استخدام العناصر المميزة في إنشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة

ريتا سعيد و إيلي قدسي

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق – سورية

تاريـــخ الإيداع 2008/01/06
قبل للنشـــر في 2008/09/22

الملخص

إنَّ جبر لي g هو فضاءٌ شعاعيٌ (على حقـل F) مـزودٌ بتركيـب ثنـائي الخطيـة [,] يحقـق الخاصة $[x,x]=0$ فضلاً عن متطابقة جاكوبي. يُسمَّى الجبر الجزئي B من g جبر كارتـان إذا كـان معدوم القوى ومساوياً لمناظمه، ويُبرهن أنَّ جبر لي نصف البسيط g يتحلل إلى فضاءات وزن B.

نقدم في هذه الورقة العلمية مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لي نصف البسيط g منتهـي البعـد (على حقل F مميزه معدوم)، ونبين أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلـى فـضاءات وزن B مطـابق لتحليل g إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} مما يسمح لنا بإنشاء خوارزميـة لاختبـار جبـور لـي البسيطة.

قمنا ببرمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عـددي عـن طريـق برنامج Mathematica 5.0 حيث تمَّ تنفيذ هذه الخوارزمية علـى جبـر لـي الخطـي نـصف البـسيط $SL(3,\ \mathrm{R})$ لإثبات أنَّه بسيط.

الكلمات المفتاحية: جبر لي، جبر لي البسيط، مناظم، جبر كارتان، العنصر الشامل في جبر لي، العنصر المميز في جبر لي نصف البسيط.

Usage of Distinguished Elements to Construct Algorithm to Test Simple Lie Algebras

Rita Saeed and Elie Koudsi

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

Received 06/01/2008
Accepted 22/09/2008

ABSTRACT

A Lie algebra g **over a field F is a vector space together with a bilinear map** $[\ ,\ ]$ **satisfying** $[x, x] = 0$ **in addition to Jacobi identity . A Lie subalgebra** B **of a Lie algebra** g **is said to be a Cartan subalgebra if it is a nilpotent and equals its normalizer, and it is proved that semi simple Lie algebra g decomposes into weight spaces for B.**

In this scientific paper we present the conception of distinguished element h_0 **in finite dimensional semi simple Lie algebra over a field F has characteristic 0 and we will prove that the previous decomposition g into weight spaces for B is the same to decomposition g as a direct sum of** ad_{h_0} **eigen spaces. This leads us to construct algorithm to test simple Lie algebras.**

We programmed the previous algorithm to test simple linear Lie algebras over a numeral field by Mathematica 5.0 **program where applied this algorithm on semi simple linear Lie algebra** $SL(3\mathrm{R})\,)$ **to prove that it is simple.**

Key words: Lie algebra, Simple Lie algebra, Normalizer, Cartan subalgebra, Generic element in Lie algebra, Distinguished element in semi simple Lie algebra .

1- جبور لي- جبور كارتان

1-1- جبور لي (Lie algebras)

إنَّ جبر لي g هو فضاءٌ شعاعيٌّ (على حقل F) مزودٌ بتركيب ثنائي الخطية:

$$[\ ,\ ]: g\times g \to g \quad ; \quad (x,y)\mapsto [x,y]$$

يُسمَّى قوس لي ويحقق الخواص الآتية:

1) $[\lambda x + my, z] = \lambda[x,z] + m[y,z] \quad ; \quad \forall l, m \in F$

2) $[x,x] = 0$

3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad ; \quad \forall x,y,z \in g$

وتُعرف العلاقة الأخيرة بمتطابقة جاكوبي.

إنَّ جميع جبور لي الواردة في سياق هذا البحث منتهية البعد ومعرَّفة على حقل F مميزه صفر.

يُسمَّى g تبادلياً إذا حقق $[g,g]=\{0\}$. كما يكون التطبيق $ad_x : g \to g \quad (x\in g)$ المعرف بالشكل $ad_x(y) = [x,y]$ مؤثراً خطياً على g.

يُسمَّى الفضاء الشعاعي الجزئي L من g جبر لي جزئياً من g إذا كان $[L,L]\subseteq L$ ويُسمَّى مثالياً إذا كان $[g,L]\subseteq L$.

ينتج من التعريف أنَّ كل مثالي في جبر لي g يكون جبراً جزئياً من g .

تعاريف أساسية: (قدسي، 2005)

ليكن g جبر لي على حقل F.

1) يُسمَّى g معدوم القوى إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $C^m g = \{0\}$، حيث إنَّ : $C^1 g = [g,g] \quad , \quad C^r g = [g, C^{r-1} g] \quad (r\ge 2)$

2) يُسمَّى g قابلاً للحل إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $D^m g = \{0\}$ حيث: $D^0 g = g \quad , \quad D^r g = [D^{r-1} g, D^{r-1} g] \quad (r\ge 1)$

ويُسمَّى المثالي I في جبر لي g قابلاً للحل إذا وجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون $D^m I = \{0\}$.

3) يُسمَّى جبر لي g بسيطاً إذا كان غير تبادلي ولا يحوي مثاليات مغايرة لـ $g, \{0\}$.

4) يُسمَّى جبر لي g نصف بسيط إذا كان لا يملك أي مثالي قابل للحل مغاير لـــــ $\{0\}$.
ينتج من التعريف أنَّ كل جبر لي بسيط يكون نصف بسيط ولكن ليس من الضروري أن يكون العكس صحيحاً .

5) تشكل $M_n(\mathrm{F})$ مجموعة المصفوفات المربعـــة من المرتبـــة n والتي عناصرها من الحقل F فضاءً شعاعياً على F بالنسبة لعملية جمع المصفوفات والمضاعف الـــسلمي لمصفوفة فإذا زودنا هذا الفضاء بالتركيب الآتي:

$$[\ ,\ ]: M_n(\mathrm{F}) \times M_n(\mathrm{F}) \to M_n(\mathrm{F})$$

$$[M_1, M_2] = M_1 \cdot M_2 - M_2 \cdot M_1$$

نحصل على جبر لي ، يُسمَّى $M_n(\mathrm{F})$ جبر لي الخطي.

مبرهنة 1 (Eradman and Wildon , 2006)

ليكن I مثالياً غير صفري في جبر لي g نصف البسيط عندئذٍ يوجد مثـــالي J فـــي g بحيث $\mathrm{g} = I \oplus J$. زد على ذلك ، يكون I جبر لي نصف بسيط .

1-2 - جبور كارتان (Cartan Subalgebras)

يُسمَّى جبر لي الجزئيB من جبر لي g جبر كارتان إذا كان معدوم القوى ومـــساوياً لمناظمه $N(\mathrm{B})$ حيث: $N(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{g} \ ;\ ad_x(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{B}\}$.

إنَّ مناظم جبر لي B من جبر لي g هو أوسع جبر لي جزئي من g يحويB كمثالي. (Humphrey ,1972) ويُبرهن أنَّ كل جبر لي يحوي جبر كارتان. (Wan,1972)

مبرهنة 2 (Humphreys,1972)

إنَّ جميع جبور كارتان الجزئية من g تكون إيزومورفيزمية فيما بينها.

مبرهنة 3 (Wan,1972)

ليكن $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ جبري لي جزئيين من جبر لي g بحيـــث $\mathrm{g} = \mathrm{g}_1 \oplus \mathrm{g}_2$. ولـــيكن $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ جبري كارتان جزئيين من $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ على الترتيب عندئذٍ يكون $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2$ جبر كارتـــان جزئياً من g.

3-1- تحليل كارتان لجبر لي نصف البسيط (Cartan decomposition of semi simple Lie algebra)

ليكن g جبر لي نصف بسيط منتهي البعد على حقل F. وليكن B جبر كارتان جزئياً من g. تُسمَّى الدالة الخطية $a : H \to F$ وزناً لـ B في g إذا وجد عنصر $x \neq 0$ في g بحيث $(\forall h \in \mathrm{B})\quad ad_h(x) = a(h)x$ ، أما فضاء الوزن الموافق لـ a فيُعرَّف بالشكل: $\mathrm{g}^a = \{y \in \mathrm{g}\ ;\ ad_h(y) = a(h)y \quad (\forall h \in \mathrm{B})\}$ ويُبرهن أنَّ: (Carter, 2005) ، (Wan,1972)

1) B تبادلي وبالتالي 0 وزن لـ B في g ، زد على ذلك $\mathrm{g}^0 = \mathrm{B}$.

2) $\mathrm{g} = \mathrm{B} \oplus (\underset{a\in\Phi}{\oplus} \mathrm{g}^a)$ حيث Φ مجموعة أوزان B المتمايزة وغير الصفرية ويُسمَّى هذا التحليل "تحليل كارتان لـg". ويكون $[\mathrm{B}, \mathrm{g}^a] = \mathrm{g}^a$ وذلك مهما تكن $a \in \Phi$.

3) مهما يكن العنصر $0 \neq h \in \mathrm{B}$ فإنَّ $\{0\}\ \mathbf{U}\ \{a(h)\ ;\ a \in \Phi\}$ تشكل مجموعة القيم الذاتية لـ ad_h، وذلك لأننا لو فرضنا l قيمة ذاتية لـ ad_h ، $0 \neq y \in \mathrm{g}$ الشعاع الذاتي المقابل لها فإنَّنا نكون أمام حالتين : إما $y \in \mathrm{B}$ وبالتالي $l = 0$ أو توجد $a_i \in \Phi$ بحيث $y \in \mathrm{g}^{a_i}$ ومنه $l = a_i(h)$.

4) g^a فضاءات جزئية أحادية البعد في g أي إنَّ عدد أوزان B المتمايزة مساو لـ dim g - dim B .

5) إنَّ المؤثر ad_h قطور وذلك مهما يكن $h \in \mathrm{B}$.

مبرهنة 4 (أبو حمدة وآخرون ، 1998)

إذا كان f مؤثراً خطياً على فضاء شعاعي V منتهي البعد على حقل F فإنَّ الشرط اللازم الكافي كي يكون f قطوراً هو أن يكون V مجموعاً مباشراً لفضاءات f الذاتية.

نتيجة إذا كان g جبر لي نصف بسيط على حقل F وB جبر كارتان جزئياً من g عندئذٍ يتحلل g إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر القطور $ad_h\ (h \in \mathrm{B})$ بالشكل $\mathrm{g} = \underset{l\in\Delta}{\oplus} \mathrm{g}^l_{ad_h}$ حيث Δ مجموعة القيم الذاتية المتمايزة للمؤثر ad_h .

مبرهنة 5 (أبو حمدة و آخرون ، 1998)

إذا كان f مؤثراً خطياً قطوراً على فضاء شعاعيV منتهي البعد على حقل F وكانت $l_1,....,l_r$ جميع القيم الذاتية المختلفة للمؤثر f في F، فإنَّ حدوديته الأصغرية هي: $p(x)=(x-l_1).....(x-l_r)$.

2- العناصر المميزة في جبر لي نصف البسيط

2-1- العنصر الشامل في جبر لي (Generic element of Lie algebra) (Tauvel and Rupert , 2005)

ليكن g جبر لي على حقل F، وليكن $0\neq x\in \mathrm{g}$ لنفرض أنَّ n_x عدد القيم الذاتية الصفرية لـ ad_x. عندئذٍ ينتج من كون $ad_x(x)=0$ أنَّ 0 قيمة ذاتية صفرية لـ ad_x ومن ثم $n_x\geq 1$.

بفرض $k=\min\{n_x \ ; x\in g\}$ ، يُسمَّى العنصر $0\neq x_0$ من جبر لي g عنصراً شاملاً في g إذا كان عدد القيم الذاتية الصفرية لـ ad_{x_0} مساوياً لـ k. ويُرمز لمجموعة العناصر الشاملة في جبر لي g بـ $\mathrm{g}_{\mathrm{gen}}$.

مبرهنة 6 (Tauvel and Rupert , 2005)

إنَّ الشرط اللازم الكافي كي يكون الجبر الجزئيB من جبر لي g جبر كارتان هو وجود $\mathrm{x}_0\in \mathrm{g}_{\mathrm{gen}}$ بحيث $\mathrm{B}=\mathrm{g}^0_{\mathrm{ad}_{\mathrm{x}_0}}$.

يُسمَّى العنصر الشامل x_0 في المبرهنة السابقة "العنصر الشامل المقابل لجبر كارتانB"، من الواضح أنَّ $x_0\in \mathrm{B}$ سنضع الآن شرطاً على العنصر الشامل x_0 المقابل لجبر كارتان B الجزئي من جبر لي نصف البسيط g بحيث يتطابق تحليل g إلى الفضاءات الذاتية لـ ad_{x_0} مع تحليل كارتان لـ g .

2-2- العنصر المميز في جبر لي نصف البسيط

ليكن g جبر لي نصف بسيط منتهي البعد على حقل F، وليكن B جبر كارتان جزئياً من g.

نقول عن العنصر الشامل h_0 المقابل لــ B إنَّه عنصر مميز في g إذا كــان عــدد القيم الذاتية المتمايزة لــ ad_{h_0} مساوياً لــ $\dim g - \dim B + 1$، بتعريف مكافئ إذا كان عدد القيم الذاتية المتمايزة والمغايرة للصفر لــ ad_{h_0} مساوياً لــ $\dim g - \dim B$.

2-3- خواص العنصر المميز h_0

ليكن B جبر كارتان في جبر لي نصف البسيط g، h_0 عنصراً مميزاً في g عندئذٍ:

1) تشكل مجموعة العناصر $\{a(h_0) \;\; ; a \in \Phi\}$ القيم الذاتية المغايرة للصفر والمتمايزة مثنى مثنى وذلك وفقاً للخاصتين (3)، (4) من خواص تحليل كارتان لجبر لي نــصف البسيط .

2) وفقاً للمبرهنة (6) يكون $\dim B = \dim g^0_{ad_{h_0}}$ ومن ثم تــصبح مــصفوفة المــؤثر الخطي القطور ad_{h_0} :

$$ad_{h_0} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & a_1(h_0) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & a_N(h_0) \end{pmatrix}$$

حيث $N = \dim g - \dim B$، كما يكون عدد الأصفار في القطر الرئيسي مساوياً لــ $\dim B$.

3) إنَّ تحليل كارتان لــ g يتطابق مع تحليل g بالنسبة للفضاءات الذاتيــة لـــــ ad_{h_0}. إنَّ $B = g^0_{ad_{h_0}}$ وذلك وفقاً للمبرهنة (6).

ليكن a_i وزناً لــ B، وفقاً لتعريف الوزن تكون $l_i = a_i(h_0)$ قيمة ذاتية لـــــ ad_{h_0} حيث $l_i \in \Delta \setminus \{0\}$. عندئذٍ ينتج مباشرة أنَّ $g^{a_i} \subseteq g^{l_i}_{ad_{h_0}}$.

من جهة أخرى، إذا كان $x \in \mathrm{g}_{ad_{h_0}}^{l_i}$ حيث $x \neq 0$ عندئذٍ $ad_{h_0}(x) = l_i x$ ومـــن ثَـــمّ $ad_{h_0}(x) = a_i(h_0)x \quad (I)$. وبما أنَّ $x \notin \mathrm{B}$ فإنَّه توجد $a_j \in \Phi$ بحيث $x \in \mathrm{g}^{a_j}$ ومن ثَمّ $(\forall h \in \mathrm{B})\quad ad_h(x) = a_j(h)x$ وبشكل خاص $ad_{h_0}(x) = a_j(h_0)x \quad (II)$ بمقارنة (I) و (II) ووفقاً لمفهوم العنصر المميــز يتــضح أنَّ $a_i = a_j$ ومـــن ثَـــمّ $x \in \mathrm{g}^{a_i}$ ، إذاً $\mathrm{g}_{ad_{h_0}}^{l_i} \subseteq \mathrm{g}^{a_i}$ وبذلك ينتج أنَّ $\mathrm{g}^{a_i} = \mathrm{g}_{ad_{h_0}}^{l_i}$.

4) تكون $p(x) = x(x - a_1(h_0))(x - a_2(h_0))........(x - a_N(h_0))$ الحدوديــة الأصغرية للمؤثر القطور ad_{h_0} وهي من الدرجة $\dim \mathrm{g} - \dim \mathrm{B} + 1$ وذلك وفقــاً للمبرهنة (5) .

2-4- مناقشة وجود العنصر المميز في جبر كارتان

قبل التطرق لمسألة وجود العناصر المميزة نذكر بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة Schwartz-Zippel 7 (Schwartz,1980)

لتكن $f \in \mathrm{F}[x_1,.....,x_m]$ حدودية غير صفرية من الدرجة $k \geq 0$ على الحقل F وW مجموعة جزئية منتهية من F، و $r_1,......,r_m$ عناصر مختارة عشوائياً من W عندئذٍ احتمال أن يكون $f(r_1,.....,r_m) = 0$ أصغر أو يساوي $\frac{k}{|W|}$ أي إنَّ $\left(P(f(r_1,....,r_m) = 0) \leq \frac{k}{|W|}\right)$.

ليكن g جبر لي نصف بسيط منتهي البعد على حقل F، B جبر كارتان جزئي من g. وليكن $\{h_1,....h_m\}$ أساساً لــ B ، $\Phi = \{a_1,...,a_N\}$ مجموعة أوزان B غير الصفرية حيث $N = \dim \mathrm{g} - \dim \mathrm{B}$ ، ولنرمز بــ a_0 للوزن الــصفري، لنعــرف مجموعــة الحدوديات:

$$q_{ij}(x_1,.....,x_m) = \sum_{k=1}^{m}\Big((a_i - a_j)h_k\Big)x_k \qquad 0 \leq i, j \leq N$$

$$f(x_1,.....,x_m) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} q_{ij}(x_1,.....,x_m)$$

عندئذٍ تكون $f \in \mathrm{F}[x_1,.....,x_m]$ حدودية من الدرجة $\frac{N(N+1)}{2}$.

لتكن W مجموعة جزئية منتهية من F، ولنختر منها العناصر $g_1,......,g_m$ بطريقة عشوائية عندئذ ووفقاً لمبرهنة Schwartz-Zippel يكون لدينا احتمال $f(g_1,.....,g_m)=0$ أصغر أو يساوي $\frac{N(N+1)}{2|W|}$ إنَّ الشرط اللازم والكافي كي يكون $h=\sum_{i=1}^{m} g_i h_i$ عنصراً مميزاً هو أن يكون $f(g_1,.....,g_m)\neq 0$ لأنَّنا لو فرضنا العكس لوجد $0\le i,j\le N$ بحيث $a_i(h)=a_j(h)$ وهذا يناقض مفهوم العنصر المميز. ومن ثم إذا كانت $g_1,.....,g_m$ عناصر مختارة عشوائياً من مجموعة جزئية منتهية من F فإنَّ احتمال أن يكون $h=\sum_{i=1}^{m} g_i h_i$ عنصراً مميزاً هو أكبر من $1-\frac{N(N+1)}{2|W|}$ و بذلك نستنتج ما يأتي:

إذا كان $|W|\ge\frac{(\dim g-\dim B)(\dim g-\dim B+1)}{2}$ فإنَّ احتمال وجود العناصر $g_1,.....,g_m$ في W التي تجعل $\sum_{i=1}^{m} g_i h_i$ عنصراً مميزاً هو احتمال أكبر من الصفر، ومن ثَمّ نضمن وجود العنصر المميز. إذا أردنا أن تتم عملية اختيار العناصر $g_1,.....,g_m$التي تجعل $\sum_{i=1}^{m} g_i h_i$ عنصراً مميزاً بخطوتين على الأكثر، فإنَّه يتوجب علينا جعل الاحتمال أكبر أو يساوي $\frac{1}{2}$ وهذا يتطلب أن يكون:

$$|W|\ge(\dim g-\dim B)(\dim g-\dim B+1).$$

نقدم الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنة 8:

ليكن B جبر كارتان جزئياً من جبر لي نصف البسيط g على حقل F، وليكن $g=B\oplus(\underset{a_i\in\Phi}{\oplus} g^{a_i})$ تحليل كارتان لــ g. إذا كان $g=I\oplus J$ حيث I, J مثاليين فيه عندئذٍ: إما $g^{a_i}\subseteq J$ أو $g^{a_i}\subseteq I$ وذلك من أجل كل $a_i\in\Phi$.

البرهان:

ليكن B_1, B_2 جبري كارتان جزئيين من I, J على الترتيب، وليكن $a_i \in \Phi$ عندئـــذ يوجد عنصر $h \in B_1 \cup B_2$ بحيث $ad_h(g^{a_i}) \neq 0$، لأنَّه في خلاف ذلك ينـــتج وفقـــاً للمبــــرهنتين 2 و3 أنَّ $B = B_1 \oplus B_2$ ويكـــــون $[B, g^{a_i}] = \{0\}$ ومــــــن ثـــــم $g^{a_i} \subseteq N(B) = B$ وهذا مرفوض. إنَّ هذا العنصر إما أن يكون موجوداً فـــي B_1 أو في B_2، لنفرض أنَّ $h \in B_1$ عندئذ $h \in I$ ومن ثم $ad_h(g^{a_i}) \subseteq I$ (i).

من جهة أخرى، ليكن $x \in g^{a_i}$ عندئذٍ $ad_h(x) = a_i(h)x$، وينـــتج مـــن كـــون $ad_h(g^{a_i}) \neq \{0\}$ أنَّ $a_i(h) \neq 0$ ومن ثم:

$$x = \frac{1}{a_i(h)} ad_h(x) = ad_h\left(\frac{1}{a_i(h)} x\right) \in ad_h(g^{a_i})$$

أي إنَّ $g^{a_i} \subseteq ad_h(g^{a_i})$ (ii)

من (i) و (ii) نجد أنَّ $g^{a_i} \subseteq I$. بأسلوب مماثل نثبت أنَّه إذا كان $h \in B_2$ فإنَّ $g^{a_i} \subseteq J$.

3- خوارزمية اختبار جبور لي البسيطة

نقدم الآن خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة والتي تعد خلاصة لما ورد من أفكـــار نظرية في هذا البحث:

3-1- الخوارزمية

المدخلات: n بعد جبر لي g نصف البسيط على حقل F وأساسه $\{Y_1, ..., Y_n\}$.

m بعد جبر كارتان B الجزئي من g وأساسه $\{Y_1, ..., Y_m\}$.

الدالة التي تمكننا من كتابة عناصر جبر لي g بدلالة أساسه.

قوس لي.

المخرجات: تحديد فيما إذا كان جبر لي g بسيطاً أم لا.

الخطوات:

1) نأخـــذ عينـــة W مـــن الحقـــل F عـــدد عناصـــرها أكبـــر أو يـــساوي $(n-m)(n-m+1)$.

2) نوجد المصفوفات $ad_{Y_1},.....,ad_{Y_m}$

3) نختار m عنصراً من العينة السابقة بطريقة عشوائية مثل: $g_1,g_2,...,g_m$.

4) نوجد مصفوفة ad_h حيث $h=\sum_{i=1}^{m} g_i Y_i$.

5) نوجد d درجة الحدودية الأصغرية لـــ ad_h .

6) إذا كانت $d=n-m+1$ نتبع ما يأتي:

أ- نحلل الحدودية الأصغرية إلى عواملها غير الخذولة $(x-l_1)(x-l_2)......(x-l_d)$ حيث $\{l_1,l_2......,l_d\}$ مجموعة القيم الذاتية المختلفة لـــ ad_h.

ب- نرمِّز $p_j(x)=(x-l_j)$ ، حيث $\{l_j \; ; 1\le j\le d-1\}$ مجموعة القيم الذاتية المتمايزة والمغايرة للصفر.

ج- من أجل $1\le j\le d-1$:

(i) نحسب الفضاءات: $\mathfrak{g}^{a_j}=\{x\in \mathfrak{g} \;\; ; \left(P_j(ad_h)\right)x=0\}$

(ii) نحسب أساس المثالي I_j المولد بـــ $\mathfrak{g}^{a_j}$.

د- إذا كان $I_j=\mathfrak{g}$ مهما يكن $j=1,2,....,d-1$ عندئذ يكون $\mathfrak{g}$ بسيطاً.

وإلا $\mathfrak{g}$ ليس بسيطاً

وإلا نعود إلى الخطوة الثالثة.

3-2- تطبيق خوارزمية الاختبار على جبر لي نصف البسيط $SL(3,\mathbb{R})$:

نبرمج الآن الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica 5.0 حيث نقوم بتنفيذ الخطوات مباشرة من أجل $SL(3,\mathbb{R})$ أحد جبور لي الخطية نصف البسيطة والذي يُعد من أشهر أنواع جبور لي الكلاسيكية.

يتكون $SL(3,\mathbb{R})$ من مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة 3 والتي عناصرها أعداد حقيقية وأثرها صفر (Varadarajan ,1984) وهو من البعد 8 كونه يملك الأساس:

$$Y_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Y_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ Y_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Y_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Y_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ Y_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ Y_8=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

يشكل $B=\{Y_1,Y_2\}$ جبر كارتان جزئي من $SL(3,\ )$.

برمجة الخوارزمية:

<u>المدخلات</u>

m بعد جبر كارتانB:

$In[1]:=$ **Print["Enter dimention of Cartan subalgebra m= "];**

Enter dimention of Cartan subalgebra m=

$In[2]:=$ **m = 2;**

B أساس جبر كارتان:

$In[3]:=$ **Print["Enter base of Cartan subalgebra B="];**

For[i = 1, i ≤ m, Print[(HoldForm[Y])$_i$, "="]; i++];

Enter base of Cartan subalgebra B=

$Y_1=$

$Y_2=$

$In[4]:=$ $\mathbf{B=\{\ Y_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},Y_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\}}$

n بعد جبر لي:

$In[5]:=$ **Print["Enter dimention of Lie algebra n= "];**

Enter dimention of Lie algebra n=

$In[6]:=$ **n = 8;**

g أساس جبر لي :

$In[7]:=$ **Print["Enter base of Lie algebra g ="];**

For[i = 1, i ≤ n, Print[(HoldForm[Y])$_i$, "="]; i++];

Enter base of Lie algebra g =

$Y_1 =$
$Y_2 =$
$Y_3 =$
$Y_4 =$
$Y_5 =$
$Y_6 =$
$Y_7 =$
$Y_8 =$

$$In[8] := \mathbf{g =\{\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},}$$
$$\mathbf{Y_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\}}$$

الدالة Recog[M_] التي تمكننا من كتابة عناصر جبر لي g بدلالة أساسه :

In[9] := **Print["Enter function which recognize an element of Lie algebra Recog[M_] = "];**

"Enter function which recognize an element of Lie algebra Recog[M_] =

$$In[10] := \mathbf{Recog[M\_]{:=}Module\ [\{\}, \lambda_1 = -M[[1,1]]\ ; \lambda_2 = -M[[3,3]]\ ;}$$
$$\mathbf{\lambda_3 = M[[1,2]]\ ;\ \lambda_4 = M[[1,3]]\ ;}$$
$$\mathbf{\lambda_5 = M[[2,1]]\ ;\ \lambda_6 = M[[2,3]]\ ; \lambda_7 = M[[3,1]]\ ;}$$
$$\mathbf{\lambda_8 = M[[3,2]]\ ;Sum[\ \lambda_i * (HoldForm[y])_i, \{i, n\}]}$$
$$\mathbf{]}$$

قوس لي c[X_,Y_] :

In[11] := **Print["Enter Lie bracket c[X_,Y_] = "];**

Enter Lie bracket c[X_,Y_] =

$$In[12] := \mathbf{c[X\_,Y\_]{:=}X \cdot Y\text{-}Y \cdot X}$$

الخطوة الأولى

اختيار عينة W من الحقل R، عدد عناصرها يساوي 42 .

$In[13]:=$ **W=Table [i,{i,(n-m)(n-m+1) }]**

$Out[13]=$ {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,
23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42}

الخطوة الثانية

إيجاد المصفوفة الممثلة لنواتج تركيب عناصر أساس جبر لي وفق قوس لي:

$In[14]:=$ **Matrix=Table [Recog [c[Y_i,Y_j]],{ i,n },{ j,n }] // MatrixForm**

$Out[14]// \; MatrixForm =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2Y_3 & Y_4 & -2Y_5 & -Y_6 & -Y_7 & Y_8 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_4 & Y_5 & 2Y_6 & -Y_7 & -2Y_8 \\ -2Y_3 & Y_3 & 0 & 0 & Y_1 & Y_4 & -Y_8 & 0 \\ -Y_4 & -Y_4 & 0 & 0 & -Y_6 & 0 & Y_1+Y_2 & Y_3 \\ 2Y_5 & -Y_5 & -Y_1 & Y_6 & 0 & 0 & 0 & -Y_7 \\ Y_6 & -2Y_6 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & Y_2 \\ Y_7 & Y_7 & Y_8 & -Y_1-Y_2 & 0 & -Y_5 & 0 & 0 \\ -Y_8 & 2Y_8 & 0 & -Y_3 & Y_7 & -Y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إيجاد المصفوفتين القطريتين ad_{Y_1} ، ad_{Y_2} حيث عناصر قطريهما الرئيسيين هي الأمثـــال العددية لعناصر السطرين الأول والثاني من المصفوفة السابقة على الترتيب:

$In[15]:=$ **For[i=1, i $\le$ m ,**
Print[ad $_{(\text{HoldForm}[Y])_i}$, "= ",
Normal[SparseArray[{{j_ , j_ }: $\to$ coefficient[Matrix[[1]],Y_j]
[[i]][[j]] },{n,n}]]// MatrixForm];
ad$_{Y_i}$ = Normal[SparseArray[{{ j_ , j_ }: $\to$ coefficient[Matrix
[[1]],Y_j][[i]][[j]],{n,n}]];i++]

$$ad_{Y_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}_{Y_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة:

اختيار عددين γ_1، γ_2 من W بطريقة عشوائية:

$In[16]:=$ **random =Table[Random[Integer ,{ W[[1]],W[[(n-m)(n-m+1)]] }] ,{m}]**

$Out[16]=\{6,12\}$

$In[17]:=$ **For[i = 1, i ≤ m, Print[(HoldForm[g])$_i$, "= ", random[[i]]];**

g_i = random[[i]]; i++]

$\gamma_1=6$

$\gamma_2=12$

الخطوة الرابعة :

إيجاد المصفوفة ad_h حيث $h=g_1Y_1+g_2Y_2$:

$In[18]:=$ **ad$_h$ = 0;**

For[i = 1, i ≤ m, i++, ad$_h$ = ad$_h$ +g_i ad$_{Y_i}$];Print["ad$_h$ =", ad$_h$

// MatrixForm]

$$\mathrm{ad}_h=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&18&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&18&0&0\\0&0&0&0&0&0&-18&0\\0&0&0&0&0&0&0&-18\end{pmatrix}$$

الخطوة الخامسة:

إيجاد القيم الذاتية المتمايزة لــ ad_h :

$In[19]:=$ **eigen=Eigenvalues[ad$_h$]**

$Out[19]=$ {-18,-18,18,18,0,0,0,0}

$In[20]:=$ **differenteigenvalues=Intersection[eigen,eigen]**

$Out[20]=$ {-18,0,18}

إيجاد درجة الحدودية الأصغرية والتي تساوي عدد القيم الذاتية المتمايزة لــ ad_h :

$In[21]:=$ **d=degreeminimalpolynomial=Length[differenteigenvalues]**

$Out[21]=3$

الخطوة السادسة:

الخطوة(أ):

إن حلقة If التالية تخرج لنا الحدودية الأصغرية إذا كانت درجة هذه الحدودية مساوية لــ 7 وإلا تطلب منا العودة إلى الخطوة الثالثة:

$In[22]:=$ **If[degreeminimalpolynomial == n-m+1 , $\prod_{i=1}^{d}$(x-differenteigenvalues[[i]]),**

Print[Go to step (3)]]

Go to step (3)

الخطوة الثالثة:

اختيار عددين γ_1 ، γ_2 من W بطريقة عشوائية:

$In[23]:=$ **random =Table[Random[Integer ,{ W[[1]],W[[(n-m)(n-m+1)]] }] ,{m}]**

$Out[23]=$ {29,26}

$In[24]:=$ **For[i = 1, i ≤ m, Print[(HoldForm[g])$_i$, "= ", random[[i]]];**

g_i = random[[i]]; i++]

γ_1=29

γ_2=26

الخطوة الرابعة :

نوجد المصفوفة ad_h حيث $h = g_1 Y_1 + g_2 Y_2$:

$In[25]:=$ **$\mathrm{ad_h}$ = 0;**
For[i = 1, i ≤ m, i++, $\mathrm{ad_h}$ = $\mathrm{ad_h}$ +g_i ad_{Y_i}];Print["$\mathrm{ad_h}$ =",
$\mathrm{ad_h}$ // MatrixForm]

$$\mathrm{ad_h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

الخطوة الخامسة :

إيجاد القيم الذاتية المتمايزة لـــ ad_h :

$In[26]:=$ **eigen=Eigenvalues[$\mathrm{ad_h}$]**

$Out[26]=$ {-55,55,-32,32,23,-23,0,0}

$In[27]:=$ **differenteigenvalues=Intersection[eigen,eigen]**

$Out[27]=$ {-55,-32,-23,0,23,32,55}

إيجاد درجة الحدودية الأصغرية والتي تساوي عدد القيم الذاتية المتمايزة لـــ ad_h :

$In[28]:=$ **d=degreeminimalpolynomial=Length[differenteigenvalues]**

$Out[28]=$ 7

الخطوة السادسة :

الخطوة(أ):

إن حلقة If التالية تخرج لنا الحدودية الأصغرية إذا كانت درجة هذه الحدودية مساوية لـــ7 وإلا تطلب منا العودة إلى الخطوة الثالثة:

$In[29]:=$ **If[degreeminimalpolynomial == n-m+1 ,**

$\prod_{i=1}^{d}$ **(x-differenteigenvalues[[i]]), Print[Go to step (3)]]**

$Out[29]=$ (55+x)(32+x)(23+x)x(-23+x)(-32+x)(-55+x)

الخطوة(ب):

لنرمز:

$p_1(x)=x+55$, $p_2(x)=x+32$, $p_3(x)=x+23$, $p_4(x)=x-23$,
$p_5(x)=x-32$, $p_6(x)=x-55$

الخطوة(ج):

من أجل $1\le j\le d-1$:

الخطوة(i):

إدخال المصفوفة M:

$In[30]:=$ **M = {{a$_1$, a$_2$, a$_3$},{c$_1$, c$_2$, c$_3$},{e$_1$, e$_2$, e$_3$}}**

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

حـــساب الفـــضاءات : $g^{a_j}=\{M\in SL(3,\ \mathrm{R}) : \left(P_j(ad_h)\right)M=0\}$ حيـــث l_j مجموعة القيم الذاتية المتمايزة والمغايرة للصفر :

$$\begin{aligned}(SL(3,\mathrm{R}))^{a_j} &=\{M\in SL(3,\mathrm{R}) : \quad (ad_{g_1Y_1+g_2Y_2}-l_j)M=0\}\\ &=\{M\in SL(3,\mathrm{R}) : \quad [g_1Y_1+g_2Y_2,M]-l_jM=0\}\end{aligned}$$

$In[31]:=$ **For[i=1, i ≤ d,**

If [differenteigenvalues[[i]] ≠ 0,

Print ["Solution of ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_2 Y_2}$ -(",differenteigenvalues[[i]],")

=M" , Solve [c[$\gamma_1 Y_1+\gamma_2 Y_2$,M] - differenteigenvalues[[i]]

$$\mathbf{M==\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, e_1, e_2, e_3\}]\ ],0]}$$

;i++]

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(-55))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_2\to 0,\ a_3\to 0$
$,\ c_1\to 0,\ c_2\to 0,\ c_3\to 0,\ e_2\to 0,\ e_3\to 0\}\}$

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(-32))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_2\to 0,\ a_3\to 0$
$,\ c_2\to 0,\ c_3\to 0, e_1\to 0, e_2\to 0,\ e_3\to 0\}\}$

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(-23))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_2\to 0,\ c_3\to 0,$
$c_1\to 0,\ c_2\to 0,\ c_3\to 0, e_1\to 0,\ e_3\to 0\}\}$

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(23))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_2\to 0,\ a_3\to 0,$
$c_1\to 0,\ c_2\to 0, e_1\to 0, e_2\to 0, e_3\to 0\}\}$

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(32))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_3\to 0,\ c_1\to 0,$
$c_2\to 0, c_3\to 0, e_1\to 0, e_2\to 0,\ e_3\to 0\}\}$

Solution of (ad$_{\gamma_1 Y_1+\gamma_1 Y_2}$ -(55))M=0 is$\{\{a_1\to 0,\ a_2\to 0,\ c_1\to 0,$
$c_2\to 0, c_3\to 0, e_1\to 0, e_2\to 0,\ e_3\to 0\}\}$

ومن ثم:

$$(SL(3,\mathrm{R}))^{a_1}=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\}=\{Y_7\}\ ,\ (SL(3,\mathrm{R})))^{a_2}=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\}=\{Y_5\}$$

$$(SL(3,\mathrm{R}))^{a_3}=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\}=\{Y_8\}\ ,\ (SL(3,\mathrm{R}))^{a_4}=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\}=\{Y_6\}$$

$$(SL(3,\mathrm{R}))^{a_5}=\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\}=\{Y_3\}\ ,\ (SL(3,\mathrm{R}))^{a_6}=\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\}=\{Y_4\}$$

الخطوة (ii):

إن الإجرائية البرمجية التالية تخرج لنا أساس المثالي المولد بمجموعة مدخلة **lis** جزئيـــة من جبر لي g :

```
In[32]:= NonZero[lis_] := Module[{new = {}},
                    Do[If[Not[lis[[i]] === 0*lis[[i]]],
                          AppendTo[new, lis[[i]]]],
                            {i, Length[lis]}];
                    new]
In[33]:= Coordination[Z_] := Module[{coo, aa},
                    coo = Array[aa, {n}];
                    Do[aa[i] = Coefficient[Z, (HoldForm[y])_i ,
                          {i, n}];
                    coo]
In[34]:= Combination[lis_] :=Module[{ } , Sum[lis[[i]]*(HoldForm[y])_i , {i, n}]]
In[35]:= IdealGenerated[lis_] :=
      Module[{k, IdealGenerated},
         IdealGenerated= Map[Combination, NonZero[RowReduce[
          Map[Coordination, Map[Recog, lis]]]]];
         dim[0] = 0; dim[1] = 1; k = 1;
         While[
          dim[k] < n && dim[k] ≠ dim[k - 1], conj = IdealGenerated;
           k = k + 1;
            Do[
             AppendTo[IdealGenerated, Recog[c[ReleaseHold[conj[[j]]], y_i ]]],
              {i, n}, {j, Length[conj]}];
             ideal = Map[Combination, NonZero[
                     RowReduce[Map[Coordination, IdealGenerated]]]];
             dim[k] = Length[IdealGenerated]
              ];
        IdealGenerated]
```

بالاستفادة من هذه الإجرائية يكون :

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_1}$

$In[36]:=$ **IdealGenerated[{Y_7}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_2}$

$In[37]:=$ **IdealGenerated[{Y_5}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_3}$

$In[38]:=$ **IdealGenerated[{Y_8}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_4}$

$In[39]:=$ **IdealGenerated[{Y_6}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_5}$

$In[40]:=$ **IdealGenerated[{Y_3}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

أساس المثالي المولد بـ $(SL(3, R))^{a_6}$

$In[41]:=$ **IdealGenerated[{Y_4}]**

$\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5,Y_6,Y_7,Y_8\}$

الخطوة (د):

تحدد حلقة For التالية فيما إذا كان جبر لي $SL(3, R)$ بسيطاً أم لا وذلك بعد اختبار كون جميع المثاليات المولدة بـ $(SL(3, R))^{a_i}$ $(i = 3,......,8)$ مساوية لـ g أم لا .

```
In[42]:= Q := 0;
         For[i = 3, i ≤ 8, If[IdealGenerated[{Y_i}] == g, Q += 0, Q += 1]; i++];
         If[Q == 0, "Lie algebra is simple", "Lie algebra is not simple"]
```

$Out[42]=$ Lie algebra is simple

النتائج

1) أثبتنا بعد إدخال مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لي نصف البسيط g منتهي البعد (على حقل F مميزه معدوم) أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلى فضاءات وزن جبر كارتان B مطابق لتحليل جبر لي نصف البسيط إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} مما سمح لنا بإنشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة.

2) قمنا ببرمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica 5.0 حيث تمَّ تنفيذ هذه الخوارزمية مباشرة على جبر لي الخطي نصف البسيط $SL(3, R)$.

REFERENCES

1- Carter, R.W. (2005). Lie algebras of finite and affine type, Cambridge university Press , Cambridge . *p* 36, 46,18,37, 48
2- Eradman ,K., and Wildon , M.J. (2006). Introduction to Lie algebras, Springer Verlag , London . *p* 1, 3, 82
3- Humphreys, J.E. (1972). Introduction to Lie algebras and representation theory, third ed . Springer. *p* 7,81,82
4- Schwartz, J. (1980). Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identity . ACM , vol . 27: 701-717
5- Tauvel, P. and Rupert. W. T. (2005). Lie algebras and algebraic groups. Springer Verlag , Berlin Heidelberg . *p* 278,443
6- Varadarajan V. S. (1984). Lie groups, Lie algebras and their representations, Springer Verlag , New York . *P* 294
7- Wan, Z. X . (1972). Lie algebras , Pergamon press . *P* 34,32,52
8- http://mathworld..wolfram.com/RandomNumber.html
9-http://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz-Zippel lemma and testing_ polynomial_ identities
10- http://arxiv,org/PS_cache/math/pdf/0204/0204350v1
11- أبو حمدة، عبد الواحد، اللحام، أنور، الوادي، يوسف. وهنانو، عبد اللطيف. (1998). الجبر الخطي جبر(4)، جامعة دمشق، سورية. ص 74، 75، 69
12- قدسي، إيلي. (2005). نظرية الجبور، جامعة دمشق، سورية. ص 123، 106، 136، 118.