تأثير زمرة ضبابية على مجموعة ضبابية

رشا الملاح وعبد اللطيف هنانو

قسم الرياضيات ـــ كلية العلوم ـــ جامعة دمشق ـــ سورية

تاريخ الإيداع 2011/02/27

قبل للنشر في 2011/08/22

الملخّص

اعتماداً على مفاهيم الزمرة الضبابية والتطبيق الصامد عرّفنا في هذا البحث مجموعة ضبابية دعوناها $sym(A)$ (إذ A مجموعة ضبابية) وأثبتنا أنها تشكل زمرة ضبابية بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل:

$$\forall\ f, g \underset{1}{\in} sym(A):\quad f.g : A \to A$$

$$x \mapsto f.g(x) = f(g(x))$$

كما عرّفنا تأثير زمرة ضبابية G على مجموعة ضبابية S بطريقتين مختلفتين، وأثبتنا وجود تكافؤ بين هذين التعريفين من خلال المبرهنة الآتية:

لتكن G زمرة ضبابية ولتكن S مجموعة ضبابية، عندئذٍ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1) يوجد تطبيق صامد:

$$\varphi : G \times S \to S$$

$$(g, s) \mapsto \varphi(g, s) = g * s$$

يحقق الشروط:

1) $e_G * s = s$

2) $(g.g') * s = g * (g' * s)$

3) $m_S(g * s) \geq m_S(s)$

2) يوجد تشاكل زمري صامد:

$$\theta : G \to sym(S)$$

$$g \mapsto \theta(g) = f_g$$

يحقق الشرط:

$$\forall\ g_1 \underset{m}{\in} G,\ g_2 \underset{n}{\in} G,\ s_1 \underset{m'}{\in} S,\ s_2 \underset{n'}{\in} S : \min\{m, m'\} = \min\{n, n'\}$$

$$\Rightarrow\ m_S(f_{g_1}(s_1)) = m_S(f_{g_2}(s_2))$$

الكلمات المفتاحية: مجموعة ضبابية، تطبيق صامد، تأثير زمرة ضبابية.

Act of Fuzzy Group over Fuzzy Set

R. Al-Mallah and A. Hanano
Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

Received 27/02/2011
Accepted 22/08/2011

ABSTRACT

According to the concept of fuzzy group and resistant mapping, we define fuzzy set called $sym(A)$ **(where** A **is a fuzzy set) then we prove that** $sym(A)$ **is a fuzzy group with respect to the operation (.) which defined as follows :**

$$\forall\ f, g \underset{1}{\in} sym(A): \quad f.g : A \to A$$

$$x \ \mathbf{a} \ \ f.g(x) = f(g(x))$$

And we define act of fuzzy group *G* over fuzzy set *S* in two different ways then we prove that they are equivalent in the following theorem:

Let G **be a fuzzy group and let** S **be a fuzzy set then there is a resistant mapping:**

$$j : G \times S \to S$$

$$(g, s) \ \mathbf{a} \ j(g, s) = g * s$$

satisfy the following conditions:

1) $e_G * s = s$

2) $(g.g') * s = g * (g' * s)$

3) $m_S(g * s) \geq m_S(s)$

if and only if there is a resistant group homomorphism :

$$q : G \to sym(S)$$

$$g \ \mathbf{a} \ q(g) = f_g$$

satisfy the condition :

$$\forall\ g_1 \underset{m}{\in} G,\ g_2 \underset{n}{\in} G,\ s_1 \underset{m'}{\in} S,\ s_2 \underset{n'}{\in} S : \min\{m, m'\} = \min\{n, n'\}$$

$$\Rightarrow m_S(f_{g_1}(s_1)) = m_S(f_{g_2}(s_2))$$

Key words : Fuzzy set, Resistant mapping, Act of fuzzy group.

1- تعاريف أساسية:

1) لتكن X مجموعة غير خالية. نعرف المجموعة الجزئية الضبابية A من X بأنها دالة من X إلى المجال $[0,1]$، أي: $A : X \to [0,1]$. [1], [3] .

يمكن كتابة المجموعة الجزئية الضبابية A من X بالشكل:
$A = \{ (x, A(x)) : x \in X \}$

ونسمي $A(x)$ درجة انتماء العنصر x إلى A . [2], [4].

2) المجموعة الضبابية هي مجموعة من العناصر كل عنصر يقترن بدرجة انتماء واحدة تقع ضمن المجال $]0,1[$ وسنرمز لدرجة انتماء العنصر x إلى المجموعة الضبابية A بالرمز $m_A(x)$.

وإذا كانت $\mu_A(x) = m$ فإننا نكتب $x \underset{m}{\in} A$ إذ $m \in]0,1]$.

وفي حالة خاصة إذا كان عدد عناصر A منتهياً نقول: إن المجموعة الضبابية A منتهية.

3) لتكن A مجموعة ضبابية وليكن $t \in]0,1]$. نعرف المقطع الأدنى المعين بالقيمة t من A بأنه المجموعة:

$L(A,t) = \{ x : m_A(x) \le t \}$. [7]

4) لتكن A, B مجموعتين ضبابيتين. نعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B بأنه مجموعة العناصر:

$$A \times B = \{ (x, y) : x \underset{m}{\in} A \ , \ y \underset{n}{\in} B \}$$

و يكون $(x, y) \underset{t}{\in} A \times B$ حيث $t = \min\{m, n\}$، أي إن:

$m_{A\times B}(x, y) = \min\{ m_A(x), m_B(y)\}$.

5) لتكن G زمرة و A مجموعة جزئية ضبابية من G، نقول عن A إنها زمرة جزئية ضبابية من G إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) $A(x.y) \ge \min\{ A(x), A(y)\}$

2) $A(x) = A(x^{-1})$

وذلك أياً كان $x, y \in G$. [1] , [6] .

6) لتكن A مجموعة ضبابية، نقول عن A إنها زمرة ضبابية إذا كانت A زمرة وتحقق الشرطين الآتيين:

1) $m_A(x.y) \geq \min\{m_A(x), m_A(y)\}$

2) $m_A(x) = m_A(x^{-1})$

7) لتكن G زمرة و A زمرة جزئية ضبابية من G، نقول عن A إنها ناظمية إذا تحقق الشرط الآتي:

$$A(x.y.x^{-1}) \geq A(y) \quad : \ \forall \ x, y \in \ G$$

ويمكن إثبات أنه إذا كانت A زمرة جزئية ضبابية من G فإن العبارات الآتية متكافئة:

1) $A(x.y.x^{-1}) \geq A(y)$

2) $A(x.y.x^{-1}) = A(y)$

3) $A(x.y) = A(y.x)$

وذلك أياً كان $x, y \in G$. [5] .

2 - التطبيق الصامد و التطبيق الصامد القوي:

تعريف (2-1): لتكن A, B مجموعتين ضبابيتين. نعرف التطبيق الصامد من A إلى B بأنه علاقة f منطلقها A ومستقرها B تربط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B وتحقق الشرط:

$$x \underset{m}{\in} A \ and \ y \underset{m}{\in} A \Rightarrow f(x) \underset{n}{\in} B \ and \ f(y) \underset{n}{\in} B$$

ونقول عن التطبيق الصامد f إنه تطبيق صامد متباين إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

2) $f(x) \underset{n}{\in} B \ and \ f(y) \underset{n}{\in} B \Rightarrow x \underset{m}{\in} A \ and \ y \underset{m}{\in} A$

ونقول عن التطبيق الصامد f إنه تطبيق صامد غامر إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \, y \underset{n}{\in} B : \exists x \underset{m}{\in} A : f(x) = y$$

ونقول عن التطبيق الصامد f إنه تقابل صامد إذا كان f متبايناً وغامراً.

تعريف (2-2): لتكن A,B مجموعتين ضبابيتين وليكن $f:A\to B$ تطبيقاً صامداً (تقابلاً صامداً)، نقول عن f إنه تطبيق صامد قوي (تقابل صامد قوي) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$m_B(f(x))\geq m_A(x)$$

تعريف (2-3): لتكن A,B زمرتين ضبابيتين وليكن $F:A\to B$ تطبيقاً صامداً (قوياً)، نقول عن F إنه تشاكل زمري صامد (قوي) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$F(x.y)=F(x).F(y)$$

من الواضح أنه إذا كان $F:A\to B$ تشاكلاً زمرياً صامداً (قوياً) فإن :

$$m_B(F(x.y))=m_B(F(x).F(y))\geq \min\{m_B(F(x),m_B(F(y)\}$$

نتائج (2-4): لتكن A,B مجموعتين ضبابيتين وليكن $f:A\to B$ تطبيقاً يحقق الشرط الآتي: $x\underset{m}{\in}A\Rightarrow f(x)\underset{m}{\in}B$. عندئذٍ:

1) f يكون تطبيقاً صامداً.

2) الاقتضاء $f(x)\underset{m}{\in}B\Rightarrow x\underset{m}{\in}A$ يكون صحيحاً.

3) إذا كان f متبايناً (أي $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$) فإن f يكون تطبيقاً صامداً متبايناً.

الإثبات:

1) من أجل $x\underset{m}{\in}A$ و $y\underset{m}{\in}A$ سيكون $f(x)\underset{m}{\in}B$ و $f(y)\underset{m}{\in}B$ ومن ثمّ f تطبيق صامد.

2) من أجل $f(x)\underset{m}{\in}B$ سنفرض أن $x\underset{n}{\in}A$ وحسب الفرض يكون $f(x)\underset{n}{\in}B$ ولكن نعلم أن أي عنصر له درجة انتماء واحدة فقط إلى مجموعة ضبابية ما، ومن ثمّ فإن $m=n$ ومنه $x\underset{m}{\in}A$.

3) حسب (1) فإن f تطبيق صامد وحسب (2) نلاحظ أنه إذا كان $f(x)\underset{m}{\in}B$ و $f(y)\underset{m}{\in}B$ فإن:

$x \underset{m}{\in} A$ و $y \underset{m}{\in} A$ ونظراً إلى أن f متباين فرضاً فإن f تطبيق صامد متباين.

اصطلاح: لتكن A مجموعة ضبابية. سنرمز للمجموعة الضبابية التي عناصرها مجموعة التقابلات الصامدة f على A المحققة للشرط $m_A(f(x)) = m_A(x)$ التي درجة انتماء كل عنصر من عناصرها هي الواحد بالرمز $sym(A)$.

مبرهنة (2-5): $sym(A)$ تشكل زمرة ضبابية بالنسبة إلى العملية (.) المعرفة بالشكل:

$$\forall f, g \underset{1}{\in} sym(A): \quad f.g : A \to A$$

$$x \mapsto f.g(x) = f(g(x))$$

الإثبات: العملية (.) عملية داخلية لأن $f.g$ تقابل صامداً إذ إنّ:

$$x = y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(g(x)) = f(g(y)) \Leftrightarrow f.g(x) = f.g(y)$$

$$x \underset{m}{\in} A \text{ and } y \underset{m}{\in} A \Leftrightarrow g(x) \underset{n}{\in} A \text{ and } g(y) \underset{n}{\in} A$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) \underset{t}{\in} A \text{ and } f(g(y)) \underset{t}{\in} A$$

$$\Leftrightarrow f.g(x) \underset{t}{\in} A \text{ and } f.g(y) \underset{t}{\in} A$$

$$\forall z \underset{t}{\in} A : \exists y \underset{n}{\in} A : f(y) = z$$

ونظراً إلى أن g غامر فإنه من أجل $y \underset{n}{\in} A$ يوجد $x \underset{m}{\in} A$ و بحيث يكون $g(x) = y$ ومن ثمّ:

$$\forall z \underset{t}{\in} A : \exists\ x \underset{m}{\in} A : f.g(x) = f(g(x)) = f(y) = z$$

والتقابل الصامد $f.g$ يحقق أن $m_A(f.g(x)) = m_A(f(g(x)) = m_A(g(x)) = m_A(x)$ (إذ $f, g \underset{1}{\in} sym(A)$).

العملية (.) تجميعية:

$$\forall\ f, g, h \underset{1}{\in} sym(A) : (f.(g.h))(x) = f(g.h(x))$$

$$= f(g(h(x))) = (f.g)(h(x)) = ((f.g).h)(x)$$

ويوجد عنصر حيادي هو: $id : A \to A$ إذ $id(x) = x$ (من الواضح أن $.(id \in_1 sym(A)$.

ومن أجل $f \in_1 sym(A)$ يمكن أن نعرف $f^{-1} : A \to A$ بالشكل: $f^{-1}(y) = x$ إذ $y = f(x)$ ومن الواضح أن $f^{-1} \in_1 sym(A)$ و يحقق أن $f.f^{-1} = f^{-1}.f = id$.

إذاً $sym(A)$ زمرة و هي ضبابية لأنه:

$$\forall\ f, g \in_1 sym(A):\ m_{sym(A)}(f.g) = 1 \geq \min\{m_{sym(A)}(f), m_{sym(A)}(g)\} = 1$$

$$m_{sym(A)}(f) = 1 = m_{sym(A)}(f^{-1})$$

(من الواضح أن عناصر $sym(A)$ هي تقابلات صامدة قوية).

3 - تأثير زمرة ضبابية على مجموعة ضبابية:

تعريف (3-1): لتكن G زمرة ضبابية ولتكن S مجموعة ضبابية. نعرف تأثير G على S بأنه تطبيق صامد:

$$j : G \times S \to S$$
$$(g, s) \mapsto j(g, s) = g * s$$

يحقق الشروط:

1) $e_G * s = s$

2) $(g.g') * s = g * (g' * s)$

3) $m_S(g * s) \geq m_S(s)$

مبرهنة (3-2): كل تأثير للزمرة الضبابية G على المجموعة الضبابية S هو تطبيق صامد قوي و يحقق أن:

$$m_S(g * s) = m_S(s)$$

الإثبات:

$$m_S(j(g, s)) = m_S(g * s) \geq m_S(s) \geq \min\{m_G(g), m_S(s)\} = m_{G \times S}(g, s)$$

ومن ثمّ j تطبيق صامد قوي.

حسب (2) من تعريف التأثير فإن $(g^{-1}.g)*s = g^{-1}*(g*s)$ ومن ثمّ $m_S((g^{-1}.g)*s) = m_S(g^{-1}*(g*s))$

ولكن بالاعتماد على (1) يكون $m_S((g^{-1}.g)*s) = m_S(e_G * s) = m_S(s)$

وحسب (3) فإن $m_S(g^{-1}*(g*s)) \geq m_S(g*s) \geq m_S(s)$

مما سبق يكون $m_S(s) \geq m_S(g*s) \geq m_S(s)$ ومن ثمّ $m_S(g*s) = m_S(s)$.

فيما يلي سنطرح تعريفاً آخر لتأثير زمرة ضبابية على مجموعة ضبابية وسنثبت وجود تكافؤ بين التعريفين.

تعريف (3-3): لتكن G زمرة ضبابية ولتكن S مجموعة ضبابية. نعرف تأثير G على S بأنه تشاكل زمري صامد:

$$q : G \to sym(S)$$
$$g \ \mathbf{a} \ q(g) = f_g$$

يحقق الشرط:

$$\forall\, g_1 \underset{m}{\in} G,\ g_2 \underset{n}{\in} G,\ s_1 \underset{m'}{\in} S,\ s_2 \underset{n'}{\in} S : \min\{m, m'\} = \min\{n, n'\}$$
$$\Rightarrow \mu_S(f_{g_1}(s_1)) = \mu_S(f_{g_2}(s_2))$$

مبرهنة (3-4): كل تأثير للزمرة الضبابية G على المجموعة الضبابية S يحقق ما يأتي:

1) $q(e_G) = id$

2) $q(g^{-1}) = (q(g))^{-1}$

الإثبات:

1) $\forall\, s \underset{m}{\in} S : q(g)(s) = q(e_G.g)(s) = (q(e_G).q(g))(s)$

$\Rightarrow (q(g).(q(g))^{-1})(s) = (q(e_G).q(g)).(q(g))^{-1}(s) = q(e_G).(q(g).(q(g))^{-1})(s)$

ونظراً إلى أن $q(g).(q(g))^{-1} = id$ فإن $id(s) = q(e_G)(s)$ ومن ثمّ $id = q(e_G)$.

2) $\forall\, s \underset{m}{\in} S : q(e_G)(s) = q(g.g^{-1})(s) = (q(g).q(g^{-1}))(s)$

$\Rightarrow ((q(g))^{-1}.q(e_G))(s) = (q(g))^{-1}.(q(g).q(g^{-1}))(s)$

$$\Rightarrow ((q(g))^{-1}.\mathrm{id})(s) = ((q(g))^{-1}.q(g)).q(g^{-1})(s)$$
$$\Rightarrow ((q(g))^{-1}.\mathrm{id})(s) = (id.q(g^{-1}))(s) \Rightarrow (q(g))^{-1} = q(g^{-1})$$

مبرهنة (3-5): لتكن G زمرة ضبابية ولتكن S مجموعة ضبابية، عندئذٍ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1) يوجد تطبيق صامد:

$$j : G \times S \to S$$
$$(g,s) \ \mathbf{a} \ j(g,s) = g * s$$

يحقق الشروط:

1) $e_G * s = s$

2) $(g.g') * s = g * (g' * s)$

3) $m_S(g * s) \geq m_S(s)$

2) يوجد تشاكل زمري صامد:

$$q : G \to sym(S)$$
$$g \ \mathbf{a} \ q(g) = f_g$$

يحقق الشرط :

$$\forall\, g_1 \underset{m}{\in} G,\ g_2 \underset{n}{\in} G,\ s_1 \underset{m'}{\in} S,\ s_2 \underset{n'}{\in} S : \min\{m, m'\} = \min\{n, n'\}$$
$$\Rightarrow m_S(f_{g_1}(s_1)) = m_S(f_{g_2}(s_2))$$

الإثبات: $(1 \Rightarrow 2)$

بالاستفادة من j سنعرف ما يأتي:

$$f_g : S \to S$$
$$s \ \mathbf{a} \ f_g(s) = j(g,s) = g * s$$

إن f_g تطبيق صامد لأنه:

1) $s = s' \Rightarrow (g,s) = (g,s') \Rightarrow f_g(s) = f_g(s')$

2) $s \underset{m}{\in} S \ and \ s' \underset{m}{\in} S \Rightarrow m_S(s) = m_S(s')$

$$\Rightarrow \min\{m_G(g), m_S(s)\} = \min\{m_G(g), m_S(s')\}$$

$\Rightarrow m_{G\times S}(g,s)=m_{G\times S}(g,s')\Rightarrow m_S(g*s)=m_S(g*s')$
$\Rightarrow m_S(f_g(s))=m_S(f_g(s'))$

والتطبيق الصامد f_g يحقق الشرط $m_S(f_g(s))=m_S(g*s)=m_S(s)$ حسب المبرهنة (2-3).

كما أن التطبيق الصامد f_g متباين لأنه عندما $f_g(s_1)=f_g(s_2)$ فإن:

$g*s_1=g*s_2\Rightarrow g^{-1}*(g*s_1)=g^{-1}*(g*s_2)$
$\Rightarrow(g^{-1}.g)*s_1=(g^{-1}.g)*s_2\Rightarrow e_G*s_1=e_G*s_2\Rightarrow s_1=s_2$

وأيضاً إذا كان $f_g(s_1)=g*s_1\underset{n}{\in}S$ و $f_g(s_2)=g*s_2\underset{n}{\in}S$ وكان $g^{-1}\underset{t}{\in}G$ فإن: $(g^{-1},g*s_1)\underset{\min\{n,t\}}{\in}G\times S$ و $(g^{-1},g*s_2)\underset{\min\{n,t\}}{\in}G\times S$، ونظراً إلى أن j تطبيق صامد نجد أن:

$j(g^{-1},g*s_1)\underset{m}{\in}S$ و $j(g^{-1},g*s_2)\underset{m}{\in}S$، ولكن:

$$j(g^{-1},g*s_1)=g^{-1}*(g*s_1)=(g^{-1}.g)*s_1=e_G*s_1=s_1$$
$$j(g^{-1},g*s_2)=g^{-1}*(g*s_2)=(g^{-1}.g)*s_2=e_G*s_2=s_2$$

ومنه $s_1\underset{m}{\in}S$ و $s_2\underset{m}{\in}S$ ومن ثمّ f_g متباين.

كما أن التطبيق الصامد f_g غامر لأنه أياً كانت $s'\underset{m}{\in}S$ فإن $g^{-1}*s'\underset{n}{\in}S$ (حيث $n\geq m$) والعنصر $g^{-1}*s'$ يحقق أن $f_g(g^{-1}*s')=g*(g^{-1}*s')=(g.g^{-1})*s'=e_G*s'=s'$.

من كل ما سبق فإن f_g تقابل صامد يحقق الشرط $m_S(f_g(s))=m_S(s)$ (أي أن $f_g\underset{1}{\in}sym(S)$)، وبناءً عليه نعرف q بالشكل الآتي:

$$q:G\to sym(S)$$
$$g\mapsto q(g)=f_g$$

إن q تطبيق صامد لأنه:

1) $g_1=g_2\Rightarrow j(g_1,s)=j(g_2,s)\Rightarrow g_1*s=g_2*s$
$\Rightarrow f_{g_1}(s)=f_{g_2}(s)\ ;\forall s\underset{m}{\in}S$

ومنه فإن $f_{g_1} = f_{g_2}$ ومن ثمّ $q(g_1) = q(g_2)$.

$$2)\ g_1 \underset{m}{\in} G \ \ and \ \ g_2 \underset{m}{\in} G$$

$$\Rightarrow q(g_1) = f_{g_1} \underset{1}{\in} sym(S) \ and \ q(g_2) = f_{g_2} \underset{1}{\in} sym(S)$$

و ذلك حسب تعريف $sym(S)$.

q تشاكل زمري صامد لأنه أياً كانت $s \underset{m}{\in} S$ فإن:

$$q(g_1.g_2)(s) = f_{g_1.g_2}(s) = (g_1.g_2) * s = g_1 * (g_2 * s)$$

$$= f_{g_1}(f_{g_2}(s)) = f_{g_1}.f_{g_2}(s) = (q(g_1).q(g_2))(s)$$

ونلاحظ أن q يحقق الشرط

$$\forall g_1 \underset{m}{\in} G,\ g_2 \underset{n}{\in} G,\ s_1 \underset{m'}{\in} S,\ s_2 \underset{n'}{\in} S : \min\{m, m'\} = \min\{n, n'\} :$$

$$m_{G\times S}(g_1, s_1) = m_{G\times S}(g_2, s_2) \Rightarrow m_S(g_1 * s_1) = m_S(g_2 * s_2)$$

$$\Rightarrow m_S(f_{g_1}(s_1)) = m_S(f_{g_2}(s_2))$$

$(2 \Rightarrow 1)$

بالاستفادة من q سنعرف j بالشكل الآتي:

$$j : G \times S \to S$$

$$(g, s)\ \mathbf{a}\ j(g, s) = q(g)(s) = f_g(s)$$

إن j تطبيق صامد لأن:

$$1)\ (g_1, s_1) = (g_2, s_2) \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ and } s_1 = s_2 \Rightarrow q(g_1) = q(g_2) \Rightarrow f_{g_1} = f_{g_2}$$

ونظراً إلى أن $s_1 = s_2$ فإن $f_{g_1}(s_1) = f_{g_2}(s_2)$ و منه $j(g_1, s_1) = j(g_2, s_2)$.

$$2)\ m_{G\times S}(g_1, s_1) = m_{G\times S}(g_2, s_2)$$

$$\Rightarrow \min\{ m_G(g_1), m_S(s_1)\} = \min\{ m_G(g_2), m_S(s_2)\}$$

$$\Rightarrow m_S(f_{g_1}(s_1)) = m_S(f_{g_2}(s_2)) \Rightarrow m_S(j(g_1, s_1)) = m_S(j(g_2, s_2))$$

كما أن j يحقق ما يأتي:

$$1)\ j(e_G, s) = q(e_G)(s) = id(s) = s$$

$$2)\ j((g.g'), s) = (q(g.g'))(s) = (q(g).q(g'))(s)$$

$$= \theta(g)(\theta(g')(s)) = \theta(g)(j(g', s)) = j(g, j(g', s))$$

$$3)\ m_S(j(g, s)) = m_S(f_g(s)) \geq m_S(s) \quad ; \ f_g \underset{1}{\in} sym(S)$$

REFERENCES المراجع

[1] Mordeson, J. N., Kiran R. Bhutani and Azriel Rosenfeld . (2005). Fuzzy Group Theory, Springer, 1 – 20 .

[2] Kaufmann, A. (1975). Introduction to The Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press, 1 – 8 .

[3] Pradera, A., E. Trillas, S.Guadarrama, and E. Renedo. (2005). On Fuzzy Set Theories, New Mathematics and Natural Computation 1 (3), 329 – 358.

[4] Didier Dubois, Henri Prade. (1980). Fuzzy Sets and Systems (Theory and Applications), Mathematics in Science and Engineering, volume 144, 9 – 20.

[5] Mashour, A. S., M. H. Ghanim and F. I. Sidky. (1990). Normal Fuzzy Subgroups, Ser. Mat. 20, 2, 53 – 59.

[6] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 35, 512 – 517.

[7] Akram, M.and K. H. Dar. (2007). On Anti Fuzzy Left h-ideals in Hemirings, International Mathematical Forum, 2, no. 46, 2295 – 2304.