الزمر الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N)

خالد منذر[1] و فرحان اسماعيل[2]

تاريخ الإيداع 2013/09/01
قبل للنشر في 2013/12/03

الملّخص

قمنا في هذه الورقة البحثية بإيجاد تعريف لمفهوم الزمر الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N) وكذلك الناظمية منها، ومن ثم دراسة بعض خواصها ولاسيّما صورتها وصورتها العكسية وفق الـ (M-N) - تشاكل المعرَف في [4].

كذلك بُنيت زمرة القسمة الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N) ومن ثم أثبتنا أنَّ مجموعة هذه الزمر مع عملية التقاطع تشكل نصف زمرة .

الكلمات المفتاحية: الزمر الجزئية المشوشة، الزمر الجزئية المشوشة من النوع (M-N)، المجموعات الجزئية المشوشة الحدسية، الزمر الجزئية المشوشة الحدسية، (M-N)- تشاكل.

التصنيف الرياضياتي العالمي (MSC2010) : 20N25 - 08A72 - 22F05 - 03E72 -

---

(1) طالب ماجستير (2) أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Intuitionistic (M-N)- *Fuzzy Subgroups*

Kh. Monther[1] and F. Ismail[2]

Received 01/09/2013
Accepted 03/12/2013

ABSTRACT

In this paper the concept of Intuitionistic M-N -Fuzzy Subgroups and Intuitionistic (M-N)- Fuzzy normal Subgroups are given and its some elementary properties are discussed such its image and inverse image under (M-N)-homomorphism which is defined in [4].

After that we construct the Quotient Intuitionistic (M-N) -Fuzzy Subgroups, and we prove that the set of all Quotient Intuitionistic (M-N)- Fuzzy Subgroups forms a semigroup under the intersection.

Keywords: Fuzzy Subgroups, (M-N)-Fuzzy Subgroups, Intuitionistic Fuzzy Subsets, Intuitionistic Fuzzy Subgroups, (M-N)-Homomorphism.

Mathematical Subject Classification (MSC2010): 20N25 - 08A72 - 22F05 - 03E72

[1]MSc., Student, [2] Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.

1.المقدمة:

قدَّم العالِم Zadeh عام 1965 مفهوم المجموعات الجزئيـــة المـــشوشة (fuzzy subsets) وجاء تعميم هذا المفهوم على يد العالِم Atanassov [2] عام 1986 إذْ عرف المجموعـــة الجزئية المـــشوشة الحدســـية (intuitionistic fuzzy subset). فـــي [1] قـــام Z.Tan و J. Zhan بدراسة الزمر الجزئية المشوشة الحدسية من الـــنمط M (Intuitionistic M-Fuzzy Subgroups).

نقدم في هذه الورقة العلمية مفهوم الزمر الجزئية المشوشة الحدســـية مـــن الـــنمط (M-N) وزمرة القسمة لهذه النوع من الزمر وصورتها وفق تشاكل مـــن الـــنمط (M-N) وبعـــض خواصها.

2.تعاريف:

تعريف 1.2 [4]:

نقول عن زمرة G: إنها من النمط (M-N) ، إذا وجدت مجموعة M تؤثر في G مـــن اليسار: $M \times G \rightarrow G$

$$(m, g) \mapsto mg$$

ووجدت مجموعة N تؤثر في G من اليمين: $G \times N \rightarrow G$

$$(g, n) \mapsto gn$$

بحيث يتحقق: $(mg)n = m(gn) \quad \forall m \in M, \ n \in N, \ g \in G$

تعريف 2.2 [4] :

لتكن G_1, G_2 زمرتين من النمط (M-N) ، وليكن $f: G_1 \rightarrow G_2$ تشاكلاً زمريـــاً . نقـــــــول عـــــــن f إنـــــــه: (M-N)- تـــــــشاكل إذا تحقـــــــق:

$$f(mx) = mf(x) \ , \ f(xn) = f(x)n \ \forall m \in M, n \in N, x \in G_1$$

تعريف 3.2 [2][6]:

لتكن X مجموعة غير خالية، عندئذ تعرف المجموعة الجزئيـــة المـــشوشة الحدســـية A مـــن X بأنهـــا الثلاثيـــة $A = \{\langle x, \mu_A(x), \vartheta_A(x) \rangle \ , \forall x \in X\}$ إذْ:

$\mu_A : X \to [0,1]$ دالـــة العــضوية و$\vartheta_A : X \to [0,1]$ دالـــة اللاعـــضوية وبحيث يتحقق: $0 \le \mu_A(x) + \vartheta_A(x) \le 1$.

تعريف 4.2 [3][7][8]:

لتكن X مجموعة غير خالية، ولتكن

$A = \{\langle x, \mu_A(x), \vartheta_A(x)\rangle, \forall x \in X\}$ ، $B = \{\langle x, \mu_B(x), \vartheta_B(x)\rangle, \forall x \in X\}$

مجموعتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من X عندئذٍ تعرف العمليات الآتية:

$$\bar{A} = \{\langle x, , \vartheta_A(x), \mu_A(x)\rangle, \forall x \in X\}$$

$$A = B \quad iff \quad \forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x) \ , \ \vartheta_A(x) = \vartheta_B(x)$$

$$A \subseteq B \quad iff \quad \forall x \in X : \mu_A(x) \le \mu_B(x) \ , \ \vartheta_A(x) \ge \vartheta_B(x)$$

$$A \cup B = \{\langle x, \mathrm{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\vartheta_A(x), \vartheta_B(x))\rangle \ \forall x \in X\}$$

$$A \cap B = \{\langle x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mathrm{Max}(\vartheta_A(x), \vartheta_B(x))\rangle \ \forall x \in X\}$$

تعريف 5.2 [7]:

لتكن X, Y مجموعتين غير خاليتين،وليكن التطبيـــق $f : X \to Y$ ، ولـــتكن A, B مجموعتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من X, Y على الترتيب، عندئذٍ تعرَف صورة A وفق f بأنها المجموعة الجزئية المشوشة الحدسية $f(A)$ من Y التي تعطـــى بالـــشكل:

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), f(\vartheta_A)(y)\rangle : y \in Y\}$$

إذْ:

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} Sup_{x \in f^{-1}(y)} \ \mu_A(x) & : \quad f^{-1}(y) \ne 0 \\ 0 & : \quad otherwise \end{cases}$$

$$f(\vartheta_A)(y) = \begin{cases} inf_{\ x \in f^{-1}(y)} \ \vartheta_A(x) & : \quad f^{-1}(y) \ne 0 \\ 1 & : \quad otherwise \end{cases}$$

- إن الصورة العكسية للمجموعة B تعطى بالشكل:

$$f^{-1}(B)(x) = \left(\mu_{f^{-1}(B)}(x), \vartheta_{f^{-1}(B)}(x)\right) = \left(\mu_{(B)}(f(x)), \vartheta_{(B)}(f(x))\right)$$

تعريف 6.2 [3][5]:

لتكن G زمرة ما، ولتكن $A = \{\langle x, \mu_A(x), \vartheta_A(x)\rangle, \forall x \in G\}$ مجموعة جزئية مشوشة حدسية من G، تكون A زمرة جزئية مشوشة حدسية من G إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$
   $\vartheta_A(xy) \leq \mathrm{Max}\,\{\vartheta_A(x), \vartheta_A(y)\} \qquad \forall\, x, y \in G$
2. $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x) \qquad , \qquad \vartheta_A(x^{-1}) = \vartheta_A(x) \qquad \forall\, x \in G$

تعريف 7.2 [3][5][8]:

نقول عن الزمرة الجزئية المشوشة الحدسية A من G إنها ناظمية إذا تحقق:

$$\boldsymbol{\mu_A(xy) = \mu_A(yx)\ \ ,\ \ \vartheta_A(xy) = \vartheta_A(yx)\ \forall\, x, y\ \in G.}$$

مبرهنة 8.2 [8]:

إن تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من G هو زمرة جزئية مشوشة حدسية من G. وإن تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين ناظميتين من G هو زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من G.

مبرهنة 9.2 [7]:

ليكن $f: G_1 \to G_2$ تشاكلاً زمرياً ، ولتكن A, B زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من G_1, G_2 على الترتيب فإن $f(A)$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من G_2 و$f^{-1}(B)$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من G_1.

3 . الزمر الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N)

تعريف 1.3:

لتكن G زمرة من النمط (M-N)، ولتكن A زمرة جزئية مشوشة حدسية من G عندئذٍ نقول عن A إنها زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) من G إذا تحقق:

1. $\mu_A(mx) \geq \mu_A(x)\ ,\ \vartheta_A(mx) \leq \vartheta_A(x)$
2. $\mu_A(xn) \geq \mu_A(x)\ ,\ \vartheta_A(xn) \leq \vartheta_A(x) \qquad \forall\, n \in N, m \in M, x \in G$

مثال 2.3:

لـــــتكن الزمـــــــرة $G = U(10) = \{1,3,7,9\}$، ولـــــتكن المجموعتــــــان $M = \{1,3\}$،$N = \{9,13\}$ ولنعـــرف تـــأثير M فـــي G مـــن اليـــسار بالـــشكل $(m,g) \to (m \times g)\ \mathrm{mod}2$ وتـــأثير N فـــي G مـــن اليمـــين بالـــشكل $(g,n) \to (g \times n)\ \mathrm{mod}4$ من الواضح أن G هي زمرة مـــن الـــنمط (M-N).

سنعرَف المجموعة الجزئية المشوشة الحدسية A من G بالشكل $A: G \to [0,1]$ إذْ

$$A = \{\langle 1,0.8,0.1\rangle, \langle 3,0.6,0.2\rangle, \langle 7,0.6,0.2\rangle, \langle 9,0.5,0.3\rangle\}$$

نلاحظ أن A هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) من G.

مبرهنة 3.3:

إن تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من النمط (M-N) مـــن G هـــو زمـــرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) من G.

البرهان:

لتكن A, B زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من النمط (M-N) من G .نعلم بحسب المبرهنة [8.2] أنَّ $A \cap B$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من G

$$\forall x \in G, m \in M, n \in N:$$

$$\mu_{A\cap B}(mx) = \min(\mu_A(mx), \mu_B(mx)) \geq \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x)$$

$$\mu_{A\cap B}(xn) = \min(\mu_A(xn), \mu_B(xn)) \geq \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x)$$

$$\vartheta_{A\cap B}(mx) = \mathrm{Max}(\vartheta_A(mx), \vartheta_B(mx)) \leq \mathrm{Max}(\vartheta_A(x), \vartheta_B(x)) = \vartheta_{A\cap B}(x)$$

$$\vartheta_{A\cap B}(xn) = \mathrm{Max}(\vartheta_A(xn), \vartheta_B(xn)) \leq \mathrm{Max}(\vartheta_A(x), \vartheta_B(x)) = \vartheta_{A\cap B}(x)$$

ومن ثمَّ $A \cap B$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N).

مبرهنة 4.3:

ليكن $f: G_1 \to G_2$ هو (M-N)- تشاكل عندئذ:

- الصورة المباشرة لزمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) وفق f هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N).
- الصورة العكسية لزمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) وفق f^{-1} هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N).

البرهان:

بفرض A, B زمرتان جزئيتان مشوشتان حدسيتان من G_1, G_2 على الترتيب فإنه بحسب المبرهنة [9.2] تكون $f(A)$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من G_2 و $f^{-1}(B)$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من G_1، وسنثبت أن هذه الزمر من النمط (M-N).

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), f(\vartheta_A)(y)\rangle : y \in Y\}$$

$$\mu_{f(A)}(my) = Sup_{z\in f^{-1}(my)}\mu_A(z) \geq Sup_{mx\in f^{-1}(my)}\mu_A(mx)$$
$$= Sup_{f(mx)=(my)}\mu_A(mx) = Sup_{mf(x)=(my)}\mu_A(mx)$$
$$\geq Sup_{f(x)=(y)}\mu_A(x) = \mu_{fA}(y)$$

كذلك:

$$\mu_{fA}(yn) = Sup_{z\in f^{-1}(yn)}\mu_A(z) \geq Sup_{xn\in f^{-1}(yn)}\mu_A(xn)$$
$$= Sup_{f(xn)=(yn)}\mu_A(xn) = Sup_{f(x)n=(yn)}\mu_A(xn)$$
$$\geq Sup_{f(x)=(y)}\mu_A(x) = \mu_{fA}(y)$$

إذْ: $(x \in f^{-1}(y))$

الآن:

$$\vartheta_{fA}(my) = inf_{z\in f^{-1}(my)}\vartheta_A(z) \leq inf_{mx\in f^{-1}(my)}\vartheta_A(mx)$$
$$= inf_{f(mx)=(my)}\vartheta_A(mx) = inf_{mf(x)=(my)}\vartheta_A(mx)$$
$$\leq inf_{f(x)=(y)}\vartheta_A(x) = \vartheta_{fA}(y)$$

كذلك:

$$\vartheta_{fA}(yn) = inf_{z\in f^{-1}(yn)}\vartheta_A(z) \le inf_{xn\in f^{-1}(yn)}\vartheta_A(xn)$$
$$= inf_{f(xn)=(yn)}\vartheta_A(xn) = inf_{f(x)n=(yn)}\vartheta_A(xn)$$
$$\le inf_{f(x)=(y)}\vartheta_A(x) = \vartheta_{fA}(y)$$

إذْ: $(x \in f^{-1}(y))$

- نعلم أن الصورة العكسية للمجموعة B تعطى بالشكل:

$$f^{-1}(B)(x) = \left(\mu_{f^{-1}(B)}(x), \vartheta_{f^{-1}(B)}(x)\right) = \left(\mu_B(f(x)), \vartheta_B(f(x))\right)$$

ولنبرهن أن هذه المجموعة هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N).

في الواقع لدينا:

$$\mu_{f^{-1}(B)}(mx) = \mu_B(f(mx)) \ge \mu_B\big(f(x)\big) = \mu_{f^{-1}(B)}(x)$$
$$\mu_{f^{-1}(B)}(xn) = \mu_B(f(xn)) \ge \mu_B\big(f(x)\big) = \mu_{f^{-1}(B)}(x)$$
$$\vartheta_{f^{-1}(B)}(mx) = \vartheta_B(f(mx)) \le \vartheta_B\big(f(x)\big) = \vartheta_{f^{-1}(B)}(x)$$
$$\vartheta_{f^{-1}(B)}(xn) = \vartheta_B(f(xn)) \le \vartheta_B\big(f(x)\big) = \vartheta_{f^{-1}(B)}(x)$$

وذلك $\forall x \in G_1, m \in M, n \in N$

تعريف 5.3:

لتكن G زمرة من النمط (M-N)، نقول عن زمرة جزئية مشوشة حدسية A من النمط (M-N) من G إنها زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من النمط (M-N) من G إذا كانت A زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من G.

مبرهنة 6.3:

إن تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين ناظميتين من النمط (M-N) هو زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من النمط (M-N) .

البرهان:

من المعلوم أنَّ تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من النمط (M,N) هو زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M,N) بحسب [3.3]، وأنَّ تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين ناظميتين هو زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية بحسب [8.2] ومن ثمَّ يكون تقاطع زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين ناظميتين من النمط (M-N) هو زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من النمط (M-N) .

4. زمرالقسمة الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N)

لتكن G زمرة من النمط (M-N)، ولتكن B زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من النمط (M-N) من G. لنزود المجموعة $G/B = \{xB : x \in G\}$ بقانون التشكيل الداخلي المعرف بالشكل: $(xB) \circ (yB) = (xy)B \ \forall x, y \in G$ عندئذٍ نورد التمهيدية الآتية:

تمهيدية 1.4:

G/Bهي زمرة من النمط (M-N).

البرهان: من الواضح أنَّ G/B زمرة وسنبرهن أنَّها من النمط (M-N).

سنعرف تأثيرالمجموعة M في الزمرةG/B من اليسار: $M \times G/B \to G/B$ $(m, gB) \mapsto m(gB) = (mg)B$ وتأثير المجموعة N في الزمرة G/B من اليمين بالشكل: $G/B \times N \to G/B$

$(gB, n) \mapsto (gB)n = (gn)B$

عندها يكون:

$$\forall aB \in G/B, m \in M, n \in N:$$

$$(m(aB))n = ((ma)B)n = ((ma)n)B$$

$$= (m(an))B$$ (لأن G زمرة من النوع (M-N).)

$$= m((an)B) = m((aB)n)$$

- الآن سنعرف مجموعة جزئية مشوشة حدسية على الزمرةG/B

تعريف 2.4 :

لتكن G/B زمرة من النمط (M-N)، ولتكن A زمرة جزئية مشوشة حدسية من الـــنمط (M-N) من G. نعرف المجموعة الجزئية المشوشة الحدسية A/B من G/B بالشكل: $A/B: G/B \to [0,1]$ إذْ $A/B = (\mu_{A/B}, \vartheta_{A/B})$ وتحقق:

$$\mu_{A/B}(aB) = sup_{xB=aB}\mu_A(x)$$
$$\vartheta_{A/B}(aB) = inf_{xB=aB}\vartheta_A(x) \qquad \forall aB \in G/B$$

سنورد المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3.4:

إن A/B هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) من G/B.

البرهان:

أولاً: إن A/B هي زمرة جزئية مشوشة حدسية من G/B لأن:

$$\forall\, xB, yB \in {}^{G}/_{B} : \mu_{A/B}\big((xB)(yB)\big) = \mu_{A/B}\big((xy)B\big) = sup_{zB=xyB}\mu_A(z)$$
$$= sup_{abB=xyB}\mu_A(ab) = sup_{\substack{aB=xB\\ bB=yB}}\mu_A(ab)$$
$$\geq min\{sup_{aB=xB}\mu_A(a), sup_{bB=yB}\mu_A(b)\}$$
$$\geq min\{\mu_{A/B}(xB), \mu_{A/B}(yH)\}.$$
$$\forall\, xB, yB \in {}^{G}/_{B} : \vartheta_{A/B}\big((xB)(yB)\big) = \vartheta_{A/B}\big((xy)B\big) = inf_{zB=xyB}\vartheta_A(z)$$
$$= inf_{abB=xyB}\vartheta_A(ab) = inf_{\substack{aB=xB\\ bB=yB}}\vartheta_A(ab)$$
$$\leq Max\{inf_{aB=xB}\vartheta_A(a), inf_{bB=yB}\vartheta_A(b)\}$$
$$\leq Max\{\vartheta_{A/B}(xB), \vartheta_{A/B}(yB)\}.$$
$$\forall\, (xB)^{-1} \in {}^{G}/_{B} : \mu_{A/B}((xB)^{-1}) = \mu_{A/B}(x^{-1}B)$$
$$= sup_{a^{-1}B=x^{-1}B}\mu_A(a^{-1}) = sup_{aB=xB}\mu_A(a) = \mu_{A/B}(xB).$$
$$\forall\, (xB)^{-1} \in {}^{G}/_{B} : \vartheta_{A/B}((xB)^{-1}) = \vartheta_{A/B}(x^{-1}B)$$
$$= inf_{a^{-1}B=x^{-1}B}\vartheta_A(a^{-1}) = inf_{aB=xB}\vartheta_A(a) = \vartheta_{A/B}(xB).$$

ثانياً: إن A/B هي من النمط (M-N) لأن:

$$\forall aB \in {}^{G}/_{B}\ , m \in M, n \in N:$$

$$\mu_{A/B}(m(aB)) = \mu_{A/B}((ma)B) = sup_{mxB=maB}\,\mu_A(mx)$$
$$\geq sup_{xB=aB}\,\mu_A(x) = \mu_{A/B}(aB)$$
$$\mu_{A/B}((aB)n) = \mu_{A/B}((an)B) = sup_{xnB=anB}\,\mu_A(xn)$$
$$\geq sup_{xB=aB}\,\mu_A(x) = \mu_{A/B}(aB)$$
$$\vartheta_{A/B}(m(aB)) = \vartheta_{A/B}((ma)B) = inf_{mxB=maB}\,\vartheta_A(mx)$$
$$\leq inf_{xB=aB}\,\vartheta_A(x) = \vartheta_{A/B}(aB)$$
$$\vartheta_{A/B}((aB)n) = \vartheta_{A/B}((an)B) = inf_{xnB=anB}\,\vartheta_A(xn)$$
$$\leq inf_{xB=aB}\,\vartheta_A(x) = \vartheta_{A/B}(aB)$$

أي A/B هي زمرة مشوشة حدسية من النمط (M-N) من النمط G/B.

تعريف 4.4 :

تُدعى الزمرة A/B بزمرة القسمة الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N) .

مبرهنة 5.4 :

لتكن G زمرة من النمط (M-N)، و B زمرة جزئية مشوشة حدسية ناظمية من النمط (M-N) من G وليكن $S: G \to G/B$ تطبيقاً بحيث $S(x) = xB$ فإن S هو (M-N)- تشاكل

•زد على ذلك إذا كانت A زمرة جزئية مشوشة حدسية من النمط (M-N) من G عندئذٍ

$$S(A) = A/B$$

البرهان:

- $\forall\, x \in G\,, m \in M, n \in N:$

$$S(mx) = (mx)B = m(xB) = m\big(S(x)\big)$$
$$S(xn) = (xn)B = (xB)n = (S(x))n$$

أي إنَّ S هو (M-N)- تشاكل

● سنبرهن أن $\mu_{A/B} = \mu_{S(A)}$، $\vartheta_{A/B} = \vartheta_{S(A)}$

$$\forall y \in G/B : \mu_{S(A)}(y) = sup_{x\in S^{-1}(y)}\mu_A(x) =$$
$$= sup_{S(x)=y}\mu_A(x) = sup_{xB=y}\mu_A(x)$$

ونظراً إلى أن $y \in G/B$ فإنّه يوجد $z \in G$ بحيث $y = zB$ ومن ثمَّ

$$= sup_{xB=zB}\mu_A(x) = \mu_{A/B}(zB) = \mu_{A/B}(y)$$
$$\forall y \in G/B : \vartheta_{S(A)}(y) = inf_{x\in S^{-1}(y)}\vartheta_A(x)$$
$$= inf_{S(x)=y}\vartheta_A(x) = inf_{xB=y}\vartheta_A(x)$$

لكن $y \in G/B$ فإنّه يوجد $z \in G$ بحيث $y = zB$ ومن ثمَّ

$$= inf_{xB=zB}\vartheta_A(x) = \vartheta_{A/B}(zB) = \vartheta_{A/B}(y)$$

النتائـــــج

مبرهنة 1.5:

لتكن G/B زمرة من النمط (M-N)، ولتكن A, C زمرتين جزئيتين مشوشتين حدسيتين من النمط (M-N) من G ، عندئذ القضايا التالية صحيحة:

I. $C \subseteq A \Rightarrow C/_B \subseteq A/_B$

II. $C/_B \cap A/_B = C \cap A/_B$

البرهان: I .

$$\forall\, xB \in G/_B : \mu_{A/B}(xB) = sup_{xB=zB}\mu_A(z)$$
$$\geq sup_{xB=zB}\mu_C(z) = \mu_{C/B}(xB)$$
$$\forall\, xB \in G/_B : \vartheta_{A/B}(xB) = inf_{xB=zB}\vartheta_A(z)$$
$$\leq inf_{xB=zB}\vartheta_C(z) = \vartheta_{C/B}(xB)$$

ومنه $C/_B \subseteq A/_B$

II . $\forall\, xB \in {}^{G}/_{B} : \mu_{A\cap C/B}(xB) = sup_{xB=zB}\mu_{A\cap C}(z)$

$$= sup_{xB=zB}\{min\{\mu_A(z),\mu_C(z)\}\}$$
$$= min\{sup_{xB=zB}\mu_A(z), sup_{xB=zB}\mu_C(z)\}$$
$$= min\left\{\mu_{A/_B}(z), \mu_{C/_B}(z)\right\} = \mu_{A/_B\cap C/_B}(xB)$$

$$\forall\, xB \in {}^{G}/_{B} : \vartheta_{A\cap C/B}(xB) = inf_{z\in xH}\vartheta_{A\cap C}(z)$$

$$= inf_{xB=zB}\{Max\{\vartheta_A(z),\vartheta_C(z)\}\}$$
$$= Max\{inf_{xB=zB}\vartheta_A(z), inf_{xB=zB}\vartheta_C(z)\}$$
$$= Max\left\{\vartheta_{A/_B}(z), \vartheta_{C/_B}(z)\right\} = \vartheta_{A/_B\cap C/_B}(xB).$$

مبرهنة 2.5 :

إن مجموعة زمر القسمة الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N) مـــن G/B مـــع عملية التقاطع تشكل نصف زمرة.

البرهان:

سنرمز بـــ ρ لمجموعة زمرالقسمة الجزئية المشوشة الحدسية من النمط (M-N) مـــن ${}^{G}/_{B}$

لتكن ${}^{C}/_{B}, {}^{A}/_{B} \in \rho$ وجدنا في المبرهنة [1.5] أن ${}^{C}/_{B} \cap {}^{A}/_{B} = {}^{C\cap A}/_{B}$ ونظراً إلـــى أن $C \cap A$ زمرة جزئية مشوشة حدسية من النوع (M-N) وذلك بحسب المبرهنة [3.3] أي ${}^{C\cap A}/_{B} \in \rho$ ومن ثمَّ عملية التقاطع عملية مغلقة، وهي تجميعية لأن:

$$\forall\, {}^{E}/_{B}, {}^{A}/_{B}, {}^{C}/_{B} \in \rho:$$

$$\left({}^{E}/_{B} \cap {}^{A}/_{B}\right) \cap {}^{C}/_{B} = \left({}^{E\cap A}/_{B}\right) \cap {}^{C}/_{B} = \left({}^{(E\cap A)\cap C}/_{B}\right) =$$
$$\left({}^{E\cap(A\cap C)}/_{B}\right) = {}^{E}/_{B} \cap \left({}^{A\cap C}/_{B}\right) = {}^{E}/_{B} \cap \left({}^{A}/_{B} \cap {}^{C}/_{B}\right).$$

ومن ثمَّ $(\rho,\cap)$ نصف زمرة.

REFERENCES

[1].Zhan, J. Tan, Z. 2004. Intuitionistic *M*-Fuzzy Groups-Soochow Journal of Mathematics, V 30, pp. 85-90.

[2].Atanassov, K., 1986. *Intuitionistic fuzzy sets*-Fuzzy Sets and Systems, V. 20, PP. 87-96.

[3].Sharma, P., 2011. (α, β)-*Cut* of intuitionistic fuzzy groups - International Mathematical Forum, V.6, pp. 2605-2614.

[4].Xiong, Q., 1978. Modern algebra - science and technology publishment in shang hai.

[5].Sharma, P., 2012. On the Direct Product of Intuitionistic Fuzzy Subgroups-International Mathematical Forum, V.7, pp. 523-530.

[6].Mordeson, J. Wierman, M. Clark, T. Pham, A. Redmond, M., 2012. Linear Models in the Mathematics of Uncertainty- Springer- Verlag.

[7].Sharma, P., 2011. Homomorphism of Intuitionistic Fuzzy Groups-International Mathematical Forum, V. 6,PP. 3169 - 3178.

[8].http://www.polytech.univsavoie.fr/fileadmin/polytech_autres_sites/sites/listic/busefal/Papers/82.zip/82_07.pdf , 26-8-2013.