناظمية. من السهل أن نلاحـــظ أن المنطـــوي المتـــري التلامسي ثلاثي البعد يكون منطوي سازاكي إذا وفقط إذا كان *h=0*.

لدينا العلاقات الآتية:

$$h \circ f = h \circ h = 0 \qquad fx = hx = lx = 0$$

$$hf + fh = 0 \qquad \nabla_X x = -fX - fhX$$

$$Tr\,\ell = g(Qx,x) = 2n - Tr\,h^2 \qquad Trhf = Trh = 0$$

$$\nabla_x h = f - fl - f h^2 \qquad \nabla_x x = 0$$

$$flf - l = 2(f^2 + h^2) \qquad \nabla_x f = 0$$

ليكن الآن (M,f,x,h,g) منطوياً مترياً ثلاثي الأبعاد ،ولتكن Uالمجموعة الجزئيـــة المفتوحة من M التي يكون عليها $h \neq 0$ ، وV المجموعة الجزئية المفتوحة من M التـــي يكون عليها *h=0*، وذلك في جوار للنقطة p منM .عندئـــذ تكـــون $U \cup V$ مجموعـــة مفتوحة من M.يوجد لكل نقطة من $U \cup V$ جوار في هذه المجموعة، وقاعدة متعامـــدة معيرة محلية: $\{e, fe, x\}$

من المتجهات الذاتية لـــh ومعرفة في هذا الجوار .نضع في النقاط التي تنتمي إلـــىU العلاقة: $he = le$

حيث: l دالة ملساء لا تنعدم ،التي نفترضها موجبة .

عندئذٍ: $hfe = -l\,fe$

عندما تكون $l = 0$ فإن العمل سيكون على المجال V وسيكون المنطـــوي ســـازاكي وهي حالة خاصة، أما إذا كانت l سالبة فنأخذ القاعـــدة $\{e', fe', x\}$ حيـــث $e' = fe$ متجه ذاتي لـــ h يقابل القيمة الذاتية الموجبـــة $l' = -l$ ، و $fe' = f^2 e = -e$ يقابـــل القيمة السالبة $-l' = l$.

عندئذ تكون القضايا الثلاث الآتية على المنطويات المترية ثلاثية البعد محققة:

قضية - 1: [3]

لدينا على المجموعة U العلاقات الآتية:

$$\nabla_X fe = ae \quad ، \quad \nabla_X e = -afe \quad ، \quad \nabla_X x = 0$$

$$(1,1)\quad \nabla_e fe = re + (l+1)x \quad ، \quad \nabla_e e = -rfe \quad ، \quad \nabla_e x = -(l+1)fe$$

$$\nabla_{fe} fe = -s\quad e \quad ، \nabla_{fe} e = sfX + (l-1)x \quad ، \quad \nabla_{fe} x = -(l-1)e$$

حيث: a دالة ملساء.

$$r = -\frac{1}{2l}[fe(l) + A] \qquad , \qquad s = -\frac{1}{2l}[e(l) + B]$$

$$A = S(x,e) = r(1-l-a) - x(s) - fe(a)$$

$$B = S(x,fe) = s(a-l-1) - x(r) + e(a)$$

قضية 2: [3]

تعطى مركبات مؤثر ريشي بالنسبة إلى القاعدة $\{e, fe, x\}$ بـــ:

$$Qx = 2(1-l^2)x + Ae + Bfe$$

$$(1,2)\quad Qe = Ax + (\frac{r}{2} - 1 + l^2 + 2al)e + x(l)fe$$

$$Qfe = Bx + x(l)e + (\frac{r}{2} - 1 + l^2 - 2al)fe$$

قضية -3: [3]

إن مركبات تنسور التقوس R بالنسبة إلى القاعدة $\{e, fe, x\}$ تعطى بـــ:

$$R(e,fe)e = Bx + dfe \qquad R(x,e)x = -be + x(l)fe$$

$$R(x,e)fe = -x(l)x + Be \qquad R(x,fe)x = x(l)e - cfe$$

$$(1,3)\quad R(x,fe)fe = cx - Ae \qquad R(e,fe)x = -Be + Afe$$

$$R(e,fe)fe = -Ax + de \qquad R(x,e)e = bx - Bfe$$

$$R(x,fe)e = -x(l)x + Afe$$

حيث:

$$c = l^2 - 1 + 2al \qquad , \qquad b = l^2 - 1 - 2al$$

$$d = \frac{r}{2} + 2l^2 - 2 \quad ,$$

$$r = 2[1 - l^2 - r^2 - s^2 - 2a - e(s) - fe(r)]$$

علماً أن: $R(e_i, e_j)e_k = -R(e_j, e_i)e_k$

وحيث: $e_1 = x,\ e_2 = e,\ e_3 = fe$

2- منطويات ريشي المترية التلامسية شبه المتناظرة جزئياً

2-1 تعريف :*[7][4]*

نقول عن منطوٍ ريما ني *(M,g)* إنه شبه متناظر إذا حقق تنسور التقوس R العلاقة:

$$(R(X,Y).R)(U,V,W) = L[((X \wedge Y).R)(U,V,W)] \qquad (2,1)$$

وذلك أياً كانت حقول المتجهات *X,Y,U,V,W* المعرفة على M، حيث $L \in C^{\infty}(M)$

و:

1. $(R(X,Y).R)(U,V,W) = R(X,Y)(R(U,V)W) - $
$-R(R(X,Y)U,V)W - R(U,R(X,Y)V)W - R(U,V)(R(X,Y)W)$
2. $(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$
3. $((X \wedge Y).R)(U,V,W) = (X \wedge Y)(R(U,V)W) - $
$-R((X \wedge Y)U,V)W - R(U,(X \wedge Y)V)W - R(U,V)((X \wedge Y)W)$

عندما $L = Const \neq 0$ ، فإن M يدعى منطو شبه متناظر من النمط الثابت.

إذا كان M منطوياً مترياً، والعلاقة *(2,1)* محققة من أجل حقول متجهية معينة مثل:

$$Y = U = x$$

فإن M يدعى منطوياً شبه متناظر جزئياً من النوع الثاني، أو اختصاراً شبه متنــاظر جزئياً.

2-2 تعريف:*[6]*

نقول عــن منطــوٍ متــري تلامــسي $M^{2n+1}(f,x,h,g)$ إنــه منطــوٍ مــن النمط_(k,m,n)، إذا وجدت دوال ملساء k,m,n بحيث يحقق تنسور التقوس العلاقــة الآتية:

$$R(X,Y)x = k(h(Y)X - h(X)Y) + m(h(Y)hX - h(X)hY) + n(h(Y)fhX - h(X)fhY) \qquad (2,2)$$

أياً كان حقلا المتجهات X,Y المعرفان على M .

إذا كان $n=0$ فنقول عن المنطوي إنه من النمط (k,m) .

يمكن أن تكتب العلاقة $(2,2)$ بالشكل : [6]

$$R(x,X)Y = k(g(X,Y)x - h(Y)X) + m(g(hX,Y)x - h(Y)hX) \\ +n(g(fhY,X)x - h(Y)fhX) \qquad (2,3)$$

2-3 تعريف: *[1]*

نقول عن المنطوي المتري التلامسي $M^{2n+1}(f,x,h,g)$ إنه منطوٍ ريشي شبه متناظر إذا حقق:

$$(R(X,Y)\circ S)(U,V) = L[((X\wedge Y)\circ S)(U,V)] \qquad (2,4)$$

وذلك أياً كانت حقول المتجهات X,Y,U,V المعرفة على M، حيث $L\in C^{\infty}(M)$.

إن العلاقة السابقة تكتب أيضاً بالشكل :

$$S(R(X,Y)U,V) + S(U,R((X,Y)V) \\ = L[S(X\wedge Y)U,V) + S(U,(X\wedge Y)V)] \qquad (2,5)$$

وإذا تحققت العلاقة $(2,4)$ أو $(2,5)$ من أجل $(Y=V=x)$ فنقول عن M^3 إنه منطوٍ ريشي شبه متناظر جزئياً.

2-4 مبرهنة:

ليكن M^3 منطوياً مترياً تلامسياً. عندئذ يكون M^3 منطوياً ريشي شبه متناظر جزئياً من النمط الثابت $L=Const\neq 0$ ، إذا وفقط إذا حقق:

$$B^2 + (b-L)(\frac{r}{2} - 3 + 3l^2 + 2al) - [x(l)]^2 = 0$$

$$A^2 + (c-L)(\frac{r}{2} - 3 + 3l^2 - 2al) - [x(l)]^2 = 0$$

$$AB + (\frac{r}{2} + 2l^2 - 2 + L)x(l) = 0$$

$$A(b-L) = Bx(l)$$

$$B(c-L) = Ax(l)$$

البرهان:

إذا استخدمنا العلاقات *(1,2)* نجد:

$$\begin{aligned}
&g(Qx,e)=S(x,e)=A\\
&g(Qx,x)=S(x,x)=2(1-l^2)\\
&g(Qe,e)=S(e,e)=\frac{r}{2}-1+l^2+2al\\
&g(Qe,fe)=S(e,fe)=x(l)\\
&g(Qfe,fe)=S(fe,fe)=\frac{r}{2}-1+l^2-2al\\
&g(Qfe,x)=S(fe,x)=B
\end{aligned}\tag{2,6}$$

لنفترض أن العلاقة *(2,5)* محققة $(Y=V=x)$ أي :

$$\begin{aligned}
&S(R(X,x)U,x)+S(U,R((X,x)x)=\\
&L[S(X\wedge x)U,x)+S(U,(X\wedge x)x)]
\end{aligned}\tag{2,7}$$

نستخدم الآن العلاقة *(2,7)*، وذلك من أجل بعـــض الحـــالات الخاصــــة لقـــيم *X,U*.

نضع $U=e$ ، $X=e,$ ، ونستخدم العلاقات*(2,6)* لحساب الطرف الأيسر والمقـــدار الموجود بين قوسين في الطرف الأيمن فنجد:

$$\begin{aligned}
&S(R(e,x)e,x)+S(e,R(e,x)x)=S(-bx+Bfe,x)+S(e,be-x(l)fe)\\
&-bS(x,x)+BS(fe,x)+bS(e,e)-x(l)S(e,fe)\\
&=-2b(1-l^2)+B^2+b(\frac{r}{2}-1+l^2+2al)-[x(l)]^2
\end{aligned}$$

من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}
&S((e\wedge x)e,x)+S(e,(e\wedge x)x)=-S(x,x)+S(e,e)\\
&=-2(1-l^2)+(\frac{r}{2}-1+l^2+2al)
\end{aligned}$$

وعندئذٍ فإن العلاقة*(2,7)* تأخذ الشكل :

$$B^2+b(\frac{r}{2}-3+3l^2+2al)-[x(l)]^2=L[\frac{r}{2}-3+3l^2+2al]$$

بالإصلاح:

$$B^2+(b-L)(\frac{r}{2}-3+3l^2+2al)-[x(l)]^2=0 \tag{2,8}$$

نضع الآن $X=fe,\quad U=fe$ في *(2,7)*، ونستخدم العلاقات*(2,6)*، فنجد بالطريقة نفسها العلاقة :

$$A^2+(c-L)(\frac{r}{2}-3+3l^2-2al)-[x(l)]^2=0 \tag{2,9}$$

نضع الآن $X=e,\quad U=fe$ في *(2,7)* فنحصل على :

$$2x(l)(1-l^2)-AB+cx(l)-x(l)(\frac{r}{2}-1+l^2-2al)=Lx(l)$$

بالإصلاح نحصل على العلاقة:

$$AB+(\frac{r}{2}+2l^2-2+L)x(l)=0 \tag{2,10}$$

بشكل مماثل إذا وضعنا في العلاقة*(2,7)* $X=fe,\quad U=e$ ، فنحصل على العلاقة *(2,10)* نفسها.

نضع الآن $X=e,\ U=x$ في *(2,7)* فنحصل على:

$$A(b-L)=Bx(l) \tag{2,11}$$

نضع الآن $X=fe,\ U=x$ في *(2,7)* فنحصل على:

$$B(c-L)=Ax(l) \tag{2,12}$$

وهذه الخيارات الممكنة جميعها لحقول المتجهات من القاعدة المعيرة $\{e,fe,x\}$.

وبالعكس إذا تحققت العلاقات*(2,8),(2,9),(2,10),(2,11),(2,12)* فلا بد أن تتحقق *(2,7)* من أجل قيم X,U جميعها المأخوذة من القاعدة $\{e,fe,x\}$.

فإذا أخذنا عنصرين كيفيين U ، X من الشكل:

$$X=a_1e+a_2fe+a_3x,\qquad U=b_1e+b_2fe+b_3x$$

وعوضنا في الطرف الأيسر للمعادلة:

$$S(R(X,x)U,x)+S(U,R((X,x)x)-$$
$$L[S(X\wedge x)U,x)+S(U,(X\wedge x)x)]=0$$

المكافئة لــ *(2,7)* محققة لوجدنا باستخدام العلاقات *(2,8)*,*(2,9)*,*(2,10)*,*(2,11)*(*2,12)* أن:

$$[B^2+(b-L)(\frac{r}{2}-3+3l^2+2al)-[x(l)]^2]a_1b_1=0$$

$$[A^2+(c-L)(\frac{r}{2}-3+3l^2-2al)-[x(l)]^2]a_2b_2=0$$

$$[AB+(\frac{r}{2}+2l^2-2+L)x(l)](a_1b_2+a_2b_1)=0$$

$$2[A(b-L)-Bx(l)]a_1b_3=0$$

$$2[B(c-L)-Ax(l)]a_2b_3=0$$

مما يعني أن العلاقة *(2,7)* محققة . وبذا يتم برهان العكس .

2-5 مبرهنة:

ليكن M^3 منطوياً مترياً تلامسياً من النمط_ (k,m,n)، ولنفترض أن M^3 هو أيضاً منطوٍ ريشي شبه متناظر جزئياً من النمط الثابت $L\neq 0$، غير سازاكي، عندئذٍ لا بد أن يكون $n=0$، وتتحقق المعادلات:

$$[d+(-k+lm)][L-(k+lm)]=0$$

$$[d+(k+lm)][L+(-k+lm)]=0$$

$$A[(k+lm)-L]=0$$

$$B[(-k+lm)+L]=0$$

البرهان :

نجد بداية بالاستناد إلى العلاقتين *(2,2)*,*(2,3)* ما يأتي:

$$R(x,e)fe=lnx \qquad R(x,e)x=-(k+lm)e-lnfe$$

$$R(x,fe)fe=(k-lm)x \qquad R(x,fe)x=-lne+(-k+lm)fe$$

$$R(x,e)e=(k+lm)x \qquad R(e,fe)x=0 \tag{2,13}$$

$$R(x,fe)e=lnx$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} &g(Qfe,x) = -B \\ &g(Qfe,fe) = -[(-k + lm) + d] \\ (2,14) \quad &g(Qe,x) = S(e,x) = -A \\ &g(Qe,e) = S(e,e) = (k + lm) + d \\ &g(Qx,x) = 2k \\ &g(Qe,fe) = S(e,fe) = ln \end{aligned}$$

لنفترض أن العلاقة *(2,7)* محققة.

نضع $U = e \quad X = e,$ ، ونستخدم العلاقات *(2,14)* لإيجاد الطرف الأيسر والمقدار الموجود داخل قوسين في الطرف الأيمن من *(2,7)*:

$$S(R(e,x)e,x) + S(e,R(e,x)x) = -2k(k + lm) +$$
$$+(k + lm)[(k + lm) + d] + l^2n^2$$

من جهة أخرى:

$$S((e \wedge x)e,x) + S(e,(e \wedge x)x) = -2k + (k + lm) + d$$

بالإصلاح نجد :

$$(2,15) \qquad [d + (-k + lm)][L - (k + lm)] = l^2n^2$$

نضع الآن $U = fe \quad X = fe,$ في *(2,7)*، وباستخدام العلاقات *(2,14)* نجد بالطريقة نفسها العلاقة:

$$2k(-k + lm) + (-k + lm)[(-k + lm) + d] + l^2n^2 =$$
$$-L[2k + (-k + lm) + d]$$

بالإصلاح نجد المعادلة:

$$(2,16) \quad [d + (k + lm)][L + (-k + lm)] = -l^2n^2$$

نضع $U = fe \quad X = e,$ في *(2,7)*، فنحصل على المعادلة:

$$(2,17) \qquad (d - L)ln = 0$$

في حالة $U = e \quad X = fe,$ نحصل على المعادلة:

$$(d+L)\,l\,n = 0 \tag{2,18}$$

لندرس الجملة *(2,17),(2,18)*:

لنفترض الآن أنه توجد نقطة Pحيث يتحقق عندها أن $n \neq 0$. ومن ثم ونظراً لأن n دالة عددية ملساء مستمرة فإنه يوجد جوار مفتوح U للنقطة P حيث $n \neq 0$.

لنأخذ الآن المجموعات الجزئية المفتوحة من U الآتية:

$$V_1 = \{P \in U : d - L = 0 \quad ,d + L \neq 0\}$$
$$V_2 = \{P \in U : d + L = 0 \quad ,d - L \neq 0\}$$
$$V_3 = \{P \in U : d - L \neq 0 \quad ,d + L \neq 0\}$$
$$V_4 = \{P \in U : d - L = 0 \quad ,d + L = 0\}$$

لدينا في V_1:

نجد من العلاقتين *(2,17),(2,18)* أنه لا بد أن يكون $n = 0$، ومن ثم $V_1 = f$.

لدينا في V_2:

نجد من العلاقتين *(2,17),(2,18)* أنه لا بد أن يكون $n = 0$، ومن ثم $V_2 = f$.

لدينا في V_3 :

نجد من العلاقتين *(2,17),(2,18)* ولأن المنطوي غير ســازاكي لا بــد أن يكــون $n = 0$، ومن ثم $V_3 = f$.

لدينا في V_4:

نجد $d+L=0$, $d-L=0$. بجمع العلاقتين ينتج أن $d=0$ ، ومن ثم $L=0$، وهــذا يناقض الفرض، ومن ثم $V_4 = f$.

ومنه لابد أن يكون $n = 0$على المنطوي .

نضع الآن $X = e,\ U = x$ في *(2,7)*، فنحصل على المعادلة:

$$A[(k + l m) - L] = -B\,l\,n = 0 \tag{2,19}$$

ونضع $X = fe,\ U = x$ في *(2,7)*، فنحصل على المعادلة:

$$B[(-k+lm)+L]=Aln=0 \qquad (2,20)$$

وبهذا يتم المطلوب.

2-6 نتيجة:

ليكن M^3 منطوياً مترياً K_تلامسياً من النمط (k,m,n)، ولنفترض أن M^3 هو أيضاً منطوٍ ريشي شبه متناظر جزئياً، عندئذٍ لا بد أن يكون M^3 من النمط الثابت $(L=Const\neq 0)$، أضف إلى ذلك :

$$k=1,\quad A=B=0,\qquad L=1$$

في الحقيقة لدينا العلاقة الآتية محققة على المنطويات المترية التلامسية ثلاثية البعد $R(e,fe)x=-Be+Afe$ (إحدى علاقات *(1,3)*)، ولما كان المنطوي M^3 من النمط (k,m,n) فإن $R(e,fe)x=0$ (إحدى علاقات *(2,11)*) . ينتج من العلاقتين السابقتين أن: $A=B=0$

ونظراً لأن المنطوي K_تلامسي فإن العلاقات *(2,14)* تأخذ الشكل :

$$\begin{aligned} &g(Qfe,x)=-B=0\\ &g(Qfe,fe)=k-d\\ (2,21)\qquad &g(Qe,x)=S(e,x)=-A=0\\ &g(Qe,e)=S(e,e)=k+d\\ &g(Qx,x)=2k=2\\ &g(Qe,fe)=S(e,fe)=ln=0\end{aligned}$$

ومن ثم نجد أن $k=1$.

نضع $X=e,\quad U=e$ في *(2,7)*، ونستخدم العلاقات *(2,21)* فنجد العلاقة:

$$(2,22)\qquad (d-1)(L-1)=0$$

نضع $X=fe,\quad U=fe$ في *(2,7)*، فنحصل على المعادلة:

$$(2,23)\qquad (d+1)(L-1)=0$$

من العلاقتين السابقتين نجد أن $L=1$.

REFERENCES

[1] Binh, T. Q, De, U. C., Tamassy, L. (2002). On partially pseudo symmetric K_contact Riemannian manifold. Acta Mathematica academiae paedgogicea Nyiregyhaziensis, 18, 19-25.

[2] Blair, D. E. (2002). Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics. vol 203, Birkhauser, Boston. Basel .Berlin.

[3]Calvaruso, G.; Perrone, D. (2002). Semi-Symmetric contact metric Three-manifolds. Yokohama Mathematical J.vol. 49, 151-161 .

[4] Gouli,Andereou. F., Moutafi, Evaggelia. On Pseudo-Symmetric 3-manifolds, part II,1-19. (To appear)

[5] Gouli, Andereou., philippos, J. X. (1998). On 3-Dimensional Contact Metric Manifolds With $\nabla_x t = 0$ .J.Geo .62 ,154-165.

[6]Koufogiorgos, Themis., Markellos, M., Papantoniou, B. J. The harmonicity of the Reeb vector field on contact metric 3-manifolds, 1-15. (To appear)

[7] أبو عقل، سمير. دراسة حول المنطويات المترية التلامسية ثلاثية البعد شبه المتناظرة جزئياً، (البحث 250 الوارد إلى المجلة).