التأثير المشوش لزمرة جزئية مشوشة في مجموعة جزئية مشوشة

زكريا بركات[1] و عبد الواحد أبو حمدة[2]

تاريخ الإيداع 2013/05/29
قبل للنشر في 2013/08/21

الملّخص

في هذه الورقة العلمية عرّفنا التأثير المشوش (الضبابي) لزمرة جزئية مشوشة في مجموعة جزئية مشوشة من اليسار (من اليمين). ويتضمن هذا التعريف ثلاثة شروط. وأثبتنا أيضاً وجود تكافؤ بين التأثير المشوش من اليمين والتأثير المشوش من اليسار، كما بيّنا أن تحقق أي شرطين من شروط تعريف التأثير لا يؤدي إلى تحقق الشرط الثالث. ثم قدّمنا مجموعة من النتائج والمبرهنات. كما درسنا العمليات (التقاطع، الاجتماع، المتممة) على التأثيرات المشوشة.

الكلمات المفتاحية: المجموعات الجزئية المشوشة، الزمر الجزئية المشوشة، تأثير زمرة مشوشة على مجموعة مشوشة، العلاقات المشوشة.

التصنيف الرياضياتي العالمي: 2010 SMC 20N25.

[1] طالب ماجستير، [2] أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Fuzzy operation of a fuzzy subgroup on a fuzzy subset

Z. Barakat[1] and A. Abohamdah[2]

Received 29/05/2013
Accepted 21/08/2013

ABSTRACT

In this paper, we will define the structure of fuzzy left (right) operation of a fuzzy subgroup on a fuzzy subset, This definition consists of three conditions. We will also prove the equivalence between fuzzy left operation and fuzzy right operation, and show that any two conditions do not imply the third condition. Then we will prove many results and propositions. We will study the operations (intersection, union and complement) on the fuzzy operations.

Key words: Fuzzy Subsets, Fuzzy Subgroups, Operation of fuzzy group on a fuzzy set, Fuzzy Relations.

Mathematical Subject Classification: 2010 SMC 20N25.

[1] MSC., Student, [2] Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.

1- أساسيات:

افترضنا خلال دراستنا أن G زمرة، الحيادي فيها هو e، و S مجموعة غير خالية.

تعريف 1.1:[3] لتكن X مجموعة غير خالية. نعــرف المجموعــة الجزئيــة المــشوشة (Fuzzy Subset) μ من X بأنها الدالة:

$$\mu: X \longrightarrow [0,1]$$

وسوف نرمز لمجموعة المجموعــات الجزئيــة المــشوشة مــن X جميعهــا بــالرمز $\mathcal{FP}(X)$.

تعريف 2.1:[4] لتكن $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. نعرف متممة μ بأنهــا المجموعــة الجزئيــة المشوشة $\overline{\mu}$ من X والمعرفة بالشكل:

$$\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x) \quad ، \quad \forall x \in X$$

تعريف 3.1:[3] لتكن $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. عندئذٍ يُقال عن μ إنها زمرة جزئيــة مــشوشة (Fuzzy Subgroup) من G إذا تحقق:

1) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad ، \quad \forall x, y \in G$

2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \quad ، \quad \forall x \in G$

وسوف نرمز لمجموعة الزمر الجزئية المشوشة من G بالرمز $\mathcal{F}(G)$.

نتيجة 4.1:[6] إذا كانت μ مجموعة جزئية مشوشة من G وتحقق الــشرط الأول مــن التعريف 3.1 فإن:

$$\mu(x^n) \geq \mu(x) \quad ، \quad \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}$$

تمهيدية 5.1:[1] لتكن $\mu \in \mathcal{F}(G)$. عندئذٍ إذا كانت $\mu(x) \neq \mu(y)$ فإن:

$$\mu(xy) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

تمهيديــــة 6.1:[3] لــتكن $\mu \in \mathcal{F}(G)$. عندئـــذٍ أيـــاً كـــان x مـــن G فـــإن: $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

تعريف 7.1:[4] لتكن X,Y مجموعتين غير خاليتين. نعرف العلاقة المشوشة (Fuzzy Relation) $\mathcal{R}$ من X إلى Y بأنها المجموعة الجزئية المشوشة من $X \times Y$.

أي هي عبارة عن الدالة: $\mathcal{R} : X \times Y \longrightarrow [0,1]$

وفي حال كان $X = Y$ يُقال إن $\mathcal{R}$ علاقة مشوشة في X.

تعريــف 8.1:[4] لتكن $\mathcal{R},\mathcal{S}$ علاقتين مشوشتين من X إلى Y. عندئذٍ فإن $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ إذا تحقق:

$$\forall (x,y) \in X \times Y : \qquad \mathcal{S}(x,y) \leq \mathcal{R}(x,y)$$

تعريف 9.1:[4] لتكن $\mathcal{R},\mathcal{S}$ علاقتين مشوشتين من X إلى Y نعرف الاجتماع $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ بأنه علاقة مشوشة من X إلى Y معرفة بالشكل :

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})(x,y) = \max\{\mathcal{R}(x,y), \mathcal{S}(x,y)\}$$

تعريف 10.1:[4] لتكن $\mathcal{R},\mathcal{S}$ علاقتين مــشوشتين مــن X إلــى Y نعــرف التقــاطع $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$ بأنه علاقة مشوشة من X إلى Y معرفة بالشكل:

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})(x,y) = \min\{\mathcal{R}(x,y), \mathcal{S}(x,y)\}$$

تعريف 11.1:[4] لتكن $\mathcal{R}$ علاقة مشوشة من X إلى Y نعرف متممة $\mathcal{R}$ بأنهــا علاقــة مشوشة $\bar{\mathcal{R}}$ من X إلى Y معرفة بالشكل:

$$\bar{\mathcal{R}}(x,y) = 1 - \mathcal{R}(x,y)$$

كما أن $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

تعريف 12.1:[2] إن العلاقة الكلية (العلاقة الــشاملة أو الواحديــة) المــشوشة " Fuzzy Universal Relation" من X إلى Y التي نرمز لها بالرمز 1_{XY}، هي عبــارة عــن علاقة مشوشة تحقق:

$$1_{XY}(x,y) = 1 \qquad ، \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

تعريف 13.1:[2] إن العلاقة الخالية (العلاقــة الــصفرية) المــشوشة " Fuzzy Empty Relation" من X إلى Y التي نرمز لها بالرمز 0_{XY}، هي عبارة عن علاقة مــشوشة تحقق:

$$0_{XY}(x,y) = 0 \quad ، \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

تعريف 14.1:[4] إذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة X ، فإننا نعـرف الدالـة المميزة (Characteristic Function)χ_A للمجموعة A على النحو الآتي:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \in A \\ 0 & if \quad x \notin A \end{cases}$$

وهي كما نلاحظ مجموعة جزئية مشوشة من X.

مبرهنة 15.1:[5] لتكن G زمرة، H مجموعة جزئية من G . عندئذٍ تكون H زمـرة جزئية من G عندما وفقط عندما تكون χ_H زمرة جزئية مشوشة من G.

2- التأثير المشوش لزمرة جزئية مشوشة على مجموعة مشوشة:

تعريف 1.2: لتكن μ زمرة جزئية مشوشة من G، ولتكن ν مجموعة جزئية مشوشة من S . نعرف التأثير المشوش لـِ μ على ν (من اليسار) بأنه العلاقة المشوشة $\mathcal{R}$ مـن G إلى S التي تحقق ما يأتي:

1) $\mathcal{R}(e,s) \geq \nu(s) \quad ، \quad \forall s \in S$.

2) $\mathcal{R}(x.y,s) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}(y,s)\} \quad ، \quad \forall x,y \in G, \forall s \in S$

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ بحيث :

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

وعندها نقول: إن الزمرة الجزئية المشوشة μ تؤثر على المجموعة الجزئية المشوشة ν (من اليسار) وفق التأثير $\mathcal{R}$.

وبشكل مشابه نعرف التأثير المشوش من اليمين كما يأتي:

تعريف 2.2: لتكن μ زمرة جزئية مشوشة من G، ولتكن ν مجموعة جزئية مشوشة من S. نعرف التأثير المشوش لـِ μ في ν (من اليمين) بأنه العلاقة المشوشة $\mathcal{R}$ من S إلـــى G التي تحقق ما يأتي:

1) $\forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(s,e) \geq \nu(s)$.

2) $\forall x,y \in G, \forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(s,x.y) \geq \min\{\mathcal{R}(s,x),\mathcal{R}(s,y)\}$.

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ بحيث :

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(s,x),\nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(s,y),\nu(s)\} \end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

وعندها نقول: إن الزمرة الجزئية المشوشة μ تؤثر على المجموعة الجزئية المشوشة ν (من اليمين) وفق التأثير $\mathcal{R}$.

نتيجة 3.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$. عندئذٍ يوجد تأثير مشوش لـِ μ على ν (من اليسار) عندما وفقط عندما يوجد تأثير مشوش لـِ μ على ν (من اليمين).

الإثبات:

لنفرض أن $\mathcal{R}$ تأثير مشوش لـِ μ على ν (من اليسار)، ولنعرف العلاقة $\mathcal{P}$ من S إلـــى G بالشكل:

$$\mathcal{P}(s,x) = \mathcal{R}(x,s) \quad ، \quad \forall x \in G, \forall s \in S$$

فنجد:

1) $\forall s \in S$ ، $\mathcal{P}(s,e) = \mathcal{R}(e,s) \geq \nu(s)$

2) $$\begin{aligned} \mathcal{P}(s,x.y) = \mathcal{R}(x.y,s) &\geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\} \quad : \quad \forall x,y \in G, \forall s \in S \\ &= \min\{\mathcal{P}(s,x),\mathcal{P}(s,y)\} \end{aligned}$$

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ بحيث :

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{P}(s,x),\nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{P}(s,y),\nu(s)\} \end{cases}$$

فإنه بحسب تعريف $\mathcal{P}$ يكون:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\}\end{cases}$$

ومنه فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

مما سبق نجد أن $\mathcal{P}$ تأثير مشوش لـِ μ على ν (من اليمين)

ويُثبت العكس بطريقة مشابهة.

من هذه النتيجة نجد أن الخواص والنتائج جميعها التي تنطبق على التأثير المشوش من اليسار سوف تنطبق على التأثير المشوش من اليمين، ومن ثمَّ سوف نقتصر في بقية دراستنا على التأثير المشوش من اليسار واختصاراً سوف ندعوه بالتأثير المشوش بدلاً من التأثير المشوش من اليسار.

تمهيدية 4.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$. عندئذٍ تكون القضايا الآتية محققة :

1) إذا كان $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν، فإن :

$$\mathcal{R}(e,s) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}(x^{-1},s)\} \quad ، \quad \forall x \in G, \forall s \in S$$

2) إذا كانت $\mathcal{P}$ علاقة من G إلى S تحقق: $[\mathcal{P}(x,s) \geq \nu(s) \quad ، \quad \forall s \in S, \forall x \in G]$، فإن $\mathcal{P}$ تحقق الشرطين الأول والثالث من التعريف.

3) إذا كان $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν، ووُجد عنصران x من G و s من S بحيث يحققان:

$$\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}$$

فإن: $\mu(e) \geq \nu(s)$.

الإثبات:

1) بالاستفادة من الشرط الثاني من التعريف:

$$[\mathcal{R}(x.y,s) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}(y,s)\} \quad ، \quad \forall x,y \in G, \forall s \in S]$$

وبوضع $y = x^{-1}$ نجد:

$$\mathcal{R}(e,s) = \mathcal{R}(x.x^{-1},s)$$

$\geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(x^{-1},s)\}$ ، $\forall x \in G, \forall s \in S$

2) لتكن $\mathcal{P}$ علاقة من G إلى S تحقق:

$\left[\mathcal{P}(x,s) \geq \nu(s) \text{ ، } \forall s \in S, \forall x \in G\right]$ عندئذٍ نجد:

•من أجل $x = e$ نجد $\forall s \in S$ ، $\mathcal{P}(e,s) \geq \nu(s)$ ومنه الشرط الأول محقق.

• أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{\mathcal{P}(x,s),\nu(s)\}\\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{P}(y,s),\nu(s)\}\end{cases}$$

ولكن بحسب الفرض $\mathcal{P}(x,s) \geq \nu(s)$ وَ $\mathcal{P}(y,s) \geq \nu(s)$

ومن ثمَّ $\mu(x) \geq \nu(s)$ وَ $\mu(y) \geq \nu(s)$

ومنه
$$\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x),\mu(y^{-1})\}$$
$$= \min\{\mu(x),\mu(y)\} \geq \nu(s)$$

أي إنّ الشرط الثالث محقق.

3) بفرض أن $s \in S, x \in G$ عنصران يحققان:

$$\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\nu(s)\}$$

وبحسب الشرط الثالث من التعريف نجد $\mu(e) = \mu(x.x^{-1}) \geq \nu(s)$.

قضية 5.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$، $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لِ μ على ν.

عندئذٍ فإن القضيتين التاليتين متكافئتان:

1) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\nu(s)\}\\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s),\nu(s)\}\end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$.

2) أياً كان $x \in G, s \in S$ إذْ:

$$\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\nu(s)\}$$

فإن: $\mu(x) \geq \nu(s)$.

الإثبات:

$(2) \Leftarrow (1)$

نفرض أنَّ $x \in G, s \in S$ إذْ:

$$\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}$$

بحسب التمهيدية 4.2 نجد $\mu(e) \geq \nu(s)$ ومن ثمّ:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(e) \geq \min\{\mathcal{R}(e,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

ومنه، بحسب (1)، يكون $\mu(x) = \mu(xe^{-1}) \geq \nu(s)$.

$(1) \Leftarrow (2)$

نفرض أنَّ $x, y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

بحسب (2) يكون : $\mu(y) \geq \nu(s)$ و $\mu(x) \geq \nu(s)$

ومنه $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \nu(s)$.

نتيجة 6.2: إذا كان $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ علـى ν، و x, y عنصرين من G و s عنصراً من S إذْ تحقق:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

فإن: $\mu(xy) \geq \nu(s)$.

الإثبات: تنتج مباشرةً من التعريف 1.2 والقضية 5.2.

نتيجة 7.2: إذا كان $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν، و كان x عنصراً من G و s عنصراً من S إذْ يحققان: $\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}$ فإن:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(x^n) \geq \nu(s)$.

الإثبات:

لنفرض أن x عنصر من G و s عنصر من S إذْ يتحقق:

$$\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}$$

وبحسب التمهيدية 4.2 نجد: $\mu(x) \geq \nu(s)$

وبحسب النتيجة 4.1 نجد $\forall n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ ومن ثمَّ $\forall n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(x^n) \geq \nu(s)$.

مثال 8.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$ ولنعرف العلاقة $\mathcal{R}$ من G إلى S بالشكل:

$$\mathcal{R}(x,s) = \nu(s) \quad ، \quad \forall x \in G, \forall s \in S$$

فنجد:

1) $\forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(e,s) = \nu(s)$.

2)
$$\mathcal{R}(xy,s) = \nu(s) = \min\{\nu(s), \nu(s)\}$$
$$= \min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}(y,s)\}$$
$$\forall x,y \in G, \forall s \in S$$

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}\\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\}\end{cases}$$

فإن $\mu(x) \geq \nu(s)$ و $\mu(y) \geq \nu(s)$ مادام أنَّ $\mathcal{R}(y,s) = \nu(s), \mathcal{R}(x,s) = \nu(s)$،

ومنه $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \nu(s)$.

[ومن ثمَّ فإن كل زمرة جزئية مشوشة μ تؤثر على مجموعة جزئية مشوشة ν وفق التأثير المشوش $\mathcal{R}$، وكحالة خاصة عندما $\mu = \nu$ نجد أن كل زمرة جزئية مشوشة تؤثر على نفسها وفق $\mathcal{R}$].

ملاحظة: إن الشروط الثلاثة في التعريف 1.2 ليست متكافئة، كما أن تحقق أي شــرطين منها لا يؤدي إلى تحقق الشرط الثالث والأمثلة الثلاثة الآتية توضح ذلك.

مثال 9.2: لتكن الزمرة $(\mathbb{Z}_2,+)$ إذْ إنّ العملية $(+)$ هي عملية الجمــع بالمقــاس 2، ولتكن $\mu=\{(0,0.6),(1,0.3)\}$ زمرة جزئية مشوشة من الزمرة $\mathbb{Z}_2$، ولنأخــذ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة بالشكل: $\mathcal{R}(x,z)=\mu(x)\ \ (\forall x,z\in\mathbb{Z}_2)$ فنجد:

1- $\mathcal{R}(0,z)=\mu(0)\geq\mu(z)$ ، $\forall z\in\mathbb{Z}_2$ ومن ثمَّ الشرط الأول محقق.

2- $$\begin{aligned}\mathcal{R}(x+y,z)&=\mu(x+y)\geq\min\{\mu(x),\mu(y)\}\\&=\min\{\mathcal{R}(x,z),\mathcal{R}(y,z)\}\ \ ،\ \ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

ومن ثمَّ الشرط الثاني محقق.

3- من أجل $x=1,y=z=0$ نجد :

$$\begin{cases}\mu(0)=0.6=\min\{\mathcal{R}(0,0),\mu(0)\}\\\mu(1)=0.3=\min\{\mathcal{R}(1,0),\mu(0)\}\end{cases}$$

في حين $\mu(1+(-0))=\mu(1)=0.3<0.6=\mu(0)$

ومن ثمَّ الشرط الثالث غير محقق.

مثال 10.2: لتكن $\mu\in\mathcal{F}(\mathbb{Z}_4)$ ، ولتكن $\nu\in\mathcal{FP}(\mathbb{Z}_4)$ – إذْ إنَّ العملية المعرفــة على $\mathbb{Z}_4$ هي الجمع بالمقاس 4 – إذْ:

$$\forall n\in\mathbb{Z}_4\ \ :\ \ \nu(n)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{زوجي } n\\ 0 & \text{فردي } n\end{cases}$$

ولنعرف العلاقة المشوشة $\mathcal{R}$ على $\mathbb{Z}_4$ بالشكل:

$$\forall n,m\in\mathbb{Z}_4\ \ :\ \ \mathcal{R}(n,m)=\begin{cases}1 & \text{زوجي } n+m\\ \frac{1}{2} & \text{فردي } n+m\end{cases}$$

فنجد:

1- $\mathcal{R}(0,m)\geq\nu(m)\ \ :\ \ \forall m\in\mathbb{Z}_4$ ومن ثمّ الشرط الأول محقق.

2- $\mathcal{R}(3+3,1)=\mathcal{R}(2,1)=\frac{1}{2}<1=\min\{\mathcal{R}(3,1),\mathcal{R}(3,1)\}$

ومن ثمَّ الشرط الثاني غير محقق.

3- بفرض أن $n,m,t\in\mathbb{Z}_4$ عناصر تحقق:

$$\begin{cases}\mu(n)\geq\min\{\mathcal{R}(n,t),\nu(t)\}\\ \mu(m)\geq\min\{\mathcal{R}(m,t),\nu(t)\}\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\mu(n+(-m))&\geq\min\{\mu(n),\mu(m)\}\\ &\geq\min\{\min\{\mathcal{R}(n,t),\nu(t)\},\min\{\mathcal{R}(m,t),\nu(t)\}\}\\ &=\min\{\mathcal{R}(n,t),\mathcal{R}(m,t),\nu(t)\}\geq\nu(t)\end{aligned}$$

ومن ثمَّ الشرط الثالث محقق.

مثال 11.2: ليكن $t\in]0,1]$ عدداً ثابتاً، ولـــتكن $\mu\in\mathcal{F}(G),\nu\in\mathcal{FP}(S)$ إذْ:

$$\mu(x)=\nu(s)=t\quad(\forall x\in G,\forall s\in S)$$

ولنأخذ العلاقة الصفرية المشوشة 0_{GS} فنجد:

1- $\forall s\in S$ ، $0_{GS}(e,s)=0<\nu(s)$ ومنه 0_{GS} لا تحقق الشرط الأول.

2- $\forall x,y\in G,\forall s\in S$ ، $0_{GS}(x.y,s)=0=\min\{0_{GS}(x,s),0_{GS}(y,s)\}$

ومنه 0_{GS} تحقق الشرط الثاني.

3- $\mu(xy^{-1})=t=\nu(s)\ \ \forall x,y\in G,\forall s\in S$ ومن ثـمَّ 0_{GS} تحقــق الشرط الأخير.

نتيجة 12.2: لتكن $\mu\in\mathcal{F}(G),\nu\in\mathcal{FP}(S)$، عندئذٍ فــإن القــضيتين التــاليتين متكافئتان:

(1) توجد علاقة مشوشة $\mathcal{R}$ من G إلى S تحقق الشروط الآتية:

1- $\forall s\in S$ ، $\mathcal{R}(e,s)\geq\nu(s)$.

2- $\forall x,y\in G,\forall s\in S$ ، $\mathcal{R}(x.y,s)\geq\min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$.

3- أياً كان $x,y\in G,s\in S$ فإن:

$\mathcal{R}(x.y^{-1},s)=1$ عندما $\nu(s)=\max\{\mu(x),\mu(y)\}$

$\mathcal{R}(x.y^{-1},s)\neq 1$ عندما $\nu(s)=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$

(2) $\mu(x)=\nu(s)=t$ ، $\forall x\in G,\forall s\in S$

إذْ: $t\in[0,1]$ عدد ثابت.

الإثبات:

$(1)\Leftarrow(2)$ أياً كان s من S و x من G فإننا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $\mathcal{R}(e,s)=1$ ومنه $\mathcal{R}(xx^{-1},s)=1$ ومن ثمّ بحسب (3) نجد:

$$\nu(s)=\max\{\mu(x),\mu(x^{-1})\}=\mu(x)$$

الحالة الثانية: $\mathcal{R}(e,s)\neq 1$ ومنه $\mathcal{R}(xx^{-1},s)\neq 1$ ومن ثمّ بحسب (3) نجد:

$$\nu(s)=\min\{\mu(x),\mu(x^{-1})\}=\mu(x)$$

مما سبق نجد أن $\forall x\in G,\forall s\in S$ ، $\mu(x)=\nu(s)=t$ إذْ $t\in[0,1]$ عدد ثابت.

$(2)\Leftarrow(1)$ لتكن $\mathcal{R}$ علاقة مشوشة من G إلى S معرفة بالشكل:

$$\mathcal{R}(x,s)=t \quad (\forall x\in G,\forall s\in S)$$

عندها نجد ما يأتي:

1) $\mathcal{R}(e,s)=t=\nu(s)$ ، $\forall s\in S$

2) أياً كان s من S و x,y من G فإن:

$$\mathcal{R}(x.y,s)=t=\min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$$

3) أياً كان s من S و x,y من G فإن:

$$\nu(s)=t=\max\{\mu(x),\mu(y)\}$$
$$=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$

[ومن ثمّ فإن $\mathcal{R}$ تأثير مشوش لـِ μ على ν].

نتيجة 13.2: لتكن $\mu\in\mathcal{F}(G),\nu\in\mathcal{FP}(S)$، ولتكن $\mathcal{R}$ علاقة مشوشة من G إلى S تحقق:

1) $\forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(e,s) \geq \nu(s)$.

2) $\forall x,y \in G, \forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(x.y,s) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$.

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ فإن:

$\nu(s) = \max\{\mu(x),\mu(y)\}$ عندما $\mathcal{R}(x.y^{-1},s) = 1$

$\nu(s) = \min\{\mu(x),\mu(y)\}$ عندما $\mathcal{R}(x.y^{-1},s) \neq 1$

عندئذٍ فإن $\mathcal{R}$ تحقق ما يأتي:

أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s),\nu(s)\}\\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s),\nu(s)\}\end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

الإثبات:

بحسب النتيجة 12.2 نجد $\forall x,y \in G, \forall s \in S$ ، $\mu(x) = \nu(s) = t$ (إذْ $t \in [0,1]$ عدد ثابت)

ومن ثمّ $\mu(xy^{-1}) = t = \nu(s)$ والنتيجة صحيحة.

إذا كانت $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν إذْ μ زمرة جزئية مشوشة من الزمرة G و ν مجموعة جزئية مشوشة من المجموعة S فليس بالضرورة أن تحقق $\mathcal{R}$ الشرط الثالث من النتيجة 13.2 ، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 14.2: لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G إذْ $H \subsetneq G$ عندها يوجد عنصر $x_0 \in G$ إذْ $x_0 \notin H$. إنّ الدالة المميزة لـِ H هي زمرة جزئية مشوشة من G بحسب المبرهنة 15.1 وبحسب المثال 8.2 فإن χ_H تؤثر على نفسها وفق التأثير $\mathcal{R}$ إذْ $\mathcal{R}$ معرف بالشكل: $\forall x,z \in G$ ، $\mathcal{R}(x,z) = \chi_H(z)$. لنفرض جدلاً أن χ_H تحقق الشرط:

أياً كان $x,y \in G, s \in S$ فإن:

$\mathcal{R}(x.y^{-1},s) = 1$ عندما $\nu(s) = \max\{\mu(x),\mu(y)\}$

$\mathcal{R}(x.y^{-1},s) \neq 1$ عندما $\nu(s) = \min\{\mu(x),\mu(y)\}$

ومنه بحسب النتيجة 12.2 فإن $\forall h \in G$ ، $\chi_H(h) = t$ (إذْ $t \in [0,1]$ عدد ثابت) وهذا تناقض لأنه يوجد عنصران من G هما x_0, e إذْ $\chi_H(e) = 1 \neq 0 = \chi_H(x_0)$ ، ومن ثمَّ فإن $\mathcal{R}$ لا تحقق الشرط السابق.

ملاحظة: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$، ولتكن $\mathcal{R}, \delta$ علاقتين مشوشتين من G إلى S بحيث $\mathcal{R} \subseteq \delta$. عندئذٍ فإنه إذا كانت $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً فليس بالضرورة أن تكون δ تأثيراً مشوشاً، وكذلك إذا كانت δ تأثيراً مشوشاً فليس بالضرورة أن تكون $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً والمثالان التاليان يوضحان ذلك.

مثال 15.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$. إن العلاقة الواحدية المشوشة 1_{GS} تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν لأن:

1) $\forall s \in S$ ، $1_{GS}(e,s) = 1 \geq \nu(s)$.

2) $\forall x,y \in G, \forall s \in S$ ، $1_{GS}(x.y,s) = 1 = \min\{1_{GS}(x,s), 1_{GS}(y,s)\}$.

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{1_{GS}(x,s), \nu(s)\} = \nu(s) \\ \mu(y) \geq \min\{1_{GS}(y,s), \nu(s)\} = \nu(s) \end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x),\mu(y)\} \geq \nu(s)$

وبأخذ المجموعة الجزئية المشوشة والزمرة الجزئية المشوشة المعرفتين في المثال 11.2 نجد أن 1_{GS} تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν في حين العلاقة الصفرية لا تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν علماً بأن $0_{GS} \subseteq 1_{GS}$.

مثال 16.2: لتكن $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_4)$ ، ولتكن $\nu \in \mathcal{FP}(\mathbb{Z}_4)$ إذْ:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_4 \quad : \quad \nu(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{زوجي } n \\ 0 & \text{فردي } n \end{cases}$$

ولنأخذ العلاقة المشوشة $\mathcal{R}$ على $\mathbb{Z}_4$ والمعرفة في المثـــال 10.2، ولنعــرف العلاقــة المشوشة δ على $\mathbb{Z}_4$ بالشكل:

$$\delta(x,z) = \nu(z) \quad ، \quad \forall x,z \in \mathbb{Z}_4$$

التي تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν بحسب المثال 8.2، ومن الواضح أن $\delta \subseteq \mathcal{R}$ في حين $\mathcal{R}$ لا تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν.

قضية 17.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$، ولتكن $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν محتوى في العلاقة المشوشة δ التي تحقق:

$$.\delta(x.y,s) \geq \min\{\delta(x,s),\delta(y,s)\} \ (\forall x,y \in G \ ,\forall s \in S)$$

عندئذٍ فإن δ يكون تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν.

الإثبات:

أياً كان $s \in S$ فإن $\delta(e,s) \geq \mathcal{R}(e,s) \geq \nu(s)$ ومنـــه فـــإن الـــشرط الأول محقق.

أياً كان $x,y \in G$ و $s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\delta(x,s),\nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\delta(y,s),\nu(s)\} \end{cases}$$

وكون $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً و $\mathcal{R} \subseteq \delta$ فإن $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

ومن ثمَّ فإن δ هو تأثير مشوش لـِ μ على ν.

قـــضية 18.2: لـــتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S)$، ولـــتكن $\mu \in \mathcal{F}(G)$ بحيـــث تحقـــق $\mu(x) \neq \mu(y)$ من أجل أي عنصرين مختلفين x,y مـــن G ولـــتكن $\mathcal{R}$ علاقـــة مشوشة من G إلى S تحقق:

1) $\forall s \in S \quad ، \quad \mathcal{R}(e,s) \leq \nu(s)$.

2) $\forall x,y \in G, \forall s \in S$ ، $\mathcal{R}(x.y,s) \le \min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$

3) أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \le \max\{\mathcal{R}(x,s),\nu(s)\}\\ \mu(y) \le \max\{\mathcal{R}(y,s),\nu(s)\}\end{cases}$$

فإن: $\mu(xy^{-1}) \le \nu(s)$

عندئذٍ فإن $\overline{\mathcal{R}}$ تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ $\overline{\mu}$ على $\overline{\nu}$.

الإثبات:

بدايةً لنثبت أن $\overline{\mu}$ زمرة جزئية مشوشة من G

أياً كان x,y من G فإن:

1) $$\overline{\mu}(xy) = 1-\mu(xy)$$

$$= 1-\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$ (بحسب التمهيدية 5.1)

$$\ge \min\{1-\mu(x),1-\mu(y)\}$$

$$= \min\{\overline{\mu}(x),\overline{\mu}(y)\}$$

2) $\overline{\mu}(x^{-1}) = 1-\mu(x^{-1}) = 1-\mu(x) = \overline{\mu}(x)$ (بحسب التمهيدية 6.1)

<u>أولاً:</u> أياً كان s من S فإن: $\mathcal{R}(e,s) \le \nu(s)$ ومنه

$$\overline{\mathcal{R}}(e,s) = 1-\mathcal{R}(e,s) \ge 1-\nu(s) = \overline{\nu}(s)$$

ومن ثمَّ الشرط الأول محقق.

<u>ثانياً:</u> أياً كان $x,y \in G$ و $s \in S$ فإن: $\mathcal{R}(x.y,s) \le \min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$

ومنه $1-\mathcal{R}(x.y,s) = \overline{\mathcal{R}}(x.y,s) \ge 1-\min\{\mathcal{R}(x,s),\mathcal{R}(y,s)\}$

$$\ge \min\{1-\mathcal{R}(x,s),1-\mathcal{R}(y,s)\}$$

$$= \min\{\overline{\mathcal{R}}(x,s),\overline{\mathcal{R}}(y,s)\}$$

ومن ثمَّ الشرط الثاني محقق.

<u>ثالثاً:</u> أياً كان $x,y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\overline{\mu}(x) \geq \min\{\overline{\mathcal{R}}(x,s), \overline{\nu}(s)\} \\ \overline{\mu}(y) \geq \min\{\overline{\mathcal{R}}(y,s), \overline{\nu}(s)\}\end{cases}$$

ومنه $1 - \mu(x) \geq \min\{\overline{\mathcal{R}}(x,s), \overline{\nu}(s)\}$ ومن ثمَّ:

$$\begin{aligned}\mu(x) &\leq 1 - \min\{1 - \mathcal{R}(x,s), 1 - \nu(s)\} \\ &= \max\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}\end{aligned}$$

وبشكل مشابه نجد أن $\mu(y) \leq \max\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\}$

وبحسب (3) فإن: $\mu(xy^{-1}) \leq \nu(s)$

ومنه $\overline{\mu}(xy^{-1}) \geq \overline{\nu}(s)$

مما سبق نجد أن $\overline{\mathcal{R}}$ تشكل تأثيراً مشوشاً لـِ $\overline{\mu}$ على $\overline{\nu}$.

مبرهنة 19.2: لتكن $\mathcal{R}, \mathcal{R}`, \nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$ تأثيرين مـــشوشين لـِ $\mu$ على $\nu$. عندئذٍ فإن $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`$ تأثير مشوش لـِ μ على ν .

الإثبات:

<u>أولاً:</u> أياً كان $s \in S$ فإن: $(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(e,s) = \min\{\mathcal{R}(e,s), \mathcal{R}`(e,s)\}$
$$\geq \min\{\nu(s), \nu(s)\} = \nu(s)$$

ومن ثم الشرط الأول محقق.

<u>ثانياً:</u> أياً كان $x, y \in G$ و $s \in S$ فإن:

$$\begin{aligned}(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(xy,s) &= \min\{\mathcal{R}(xy,s), \mathcal{R}`(xy,s)\} \\ &\geq \min\{\min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}(y,s)\}, \min\{\mathcal{R}`(x,s), \mathcal{R}`(y,s)\}\} \\ &\geq \min\{\min\{\mathcal{R}(x,s), \mathcal{R}`(x,s)\}, \min\{\mathcal{R}(y,s), \mathcal{R}`(y,s)\}\} \\ &= \min\{(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(x,s), (\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(y,s)\}\end{aligned}$$

ومن ثمَّ الشرط الثاني محقق.

<u>ثالثاً:</u> أياً كان $x, y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases}\mu(x) \geq \min\{(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(y,s), \nu(s)\}\end{cases}$$

فمن أجل المتراجحة الأولى نميّز حالتين:

الحالة الأولى: عندما $\mathcal{R}(x,s) \geq \mathcal{R}`(x,s)$ فإن:

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(x,s) = \mathcal{R}`(x,s)$$

ومن ثمّ $\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}`(x,s), \nu(s)\}$

وبحسب القضية 5.2 وكون $\mathcal{R}`$ تأثيراً مشوشاً فإن $\mu(x) \geq \nu(s)$

الحالة الثانية: عندما $\mathcal{R}(x,s) \leq \mathcal{R}`(x,s)$ فإن: $(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`)(x,s) = \mathcal{R}(x,s)$

ومن ثمّ $\mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\}$

وبحسب القضية 5.2 وكون $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً فإن $\mu(x) \geq \nu(s)$

وبشكل مشابه نجد أن $\mu(y) \geq \nu(s)$

ومنه $\mu(xy^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \nu(s)$

أي أن $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`$ يحقق الشرط الثالث من التعريف.

مما سبق نجد أن $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`$ تأثير مشوش لـِ μ على ν .

ملاحظة: إذا كان $\mathcal{R}$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν و $\mathcal{R}`$ علاقة مشوشة من $G$ إلى $S$ فليس بالضرورة أن تكون $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}`$ تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν، وذلك لأنه لو أخذنا على سبيل المثال المجموعة الجزئية المشوشة والزمرة الجزئية المشوشة المعرفتين في المثال 10.2 مع العلاقة الصفرية المشوشة التي ليست تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν والواحدية المشوشة التي هي تأثير مشوش لـِ μ على ν فسنجد أن $1_{GS} \cap 0_{GS} = 0_{GS}$ ليس تأثيراً مشوشاً لـِ μ على ν.

مبرهنة 20.2: لتكن $\nu \in \mathcal{FP}(S), \mu \in \mathcal{F}(G)$، $\mathcal{R}$ تأثيرًا مشوشاً لـِ μ على ν، $\mathcal{R}`$ علاقة مشوشة من $G$ إلى $S$. عندئذٍ فإن $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}`$ تحقق الشرط الأول والثالث من التعريف 1.2.

الإثبات:

أياً كان $s \in S$ فإن: $\mathcal{R}(e,s) \geq \nu(s)$

ومنه $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}`)(e,s) = \max\{\mathcal{R}(e,s), \mathcal{R}`(e,s)\}$

$$\geq \nu(s)$$

ومن ثمَّ الشرط الأول محقق.

أياً كان $x, y \in G, s \in S$ إذْ:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}`)(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}`)(y,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

ولمّا كان $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}`$

فإن:

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \min\{\mathcal{R}(x,s), \nu(s)\} \\ \mu(y) \geq \min\{\mathcal{R}(y,s), \nu(s)\} \end{cases}$$

ومنه فإن $\mu(xy^{-1}) \geq \nu(s)$

ومن ثمَّ الشرط الثالث محقق.

REFERENCES

[1] Akgul, M. (1988). ***Some Properties of Fuzzy groups,*** **journal of Mathematical Analysis and Applications, 133, 93-100.**

[2] Hitoshi, F. (1998). ***Algebraic Formalisations of Fuzzy Relations and Their Representation Theorems*****, Department of Informatics, Kyushu University Fukuoka 812-8581, Japan**

[3] John, N. Kiran, R. Azriel, R. (2005). ***Fuzzy Group Theory*****, Springer, Berlin.**

[4] Kwang, H. Lee. (2005). ***First Course on Fuzzy Theory and Applications*****, Springer, Berlin.**

[5] Massa'deh, M. (2008). ***Properties of Fuzzy Subgroups in particular the Normal Subgroups*****. Ph. D. Thesis, Univ. of Damascus, 9p.**

[6] Sherwood. (1983). ***Product of Fuzzy Subgroups*****, Fuzzy Sets and Systems, 11,79-89.**