الصفات الثابتة بالتماثل وتطبيقها في التحقق من تماثل الزمر منتهية التمثيل

نضال جبيلي[1] و عبد اللطيف هنانو[2]

تاريخ الإيداع 2013/03/25
قبل للنشر في 2013/09/26

الملّخص

تقدم هذه الورقة العلمية بعض الصفات الثابتة بالتماثل في الزمر مع توظيفها في خوارزمية لاختبار زمرتين منتهيتي التمثيل. وتبدأ هذه الخوارزمية بإيجاد الزمر الدوارة المحتواة في كل من الزمرتين المطلوب اختبارهما، ومن ثم يقارن توزُّع مجموعة معينة من عناصر الزمرتين الخاضعتين للاختبار ضمن تلك الزمر الدوارة. تهدف الخوارزمية إلى الوصول إلى إحدى النتيجتين:

1. الحصول على زمرتين تملكان البصمة نفسها.
2. إثبات أن الزمرتين الخاضعتين للاختبار غير متماثلتين.

الكلمات المفتاحية: تماثل، زمر منتهية التمثيل، صفات ثابتة بالتماثل.

التصنيف الرياضي العالمي : 05E15

[1] طالب ماجستير، [2] أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Isomorphism-invariants and their applications in testing for isomorphism between finitely presented groups

N.Jbeily[1] and A. Hanano[2]

Received 25/03/2013
Accepted 26/09/2013

ABSTRACT

This paper introduces some isomorphism-invariants for groups and uses them to test two finitely presented groups. The introduced algorithm starts with the construction of all cyclic groups contained in the groups under test, then it compares the distribution of a particular set of elements in the constructed cyclic groups. The algorithm leads to one of these two results:

1. **The groups have the same "fingerprint"**
2. **The groups are not isomorphic**

Key words: Isomorphism, Finitely Presented Groups, Isomorphism-invariants.

[1] MSC., Student, [2] Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.

مقدمة

كان تيتز (Tietze) أول من طرح مسألة التحقق من تماثل زمرتين منتهيتي التمثيل وذلك في عام (1908)، ومن ثم صاغ ماكس دين (Max Dehn) عام (1911) ثلاث مسائل حول الزمر منتهية التمثيل من بينها التحقق من تماثل الزمر ذات التمثيل المنتهي وتعرف هذه المسائل بمسائل دين (Dehn's Problems) وهي: مسألة ترميز الحيادي (identity problem)، ومسألة الترافق (conjugacy problem)، ومسألة التماثل (isomorphism problem). والمسائل الثلاث السابقة غير قابلة للإقرار فقد أثبت نوفيكوف (Novikov) وبون (Boone) أن مسألتي الترافق وترميز الحيادي غير قابلتين للإقرار، كما أثبت ربين (Rabin) وأديان (Adian) أن مسألة التماثل غير قابلة للإقرار. ويُعدُّ ماغنس (Magnus) في كتابه [3] أن مسألة التماثل هي الأكثر صعوبة من بين هذه المسائل.

تعاريف ومصطلحات أساسية:[1]

1. يقال عن زمرة F_X إنها زمرة حرة على المجموعة $X \neq \Phi$ المحتواة في F_X إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: أياً تكن الزمرة G وأياً يكن التطبيق $q : X \to G$، يوجد تشاكل زمري وحيد $q' : F_X \to G$ يحقق: $\forall x \in X : q(x) = q'(x)$

2. اللصاقة النظامية لـمجموعة R في زمرة G هي تقاطع الزمر الجزئية الناظمية في G التي كل منها يحتوي المجموعة R. ونرمز لها $< R^G >$. [1]

3. لتكن X مجموعة غير خالية، نرمز للمجموعة $\{(x,-1) : x \in X\}$ بالرمز X^{-1}. ونرمز لكل عنصر $(x,-1)$ من X^{-1} بالرمز x^{-1}. [1]

4. نعرف المجموعة A_X بأنها $X \cup X^{-1}$، ونعرف من أجل A_X المجموعة A_X^* بأنها مجموعة الكلمات التي كل منها من الشكل $x_1 x_2 \dots x_r$ إذْ $x_i \in A_X$ و $1 \le i \le r$.[1]

5. لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن R مجموعة جزئية من A_X^*، نعرف التمثيل للزمرة G بأنه زمرة F_X / N تحقق أن $F_X/N \cong G$ إذْ $N =< R^{F_X} >$ ونرمز الزمرة F_X / N بالرمز $< X \mid R >$.

ونقول: إن التمثيل $< X \mid R >$ منتهٍ إذا كانت X , R مجموعتين منتهيتين وعندئذٍ تُسمى G زمرة منتهية التمثيل. [1]

6. نقول عن زمرتين: إنهما تملكان البصمة (fingerprint) نفسها إذا امتلكتا صفة مشتركة ثابتة بالتماثل.

طرائق التحقق من تماثل الزمر ذات التمثيل المنتهي:

من الممكن تصنيف خوارزميات واختبارات التحقق من تماثل الزمر ذات التمثيل المنتهي إلى ثلاثة أصناف:

1. خوارزميات للتحقق من وجود تماثل بين زمر ذات تمثيل منتهٍ تملك خاصة معينة، فقدأثبت سيغال (Segal) في عام (1990) وجود خوارزمية للتحقق من تماثل زمرٍ متعددة التدوير (Polycyclic Groups) معطاة بتمثيلات منتهية [5]. كما قدم (O’Brien) عام (1994) خوارزمية لاختبار تماثل الـ p – زمر [4].

2. في عام (1992) قدم هولت و ريز (Holt & Rees) مقاربة أكثر عمومية لاختبار التماثل بين الزمر منتهية التمثيل؛ وذلك بالاعتماد على إجرائية كنوث – بندكس (Knuth-Bendix Procedure)، وتقوم هذه المقاربة على محاولة إثبات وجود أو عدم وجود تماثل بالتناوب عبر تنفيذ برنامج حاسوبي مدداً طويلة إلى أن تتحقق إحدى هاتين النتيجتين [2].

3. الاعتماد على الصفات الثابتة بالتماثل (Isomorphism-invariants) أو ما يعرف ببصمة الزمرة، وتُستخدم هذه الطريقة لغايتين:

i) إثبات عدم وجود تماثل بين زمرتين.

ii) تبسيط البحث عن الزمر المتماثلة عبر تقسيم مجموعة من الزمر المطلوب اختبارها إلى مجموعات أصغر في عدد عناصرها، وفي كل منها زمر تحمل البصمة نفسها [1].

قدَّمنا خوارزمية من النوع الأخير (3) ولكن نبدأ بتعريف دليل عنصر في زمرة دوارة؟

تعريف

لتكن C زمرة دوارة مولدة بالعنصر x نعرف دليل عنصر a من C بأنه العـــدد الطبيعي i الذي يحقق أن $a = x^i$، وذلك حيث $(1 \le i \le |C|)$ ونرمز له بـــ $I_C(a)$.

الخوارزمية

الدخل: تمثيلان منتهيان لزمرتين G_1, G_2 .

الخرج: في حال نجاح الخوارزمية فإن الزمرتين G_1, G_2 تملكان البصمة نفسها، وإلا فإن G_1 لا تماثل G_2 .

خطوات الخوارزمية:

1. لتكن $\Sigma_1 = \{\}$ أسرة خالية: من أجل كل عنصر a من G_1 شكّل الزمرة الدوارة H_a المولدة بـــهذا العنصر، وأضف H_a إلى الأسرة Σ_1 .

2. لتكن $\Sigma_2 = \{\}$ أسرة خالية: من أجل كل عنصر c من G_2 شكّل الزمرة الدوارة K_c المولدة بـــهذا العنصر، وأضف K_c إلى الأسرة Σ_2 .

3. شكّل الأسرة $\Psi_1 = \{Z_{|H|} : H \in \Sigma_1\}$ و الأسرة $\Psi_2 = \{Z_{|K|} : K \in \Sigma_2\}$.

4. إذا كان $\Psi_1 = \Psi_2$ انتقل إلى الخطوة التالية وإلا أوقف العمل وأظهر النتيجة لا G_1 تماثل G_2 .

5. من أجل كل $H_a \in \Sigma_1$ إذا وُجد $H_b \in \Sigma_1$ حيث $H_a \subset H_b$ احذف H_a مـــن Σ_1 .

ومن أجل كل $K_c \in \Sigma_2$ إذا وُجد $K_d \in \Sigma_2$ حيث $K_c \subset K_d$ احذف K_c من Σ_2 .

6. لكل H_a من Σ_1 شكّل المجموعة $S_a = \{a.b : \exists H_b \in \Sigma_1; < b >= H_b \ne H_a\}$.

ولكل K_c من Σ_2 شكّل المجموعة $S_c = \{c.d : \exists K_d \in \Sigma_2; < d >= K_d \ne K_c\}$.

ولتكن $\Gamma_1 = \{S_a : H_a \in \Sigma_1\}$ و $\Gamma_2 = \{S_c : K_c \in \Sigma_2\}$.

7. لكل H_a من Σ_1 شكّل المجموعة S'_a حيث:

$$S'_a = \{(a_k, b_k) : \exists s \in S_a; s \in H_1, ..., H_m; |H_k| = a_k, I_{H_k}(s) = b_k\}$$

وذلك حيث $(1 \le k \le m)$ و حيث $H_1, ..., H_m \in \Sigma_1$.

8. لكل K_c من Σ_2 شكّل المجموعة S'_c حيث:

$$S'_c = \{(c_l, d_l) : \exists z \in S_c; z \in K_1,...,K_n; | K_l | = c_l, I_{K_l}(z) = d_l\}$$

وذلك حيث ($1 \le l \le n$) و حيث $K_1,...,K_n \in \Sigma_2$.

9. لتكن $\Omega_1 = \{S'_a : H_a \in \Sigma_1\}$ و $\Omega_2 = \{S'_c : K_c \in \Sigma_2\}$:

إذا كانت $\Omega_1 = \Omega_2$ فإن الزمــرتين G_1, G_2 تملكــان البــصمة ذاتهــا، وإذا كــان $\Omega_1 \neq \Omega_2$ فإن G_1 لا تماثل G_2 .

مبرهنة

إذا كانت G_1, G_2 زمرتين منتهيتين فالخوارزمية السابقة تعطي في حــال نجاحهــا (أي عندما $\Omega_1 = \Omega_2$) زمرتين تملكان البصمة نفسها وإلا فإنها تعطي زمرتين غير متماثلتين.

الإثبات

ليكن $f : G_1 \to G_2$ تماثلاً بين الزمرتين G_1, G_2:

إذا كان $g \in G_1$ و كانت مرتبة g في G_1 هي n فإن مرتبة $f(g)$ في G_2 هي n أيضاً لأن:

$(f(g))^n = f(g^n) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$، وإن n هو أصغر عدد طبيعي يحقق العلاقة $(f(g))^n = 1_{G_2}$لأن:

بفرض وجود عدد $m < n$ يحقق $(f(g))^m = 1_{G_2}$عندئذٍ يكــون $f(g^m) = 1_{G_2}$ أي إن $g^m = 1_{G_1}$ وهذا يناقض أن مرتبة g في G_1 هي n. ومنه نجد أن الأسرتين Σ_1, Σ_2 ستكونان متساويتين (بعد أن نستبدل بكل زمرة دوارة C تنتمي إلى Σ_1, Σ_2 الزمرة $Z_{|C|}$) وهذا يصلح معياراً مستقلاً للزمر المتماثلة أي تكفي مقارنة Σ_1, Σ_2 بعــد إجــراء عمليــة الاســتبدال الــسابقة و فـــي حـــال عـــدم تـــساويهما فـــإن G_1 لا تماثـــل G_2 .

بقي أن نثبت أن أدلة عنصر في الزمر الدوارة التي تحويه تساوي أدلة صورته وفق تماثل:

ليكن $g \in G_1$ وبفرض أن $I_{C_1}(g) = i_1,..., I_{C_n}(g) = i_n$ حيــث $C_1,...,C_n$ زمــر دوارة محتواة في G_1 و كل منها يحوي g .

وبفرض أن $I_{K_1}(f(g)) = j_1,...,I_{K_m}(f(g)) = j_m$ حيث $K_1,...,K_m$ زمر دوارة محتواة في G_2 وكل منها يحوي $f(g)$:

إن $m = n$ لأن: إذا كان $g \in C_t$ فإن $f(g) \in f(C_t)$ (حيث $1 \le t \le n$) ولما كان f تقابلاً فإن عدد المجموعات $C_1,...,C_n$ يساوي عدد صورها المباشرة وفق f : $f(C_1),..., f(C_n)$.

لتكن $K_t = f(C_t)$: لدينا $I_{C_t}(g) = i_t$ أي إن $c_t^{i_t} = g$ (حيث $C_t =< c_t >$) ومنه فإن: $f(g) = f(c_t^{i_t}) = (f(c_t))^{i_t} = k_t^{i_t}; K_t =< k_t >$

أي إن $I_{C_t}(g) = I_{K_t}(f(g))$.

REFERENCES

[1]Holt, D. F., Bettina Eick and Eamonn A.O'Brien. (2005). Handbook of Computational Group Theory. Chapman & Hall/CRC Press.

[2] Holt, D. F. and Sarah Rees. (1992). Testing for isomorphism between finitely presented groups. Groups, Combinatorics & Geometry Durham, 1990. London Mathematical Society Lecture Note Series 165. 459-475.

[3] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D. (1966). Combinatorial Group Theory Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. Dover Publications, INC. New York .

[4] O'Brien, E. A. (1994). Isomorphism testing for p-groups. Journal of Symbolic Computation. Volume 17, Issue 2. 133-147.

[5] Segal, Dan. (1990). Decidable properties of polycyclic groups. Proceedings of the London Mathematical Society .Volume s3-61 Issue 3. 497–528.