خواص جديدة للتماثلات الاستقرائية للزمر

عبد الواحد أبو حمدة
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق

تاريخ الإيداع 2003/03/01
قبل للنشر في 2003/07/13

الملخص

تتضمن الورقة العلمية نتائج مهمة تتكون من خواص جديدة للتماثلات الاستقرائية للزمر. وتتجلى الخواص الرئيسة الجديدة في نصوص كل من المبرهنة (6) والمبرهنة (7) والنتيجة (8) التي تم إثبات صحتها في هذا البحث، حيث تمت الإجابة عن أسئلة مفتوحة حول الجداء نصف المباشر وحول التماثل وحول مشتق الزمرة كخواص للتماثل الاستقرائي لزمرتين حيث يمكن ذكر ما يلي:

ليكن $\varphi:\Gamma(G)\rightarrow\Gamma(G')$ تماثلاً استقرائياً لزمرتين G, G'. عندئذ:

(1) إذا كانت $G=<y>\lambda B$، حيث الزمرة B كيفية وحيث الزمرة <y> منتهية ومرتبتها عدد فردي،فإن $G'=<y'>\lambda B'$.

(2) إذا كانت $G=<a>\lambda<b>$ زمرة منتهية ومرتبتها p^t ،حيث $t\geq 2$ وحيث p عدد أولي فردي، فإن $G'\cong G$ و أيضاً $\varphi(k(G))=k(G')\cong k(G)$.

هذا و تبقى المسألة مفتوحة من أجل $p=2$.

الكلمات المفتاحية: نظرية الفئات، التماثل الاستقرائي لزمرتين، الجداء نصف المباشر لزمرتين، التماثل بين زمرتين، مشتق زمرة، الزمر الدوارة، الزمرة الجزئية المميزة.

New Properties for Inductive Isomorphisms of Groups

A.Abohamdah

Department of Mathematics-Faculty of Seiences-Damascus University

Received 01/03/2003
Accepted 13/07/2003

ABSTRACT

In this paper we have proved the following new properties:
Let $\varphi:\Gamma(G)\rightarrow\Gamma(G')$ **be an inductive isomorphism of groups** G,G'. **Then:**

(1) If $G=<y>\lambda B$**,where <y> is a finite cyclic group of odd order, then** $G'=<y'>\lambda B'$.

(2) If $G=<a>\lambda<b>$ **is a finite group such that (G:1)=** p^t ، $t\geq 2$ **and** $p>2$ **is a prime number ,then** $G'\cong G$ **and also** $\varphi(k(G))=k(G')\cong k(G)$.

The problem is open for $p=2$ **.**

Key Words: Theory of categories, Inductive isomorphism of two groups, Semi-direct product of two groups, Isomorphism between two groups, Commutator subgroup of a group, Cyclic groups, characteristic subgroup.

المقدمة

يعرف الغروبوئيد (Groupoid) بأنه فئة (Category) بحيث إن جميع تشاكلاتها (Morphisms) قلوبة (Inverstible). ويعرف الغروبوئيد الاستقرائي (Inductive groupoid) بأنه غروبوئيد زود صف تشاكلاته بعلاقة ترتيب مثل $\leq$، منسجمة مع تركيب التشاكلات وفقاً لما يأتي:

إذا كانت $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ تشاكلات بحيث $\gamma \leq \delta$، $\alpha \leq \beta$، وكان المركبان $\alpha \circ \gamma$ ، $\beta \circ \delta$ معرفين، فإن $\alpha \circ \gamma \leq \beta \circ \delta$.

ويقال عن أي تماثل (Isomorphism) بين غروبوئيدين استقرائيين إنه تماثل استقرائي.

لتكن G أية زمرة.يرمز بـ $\Gamma(G)$ للغروبوئيد،الذي أشياؤه (Objects) هي جميع الزمر الجزئية في G،و الذي تشاكلاته هي جميع التماثلات الزمرية بين هذه الزمر الجزئية. ويتحول $\Gamma(G)$ بشكل منطقي إلى غروبوئيد استقرائي إذا تم تعريف علاقة ترتيب مثل $\leq$ بين تشاكلاته كما يأتي:

إذا كان $\alpha : H \to K$ و $\beta : N \to M$ فيوضع $\alpha \leq \beta$ فقط عندما تكون الزمرة الجزئية H محتواة في الزمرة الجزئية N ، ويكون α مساوياً مقصور β على H .

ويقال عن $\Gamma(G)$، حينئذ، إنّه غروبوئيد استقرائي للزمرة G. كما يقال عن أي تماثل استقرائي مثل $\varphi : \Gamma(G) \to \Gamma(G')$ إنّه تماثل استقرائي للزمرتين G, G'، الذي يكتب أحياناً بشكل مختصر على النحو: $\Gamma(G) \cong \Gamma(G')$.

يقال عن زمرة جزئية مثل H من زمرة G إنها مميزة (Characteristic subgroup) في G إذا كان $\psi(H) = H$ لأجل كل تماثل زمري مثل $\psi : G \to G$.

هذا ويستخدم الترميز الآتي:

- الرمز $G = H \times K$ يعبر عن أن الزمرة G هي جداء مباشر (Direct product) لزمرتيها الجزئيتين H, K .
- الرمز $H < G$ يعبر عن أن الزمرة H هي زمرة جزئية ناظمية (Normal) في G.

- الرمز $H \vee K$ يدل على الزمرة المولدة بـ H, K .
- الرمز $H \wedge K$ يدل على تقاطع H مع K .
- الرمز $V = H\lambda k$ يعبر عن أن الزمرة V هي جداء نصف مباشر (Semidirect product) لزمرتيها الجزئيتين H, K، حيث $H < V$.
- الرمزK(G) يدل على الزمرة الجزئية المولدة بالعناصر $[a, b]$، حيث $a, b \in G$ وحيث $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ الذي يدعى (Commutator of a and b) المبادل للعنصرين a, b.

ويقال عن K(G) إنها مشتق Gأو إنها زمرة مبادلات G(Commutator subgroup of G) .

- الرمز Z(G) يدل على مركز الزمرة G (Center of the group G).
- الرمز <y> يدل على زمرة دوارة،مولدة بالعنصر y.
- الرمز (G:1) يدل على مرتبة الزمرة G.
- الرمز B' هو صورة B وفق التماثل الاستقرائي المدروس.
- الرمز $< y' >$ هو صورة $< y >$ وفق التماثل الاستقرائي المدروس.

النتـ ـائـ ـج

لقد استنتج في [1] و [3] عدد من الخواص للتماثلات الاستقرائية للزمر. ويتضمن البحث الحالي نتائج جديدة للباحث.

تمهيدية(1): ليكن $p > 2$ أي عدد أولي. وليكن λ, y أي عددين صحيحين موجبين بحيث إن كلاً منهما يكون أولياً نسبياً مع p . وليكن $s \geq 1$ أي عدد صحيح. وليكن $t \geq 0$ أي عدد صحيح. عندئذ:

$$(1 + p^s \cdot y)^{p^t \cdot \lambda} = 1 + p^{s+t} \cdot w$$

حيث يكون w عدداً صحيحاً موجباً، وأولياً نسبياً مع p .

البرهان: يتم الإثبات بالاستقراء على $t \geq 0$ ضمن الشروط المفروضة واستخدام نشر الكرخي ـ نيوتن وذلك مهما يكن العدد λ الأولي نسبياً مع العدد p .

تمهيدية(2): ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. وليكن $m \geq 2$ عدداً صحيحاً. وليكن s أي عدد صحيح بحيث $1 \leq s \leq m$. عندئذ:

(1) أياً كان العدد الصحيح λ الأولي نسبياً مع p والمحقق للشرط $1 \leq \lambda < p^{m-s}$ فإنه يوجد عدد صحيح مثل μ بحيث يكون μ أولياً نسبياً مع p ومحققاً للشرطين:
$(1+p^s)^\mu \equiv 1+\lambda \cdot p^s (\bmod p^m)\ ;\ 1 \leq \mu < p^{m-s}$.

(2)أياً كان العدد الصحيح μ الأولي نسبياً مع p والمحقق للشرط $1 \leq \mu < p^{m-s}$ فإنه يوجد عدد صحيح مثل λ. بحيث يكون λ أولياً نسبياً مع p ومحققاً للشرطين:
$(1+p^s)^\mu \equiv 1+\lambda \cdot p^s (\bmod p^m)\ ;\ 1 \leq \lambda < p^{m-s}$.

البرهان: ضمن الفرضيات، واستناداً إلى التمهيدية (1)، يكون $(1+p^s)^{p^{m-s}} \equiv 1(\bmod\ p^m)$.

كما أن العناصر $(1+p^s),(1+p^s)^2,....,(1+p^s)^{p^{m-s}-1}$ تكون غير متطابقة مثنى بالمقاس p^m ، وكل منها لا يطابق 1 بالمقاس p^m ، وذلك بملاحظة ما يأتي:

إذا كان يوجد i,j بحيث:
$i, j \in \{1,2,...p^{m-s}-1\}, i \neq j, (1+p^s)^i \equiv (1+p^s)^j (\bmod p^m)$ ، و إذا كان i>j، مثلاً، فإن: $1 \leq i-j < p^{m-s}, (1+p^s)^{i-j} \equiv 1(\bmod p^m)$.

ومنه، بوضع $i-j = p^l \cdot \theta$، حيث $0 \leq l < m-s$ والعدد θ أولي نسبياً مع p ، واستناداً إلى التمهيدية (1)، ينتج أن: $(1+p^s)^{i-j} = (1+p^s)^{p^l \cdot \theta} = 1+p^{s+l} \cdot \beta$

حيث: β أولي نسبياً مع p ، ومن ثم يجب أن يكون $p^{s+l} \equiv 0(\bmod p^m)$ وهذا غير ممكن.

وبصورة مشابهة يتم إثبات أن $(1+p^s)^i \not\equiv 1(\bmod p^m)$.

ومن جهة أخرى، فإن العناصر $1+\lambda p^{s}$، حيث يكون λ أولياً نسبياً مع p ومحققاً للشرط $1\le\lambda<p^{m-s}$، تكون غير متطابقة مثنى بالمقاس p^{m}، لأنّه لو كان $1+\lambda p^{s}\equiv 1+\lambda' p^{s}(\operatorname{mod} p^{m})$ ، حيث $1\le\lambda\le\lambda'<p^{m-s}$ والعدد $\lambda\cdot\lambda'$ أولي نسبياً مع p ، لكان $\lambda=\lambda'$. ومنه ،بفرض أن:

$$A=\{(1+p^{s})^{i}+p^{m}\mathrm{Z}/1\le i<p^{m-s}$$ ، p أولي نسبياً مع i العدد}

$$B=\{1+\lambda p^{s}+p^{m}\mathrm{Z}/1\le\lambda<p^{m-s}$$ ، p أولي نسبياً مع λ العدد}

يمكن القول: إن $A=B$ في $\dfrac{\mathrm{Z}}{p^{m}\mathrm{Z}}$ بملاحظة ما يأتي:

إذا كان $(1+p^{s})^{i}+p^{m}\mathrm{Z}\in A$، فإن $(1+p^{s})^{i}=1+\lambda p^{s}$، حيث يكون العدد λ أولياً نسبياً مع p ، و يمكن افتراض أن $1\le\lambda<p^{m-s}$ (لأنه في الحالة المعاكسة يمكن،باستخدام خوارزمية القسمة في Z،الحصول أيضاً على المراد)، ومن ثم $(1+p^{s})^{i}+p^{m}\mathrm{Z}=1+\lambda p^{s}+p^{m}\mathrm{Z}$. ومنه $A\subseteq B$.

وباعتبار أن المجموعتين A,B منتهيتان، ولهما عدد العناصر نفسه،ينتج أن $A=B$. ومن ثم التمهيدية صحيحة.

تمهيدية(3): ليكن $p>2$ عدداً أولياً. وليكن $m\ge 2$ عدداً صحيحاً. وليكن s أي عدد صحيح بحيث إن $1\le s<m$. وليكن λ أي عدد صحيح بحيث يكون أولياً نسبياً مع p ومحققاً للشرط $1\le\lambda<p^{m-s}$.

عندئذ يوجد عدد صحيح مثل μ' أولي نسبياً مع p ومحقق للشرطين:

$$(1+\lambda p^{s})^{\mu'}\equiv 1+p^{s}(\operatorname{mod} p^{m});1\le\mu'<p^{m-s}\ .$$

البرهان: حسب التمهيدية (2) يوجد عدد صحيح مثل μ بحيث يكون: $(1+p^{s})^{\mu}\equiv 1+\lambda p^{s}(\operatorname{mod} p^{m})$ و(μ أولياً نسبياً مع p) و $(1\le\mu<p^{m-s})$.

ومنه يمكن إيجاد عددين صحيحين مثل v,w بحيث يكون: $\mu\cdot v+p^{m-s}\cdot w=1$.

وهذا يؤدي إلى أن v أولي نسبياً مع p ومن ثم $v = q \cdot p^{m-s} + \mu'$ حيث $1 \le \mu' < p^{m-s}$ و العدد μ' يكون أولياً نسبياً مع p .

كما يكون:

$$1 + p^s = (1+p^s)^{\mu \cdot v + p^{m-s} \cdot w} \equiv ((1+p^s)^v)^\mu \pmod{p^m} \equiv \left[(1+p^s)^{p^{m-s} \cdot q} \cdot (1+p^s)^{\mu'}\right]^\mu \pmod{p^m}$$

$$\equiv \left[(1+p^s)^\mu\right]^{\mu'} \pmod{p^m}$$

أي أن: $(1+\lambda p^s)^{\mu'} \equiv 1 + p^s \pmod{p^m}$.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

تمهيدية(4): ليكن $p > 2$ أي عدد أولي، ولتكن الزمرة $G = <a>_{p^m} \lambda <b>_{p^n}$ ، حيث: $n \ge 1$ ، $m \ge 2$ ، $bab^{-1} = a^\gamma$ ، $1 < \gamma < p^m$ ، والعدد γ أولي نسبياً مع العدد p ، $\gamma^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^m}$. عندئذ يوجد للزمرة الدوارة $<b>$ مولد مثل $\beta = b^l$ بحيث يكون $\beta a \beta^{-1} = a^{1+p^s}$، حيث $s \ge 1$.

البرهان: نظراً لأن G عبارة عن زمرة منتهية،مرتبتها p^{m+n}، فإن مركزها Z(G) غير تافه. وبملاحظة أن $ba^{p^{m-1}}b^{-1} = (a^{p^{m-1}})^\gamma$ ينتج أن $<a^{p^{m-1}}>_p < G$ ومن ثم، حسب [2]، $<a^{p^{m-1}}>_p \subseteq Z(G)$.

ليكن θ أصغر عدد صحيح موجب بحيث $a^{p^\theta} \in Z(G)$. عندئذ $1 \le \theta \le m-1 < m$. ولما كان $a^{p^\theta} = ba^{p^\theta}b^{-1} = a^{\gamma \cdot p^\theta}$ فإن $\gamma \equiv 1 \pmod{p^{m-\theta}}$ ، أي أن: $bab^{-1} = a^{1+\lambda p^{m-\theta}}$ حيث $1 \le \lambda < p^\theta$.

كما أن λ يكون أولياً نسبياً مع p لأنه في الحالة المعاكسة يكون:

$\lambda = p^r \cdot t$ حيث $t \ge 1$ ، $\theta > r \ge 1$ ، والعدد t أولي نسبياً مع p ، ومن ثم $1 + p^{m-\theta} \cdot \lambda = 1 + p^{m-(\theta-r)} \cdot t$ ، ثم $a^{p^{\theta-r}} \in Z(G)$ مما يناقض ما يتصف به العدد θ عند اختياره.

بفرض $m-\theta=s$ يكون:

$m>s\geq 1$، حيث: $bab^{-1}=a^{1+\lambda p^s}$، $1\leq \lambda < p^{m-s}$، والعدد λ أولي نسبياً مع العدد p.

ومنه، حسب التمهيدية (3)، يوجد عدد صحيح مثل μ' بحيث يكون العدد μ' أولياً نسبياً مع p ومحققاً للشرطين:

$1\leq \mu' < p^{m-s}$، $(1+\lambda p^s)^{\mu'}\equiv 1+p^s(\bmod p^m)$.

ومنه يوجد للزمرة $<b>$ المولد $\beta=b^{\mu'}$ بحيث يكون:

$$\beta a\beta^{-1}=a^{(1+\lambda p^s)^{\mu'}}=a^{1+p^s}.$$

تمهيدية (5): القضايا الآتية متكافئة:

(1) لتكن $G=<a>_m \lambda <b>_n$ زمرة، حيث: m , n عددان صحيحان، $n\geq 2$، $m\geq 3$ عدد فردي.

إذا كانت G' زمرة بحيث $\Gamma(G)\cong\Gamma(G')$ فإن $<a'>_m<G'$، حيث $<a'>_m$ هي صورة الزمرة الجزئية $<a>_m$ وفق هذا التماثل الاستقرائي.

(2) لتكن $K=<u>_{p^t}\lambda <v>_{p^l}$ زمرة، حيث $p>2$ عدد أولي. إذا كانت K' زمرة بحيث $\Gamma(K)\cong\Gamma(K')$ فإن $<u'>_{p^t}<K'$، حيث $<u'>_{p^t}$ هي صورة الزمرة الجزئية $<u>_{p^t}$ وفق هذا التماثل الاستقرائي.

(3) لتكن $H=<y>\lambda B$ زمرة، حيث $<y>$ زمرة دوارة منتهية كيفية مرتبتها عدد فردي وحيث B زمرة منتهية كيفية. إذا كانت H' زمرة بحيث $\Gamma(H)\cong\Gamma(H')$ فإن $<y'><H'$، $<y'>$ هي صورة $<y>$ وفق هذا التماثل الاستقرائي.

البرهان: الاقتضاء $[(1)\Leftarrow(2)]$ واضح.

$(2)\Leftarrow(1)$: ليكن $\varphi:\Gamma(G)\rightarrow\Gamma(G')$ تماثلاً استقرائياً لزمرتين G,G'، حيث G تحقق الشروط المذكورة في النص (1). وليكن $m=p_1^{t_1}\ldots.p_r^{t_r}$ حيث $p_1,\ldots\ldots,p_r$ أعداد أولية فردية مختلفة مثنى، و $t_1,\ldots\ldots,t_r$ أعداد صحيحة موجبة.

عندئذ: $< a >_m = \prod_{i=1}^{r} < a_i >_{p_i^{t_i}}$

ومنه، بالاستفادة من [1] و[4] يكون: $< a' >_m = \prod_{i=1}^{r} < a'_i >_{p_i^{t_i}}$

$< a' >_m \wedge < b' >_n = E'$ و $G' = < a' >_m \vee < b' >_n$.

ثم ،بأخذ $< a_i >_{p_i^{t_i}}$،حيث i=1,2,..,r ، فإن $< a_i >$ تكون مميزة في $< a >$. وبأخذ $H = < a_i > \vee < b >$ توجد حالتان فقط:

(أ) **العددان n و $p_i^{t_i}$ أوليان نسبياً:**عندها تكون $< a_i >$ زمرة جزئية مميزة في الزمرة $H = < a_i > \lambda < b >$. و لما كان $\Gamma(H) \cong \Gamma(H')$ فإن $< a'_i >$ تكون مميزة في H' ، ومن ثم $< a'_i >< H'$.

(ب) **القاسم المشترك الأكبر للعددين n و $p_i^{t_i}$ هو d>1:**عندها يمكن افتراض $n = p_i^s \cdot K$ ، حيث $K \geq 1$ والعددان K, p_i أوليان نسبياً، فتكون:

$$H = < a_i > \lambda < b > = < a_i > \lambda (< y >_{p_i^s} \times < z >_K) = (< a_i > \lambda < y >) \lambda < z > = L \lambda < z >$$

حيث $L = < a_i > \lambda < y >$. وبملاحظة أن L تكون مميزة في H ، فإن L' تكون مميزة في H' ، ومن ثم $L' < H'$ ، حيث $\Gamma(H) \cong \Gamma(H')$. ومنه ،بملاحظة أن $\Gamma(L) \cong \Gamma(L')$ و بالاستفادة من الفرض ومن [1]، يكون:

$$H' = L' \lambda < z' > = (< a'_i > \lambda < y' >) \lambda < z' > = < a'_i > \lambda (< y' > \times < z' >) = < a'_i > \lambda < b' >$$

و من ثم $< a'_i >< H'$.

إذن: $b' a'_i b'^{-1} \in < a'_i >$ ، حيث i=1,2,..,r.

ونظراً لأن $a' = a_1'^{\beta_1} ... a_r'^{\beta_r}$ فإن :

$$b' a' b'^{-1} = (b' a'_1 b'^{-1})^{\beta_1} .... (b' a'_r b'^{-1})^{\beta_r} = a_1'^{\gamma_1} .... a_r'^{\gamma_r} \in < a' >$$

وهذا يعني أن $< a' >< G'$.

الاقتضاء $[(3) \Leftarrow (1)]$ واضح.

$(1) \Leftarrow (3)$: ليكن $z' \in B'$، حيث B' هي صورة B وفق التماثل الاستقرائي المدروس.عندئذ يوجد $z \in B$ بحيث تكون $<z'>$ هي صورة $<z>$ وفق التماثل الاستقرائي المدروس. ومنه فالزمرة الجزئية $<y> \vee <z>$ في H لها الشكل: $<y> \vee <z> = <y> \lambda <z>$.

ولكن $\Gamma(<y> \vee <z>) \cong \Gamma(<y'> \vee <z'>)$ إذن، حسب (1)، يكون: $<y'> \vee <z'> = <y'> \lambda <z'>$، ومن ثم: $z'y'z'^{-1} \in <y'>$. ومنه، بفرض $x' = y'^{\upsilon}$ أي عنصر من $<y'>$ ، يكون:

$z'x'z'^{-1} = (z'y'z'^{-1})^{\upsilon} \in <y'>$ إذن, $<y'> \lhd H'$.

مبرهنة (6): ليكن $\varphi : \Gamma(G) \to \Gamma(G')$ تماثلاً استقرائياً زمرياً، حيث $G = <a>_{p^m} \lambda <b>_{p^n}$ و $p > 2$ عدد أولي. عندئذ: $<a'> \lhd G'$، حيث $<a'> = \varphi(<a>)$.

البرهان: إن $bab^{-1} = a^{1+p^s}$ حيث $s \geq 1$. (التمهيدية ـ 4).

فإذا كان $s \geq m$ فإن الزمرة G تكون تبديلية، ومن ثم فالزمرة G' تكون تبديلية أيضاً حسب [1]، ومن ثم $<a'> \lhd G'$. لذا يفترض، الآن، أن $m > s$ ومن ثم $m \geq 2$. إذن يوجد في $Aut(G)$ تماثل واحد على الأقل مثل $\lambda : G \to G$ بحيث يكون λ مطابقاً على $<b>$ ومحققاً للشرط $\lambda(<a>) = <a>$، أي : $\lambda(b) = b$ و $\lambda(a) = a^{\upsilon}$ حيث $1 \leq \upsilon < p^m$ و العددان υ, p أوليان نسبياً.

و بفرض أن عدد مثل هؤلاء التماثلات في $Aut(G)$ هو t فإنه يوجد في $Aut(G')$ تماثلات، عددها t، بحيث تحقق الشرطين $b' \to b'$ و $a' \to a'^{\mu}$ حيث $1 \leq \mu < p^m$ و العددان p و μ أوليان نسبياً.

ونظراً لأن:

$(G':1) = (G:1) = p^{m+n}$ حسب [3]، وأن $<a'> \wedge <b'> = E'$ فإن كل عنصر من G' يكتب بشكل وحيد على النحو $a'^{\alpha} \cdot b'^{\beta}$ حيث:

$1 \le \beta \le p^n$ و $1 \le \alpha \le p^m$. ومنه يمكن افتراض أن $b'a'b'^{-1} = a'^{\alpha} b'^{\beta}$.
ثم، باختيار التماثل $G' \to G'$ المحقق للشرطين $b' \to b'$ و $a' \to a'^2$ وتطبيقه على طرفي المساواة السابقة يكون: $b'a'^2b'^{-1} = a'^{2\alpha} b'^{\beta}$

أي: $a'^{2\alpha} b'^{\beta} = (a'^{\alpha} \cdot b'^{\beta})^2$ ومن ثم: $b'^{\beta} = e'$.

إذن: $b'a'b'^{-1} = a'^{\alpha}$. ومنه $< a' >\lhd G'$.

مبرهنة (7): ليكن $\varphi : \Gamma(G) \to \Gamma(G')$ تماثلاً استقرائياً لزمرتين G, G'. ولتكن $G =< y > \lambda B$ حيث الزمرة B كيفية، وحيث الزمرة $< y >$ منتهية، مرتبتها تساوي عدداً فردياً. عندئذ $G' =< y' > \lambda B'$.

البرهان: ليكن $b' \in B'$. عندها يوجد $b \in B$ بحيث يكون $\varphi(< b >) =< b' >$ ومنه، بأخذ $H =< y > \vee < b >$ تكون $H =< y > \lambda < b >$، ومن ثم: $\varphi(H) =< y' > \vee < b' >$. وهنا توجد حالتان:

(أ) **الزمرة** $< b' >$ **غير منتهية:** عندها تكون $< b >$ زمرة غير منتهية. فإذا كانت الزمرة $< y >$ منتهية، مرتبتها عدد فردي، فإن $< y >$ تكون مميزة في H، ومن ثم $< y' >$ تكون مميزة في $H' = \varphi(H)$، ومن ثم $< y' >\lhd H'$.

(ب) **الزمرة** $< b' >$ **منتهية:** عندها تكون $< b >$ زمرة منتهية. ومنه، حسب المبرهنة (6) والتمهيدية (5)، ينتج أن $< y' >\lhd H'$.

إذن، في الحالتين، يكون $b'y'b'^{-1} \in < y' >$، ومن ثم يكون $< y' >\lhd G'$.
ومنه، باعتبار أن $G' =< y' > \vee B'$, $< y' > \wedge B' = E'$، ينتج أن $G' =< y' > \lambda B'$.

نتيجة (8): ليكن $\varphi : \Gamma(G) \to \Gamma(G')$ تماثلاً استقرائياً زمرياً، حيث:
$G =< a >_{p^m} \lambda < b >_{p^n}$ و $p > 2$ عدد أولي. عندئذ $G \cong G'$
وأيضاً: $\varphi(K(G)) = K(G') \cong K(G)$.

البرهان: تسمح التمهيدية (4) بكتابة $bab^{-1} = a^{1+p^s}$ حيث $s \ge 1$.

فإذا كان $s \geq m$ فإن الزمرة G تكون تبديلية منتهية، ومن ثم $G \cong G'$ حسب [1].

ليكن $m > s$. عندها $< a' >< G'$ حسب المبرهنة (6)، ومن ثم يكون:

$$G' =< a' >_{p^m} \lambda < b' >_{p^n}$$

حيث $b'a'b'^{-1} = a'^{1+p^t}$ ، $t \geq 1$ ، وذلك استناداً إلى التمهيدية (4).

ومنه، بالاستفادة من [1]، يكون:

$$< a'^{p^{m-s}} >_{p^s} = \varphi(< a^{p^{m-s}} >_{p^s}) = \varphi(Z(G) \wedge < a >) = \varphi(Z(G)) \wedge \varphi(< a >) = Z(G') \wedge < a' >=$$

$$=< a'^{p^{m-t}} >_{p^t}$$

ومن ثم يكون $p^s = p^t$ أي s=t.

إذن: $G \cong G'$.

كما يكون: $K(G) =< a^{p^s} >\cong< a'^{p^s} >= K(G') = \varphi(K(G))$.

وبذلك يتم إثبات المطلوب.

المـ ـ راجـ ع REFERENCES

[1] Abohamdah A . , About inductively isomorphic groups-1973 (In Russian).
[2] Hall M., The Theory of groups –1959.
[3] Honke H., Strecker R.,On inductive isomorphisms of groups-1970 (In German).
[4] Schmidt R . , Subgroup lattices of groups-1994.