دراسة تأثير موازاة خوارزميات التفرع والحد *(Branch & Bound)* في تحسين أدائها

ميساء حمشو وشفيق عربش

فسم الإحصاء ـ كلية الاقتصاد ـ جامعة دمشق

تاريخ الإيداع 2004/09/12
قبل للنشر في 2005/08/07

الملخص

تستخدم خوارزميات التفرع والحد (Branch and Bound) التي يرمز لها بـ B&B في حل مسائل الأمثلة (الاستمثال) التوافقية التي تصنف درجة تعقيدها في الفئة NP-hard . وعلى الرغم من فعالية هذه الخوارزميات فقد بقي حجم المسائل التي تتمكن من حلها والبرهان على أمثلة الحل محدوداً بسبب محدودية قدرات الحواسيب رغم تطورها الكبير.

ومع ظهور البرمجة المتوازية والحواسيب متعددة المعالجات فكر الباحثون بالاستفادة من قدرات هذه التقانات والأجهزة في زيادة حجم المسائل المحلولة إلا أنه نجم عن الموازاة ثلاثة أنواع مختلفة من الشذوذ.

يهدف هذا البحث إلى تقديم نموذج جديد لخوارزمية التفرع والحد المتوازية يسمح بتحليل فعاليات الخوارزمية ويستند هذا النموذج إلى قواعد جديدة للاختيار بين العقد المتساوية التقويم بعد أن ثبت عجز قاعدة اختيار العقدة ذات التقويم الأفضل، كما نقوم بحساب حدود محكمة لكل قاعدة من القواعد ونبرهن على إمكانية بلوغها، كما نقدم الشروط اللازمة والكافية لظهور كل حالة من حالات الشذوذ الناجم عن موازاة الخوارزمية.

درسنا وقارنا في هذا البحث النتائج الناجمة عن تجاهل بعض الفرضيات المستخدمة في خوارزميات التفرع والحد، واقترحنا فضلاً عن ذلك استخدام النماذج غير المتزامنة للاستفادة القصوى من الإمكانيات التي تقدمها البرمجة المتوازية.

الكلمات المفتاحية: خوارزمية التفرع والحد، الأمثلة التوافقية، شذوذ التسريع، البرمجة المتوازية، استراتيجية الأفضل أولاً.

The Effects Of Parallelism Of Branch and Bound Algorithms In Improving It's Performances

Maysaa Hamcho and Chafik Arbache

Department of Statistics-Faculty of Economics-Damascus University

Received 12/09/2004
Accepted 07/08/2005

ABSTRACT

The Branch and Bound algorithms which are refereed to as B & B are commonly used to solve NP - hard combinatorial optimization problems. Although these algorithms were efficient, the size of problems which can solved and proved the optimality of solution by these algorithms was limited, because of the limitation of computers capabilities although of it's highly development. When the parallel programming 46

and Multiprocessors computers were appeared, the researcher thought to use the capabilities of these techniques and machines to increase the size of solved problems. Three main anomalies may occur when the parallelism is used.

This research aimed to design a new model of Branch and Bound algorithms in order to analyze the performance. This model based on a new rule to choose the best node among the equal evaluation node. Tight bounds of each rules were computed and proved the ability to achieve it. Sufficient and necessary condition anomalous are given regarding the predisposition for each of the three classes of behavior.

In this research, we discussed and compared the results of further relaxations on the assumptions used in branch and bound algorithms. We suggested using the asynchronous models to have the utmost benefit of the capabilities of parallel programming.

Key words: Branch and Bound, Combinatorial optimization, Speed -up anomalies, Parallel programming, A Best- First strategy .

1 ـ المقـدمـة

تستخدم خوارزميات التفـرع والحـد (Branch and Bound) والتـي يرمـز لهـا بـ (B&B) في البحث عن الحل الأمثل للمسائل التوافقية التي تعد درجة تعقيـدها مـن المرتبة NP- Hard. كما تستخدم هذه الخوارزميات في أثناء تنفيذها حاسوبياً رتـلاً مـن المسائل الناتجة عن تجزئة المسألة الأساسية الواجب حلها. ويتم وفق استراتيجية محـددة مسبقاً اختيار مسألة جزئية (عنصر من الرتل) ثم تفريعها إلا إذا تم البرهان على أنهـا لا تقود إلى حل أمثل أو أنها غير قابلة للتفريع.

يهدف تنفيذ خوارزميات B&B على حواسيب متوازية إلى تحسين فعالية البحث عـن حلول المسألة ويستدعي ذلك اعتبار أفضليات المسائل الجزئية المولدة فـي أثنـاء تنفيـذ الخوارزمية على جهاز متعدد المعالجات ذي ذاكرة مشتركة متحولاً يمكن لعدة معالجـات استخدامه في آن معاً بغية تسريع عملية سبر عناصر الرتل.

وقد برهن عدد من الباحثين [20,19,18,14, 5] أن تنفيذاً متوازياً على هـذا النحـو لا يقود ضمن شروط معينة إلى التسريع المأمول.

يسمح تحليل التسريع الناجم عن الموازاة والمحسوب على أنه نـسبة زمـن التنفيـذ التتابعي من زمن التنفيذ المتوازي بإبراز ثلاثة أنواع من الشذوذ هي:

- شذوذ التسارع: حيث يكون التسريع أكبر من عدد المعالجات.
- شذوذ التباطؤ: عندما تنحصر قيمة التسريع بين الواحد وعدد المعالجات المستخدمة.
- شذوذ سيئ أو ضار: حيث تكون قيمة التسريع أقل من الواحد.

كما يمكن أن يكون زمن تنفيذ الخوارزمية على حاسـوب متـوازٍ يحتـوي علـى n_1 معالجاً أطول من زمن تنفيذها على حاسوب متوازٍ يحتوي على n_2 معالجـاً على الـرغم من أن $n_1 > n_2$ وتدعى هذه الظاهرة بالشذوذ الضار بالتسريع أو ضرر تعديل الموارد .

وقد كان Fox (1978) أول من حدد خصائص هذه الظواهر ومميزاتها وتبعه في ذلك Burton (1983) ولكن النتائج الأساسية عن هذه الظواهر حصل عليها Lai & Sahni في عام 1983 عندما حددا شروط الشذوذ الضار للتسريع، وتـم اسـتكمال هـذه الـشروط بشروط أخرى كافية لواقعة الشذوذ من قبل Lai & Sprague في عام 1985، ثـم اهـتم Li & Wah بدراسة أسباب ظهور الشذوذ عند موازاة خوارزمية تتابعية إذ تبين لهمـا أن وجود مسائل جزئية لها الأفضلية نفسها في أثناء اختيار إحداها بغية تفريعهـا هـو أحـد الأسباب التي تؤدي إلى ظهور شذوذ سيئ. فإذا لم تتمكن استراتيجية البحث المعتمدة مـن

إجراء اختيار دقيق وحاسم بين العقد المتساوية في الأفضلية فإن ذلك يؤدي إلى سبر عقد مختلفة في كل تنفيذ وبذلك يوجه البحث توجيها سيئاً سواء كان التنفيذ تتابعياً أو متوازياً.

ونظراً للفوائد الكبيرة لظهور شذوذ التسريع في أثناء التنفيذ المتـوازي لخوارزميـات B&B فقد حظي الموضوع باهتمام الباحثين وتمكنDeo & Quinn [21] من الحـصول على راجح للتسريع الذي يمكن بلوغه بخوارزمية B&B، كمـا حـدد Li & Wah [18] شروطاً مانعة لظهور الشذوذ الضار تتجلى بإدارة ملائمـة للعقـد متـساوية الأفـضلية. وللأسف تتطلب هذه الإدارة حجماً كبيراً من الحسابات وتشغل حيزاً كبيراً في الـذاكرة، الأمر الذي يجعل تكاليفها مرتفعة لأن تكرار ظهور هذه الحالة ضعيف في أثنـاء تنفيـذ الخوارزمية باعتماد استراتيجية البحث "الأفضل أولاً". وتكمن الفائدة الأكيدة لهذه الطريقة عند استخدام استراتيجية "العمق أولاً" حيث يكون تكرار ظهور مثل هذه الحالة كبيراً.

يتبين مما سبق ضرورة إجراء مقارنة بين تكلفة ظهور الشذوذ وتكاليف منع ظهوره، وقد بدا لنا مهماً دراسة مفهوم استراتيجية البحث "الأفـضل أولاً" وتحليلهـا مـع الأخـذ بالحسبان العقد ذات الأفضلية المتساوية ومنع أية تكلفة إضافية سواء في المعالجة أو فـي الذاكرة.

يهدف هذا البحث إلى دراسة شروط ظهور الشذوذ عند استخدام استراتيجية الأفـضل أولاً وفق ثلاث قواعد تأخذ بالحسبان أن ترتيب سبر العقد ذات التقويم الأقل والمتماثـل مرتبط بترتيب وصول هذه العقد إلى الرتل، هي:

قاعدة FIFO حيث يتم سبر أقدم عقدة في الرتل.

قاعدة LIFO ويتم بموجبها سبر أحدث عقدة أدرجت في الرتل.

القاعدة التسلسلية (sequence) حيث تسبر العقدة الواقعة في أقصى يـسار التفـرع الشجري.

ثم نقوم بحساب حدود لعدد دورات التنفيذ المتوازي للخوارزمية بغية تحديـد معـايير للمقارنة مع الحدود الناتجة عن التنفيذ التتابعي لها وفق الاستراتيجية نفسها.

2 ـ خوارزمية التفرع والحد

نقدم في هذه الفقرة التعاريف والأسس النظرية لتصميم خوارزميات التفـرع والحـد (B&B) وتحليلها في أثناء التنفيذ التتابعي والمتوازي لها.

2 ـ 1 خوارزمية التفرع والحد التتابعية

تهدف خوارزمية التفرع والحد (B&B) كما أسلفنا إلى إيجاد الحل الأمثـل لإحـدى المسائل التوافقية المصنفة NP-Hard والتي تصاغ عادة على النحو الآتي:

$$\underset{x\in X}{Min}\ f(x)$$

حيث تمثل X منطقة الحلول الممكنة التي تحددها قيود المـسألة بحيـث يكـون عـدد عناصرها منتهياً لكنه غير قابل للعد، وتمثل x حلاً ممكناً إذا انتمت إلى المنطقة X أمـا $f(x)$ فهي قيمة ذلك الحل (التابع الاقتصادي).

تستند خوارزمية B&B إلى مبدأ تجزئة المسألة المعطاة إلى مسألتين أو عدة مـسائل جزئية حجمها أصغر من حجم المسألة الأساسية ثم يتم وفق اسـتراتيجية محـددة بـشكل مسبق اختيار مسألة جزئية وتفريعها إلا إذا تم البرهان على أنها لا تقود لحل أمثـل أو لا يمكن الاستمرار في تفريعها. ويتم بغية اختيار واحدة من المسائل الجزئية التي لـم يـتم فحصها بعد تحديد تقويم (حد أدنى) للحلول لكل مسألة جزئية ومن ثم يتم حذف المـسائل الجزئية التي يكون تقويمها أعلى من قيمة أفضل حل تم التوصل إليه.

كما تعتمد خوارزميات B&B فضلاً عن ذلك على ثلاثة مفاهيم أساسية هي:

التفريع: وهو مبدأ التجزئة الذي يقرن كل مسألة بمجموعة المـسائل الجزئيـة التـي نتجت عن تفريعها .

التقويم: وهو تابع يقرن كل مجموعة من الحلول بقيمة تمثل الكلفة الأصغرية لجميـع عناصرها.

استراتيجية العبور: وهي استراتيجية البحث المعتمدة لاختيار إحدى المسائل الجزئيـة التي لم تعالج بعد بغية تفريعها، وتكون عادة العقدة التي قيمة أفضليتها أقل ما يمكن.

2 ـ 2 التفرع الشجري لخوارزمية التفرع والحد

نعرض في بادئ الأمر صياغة لخوارزمية التفرع والحد باسـتخدام المفـاهيم التـي وضعها Ibaraki [13] ثم نقدم بعد ذلك مجموعة من المفاهيم التي وضعناها لصياغة هذه الخوارزميات.

2 ـ 2 ـ 1 صياغة Ibaraki

لتكن P_0 ممثلة لمسألة توافقية، يمكن عرض التفريع المطبق على P_0 على شكل تفـرع شجري يرمز له بـ $\mathcal{B}(\mathcal{P},\Sigma)$، إذ تمثل $\mathcal{P}$ مجموعة عقد التفرع لـشجري $\mathcal{B}$ للمـسائل الناتجة عن التفريع، وتمثل Σ مجموعة أقواس $\mathcal{B}$ الموافقة لعملية التفريـع، كمـا تعـد المسألة الأساسية P_0 جذر التفرع الشجري. فإذا كان لدينا المـسألتان الجزئيتـان P_i و P_j المنتميتان إلى $\mathcal{P}$ فإن القوس (P_i , P_j) ينتمي إلى Σ إذا وفقط إذا كانت P_j ناتجة عن تفريع P_i .

2 ـ 2 ـ 2 مفاهيم جديدة في صياغة التفرع الشجري

تحتوي مجموعة العقد $\mathcal{B}$ على مجموعة جزئية من العقد ندعوها العقد النهائية ونرمز لها بـ T وتمثل هذه العقد جميع المسائل الجزئية التي لا يمكـن الاسـتمرار بتفريعهـا. ونظراً لأن f يمثل تابع الهدف الواجب تصغيره فإن $f(p_i)$ تمثل قيمة حل كل مسألة مـن المسائل المنتمية إلى T; كما نعتبر أن $f(p_i) = \infty$ عندما لا يكون للمسألة حل ممكن.

يعبر طول المسار $l(p_i)$ من العقدة p_0 إلى العقدة p_i عن مستوى عمـق المـسألة P_i بالنسبة للمسألة P_0 التي يعد مستوى عمقها مساوياً الصفر، كما تعد كل عقدة في المـسار من P_0 إلى P_i سلفاً للعقدة p_i ويرمز له بـ $anc(p_i)$.

تعريف 2 ـ 1

تعرف مجموعة العقد الموافقة لحلول أمثلية والتي نرمز لها بـ O بالعلاقة الآتية :

$$O = \{p_i \in P / f(p_i) = \min\{f(p_j), p_i \in P_i, p_j \in P_j, \forall P_j \in P\}\}$$

ونظراً لأن حصر جميع الحلول الممكنة للمسألة عملية مكلفة جداً وغير قابلة للتحقيـق أحياناً فإن مبدأ خوارزمية التفرع والحد يقتضي حل المسألة P_0 من خلال دراسـة جـزء صغير من P ويتم ذلك من خلال حذف عدد من العقد على اعتبار أنهـا لا تقـود لحـل أمثل للمسألة P_0.

تعريف 2 ـ 2

يحسب لكل مسألة جزئية في لحظة إيجادها تابع قاصر g وفق العلاقة الآتية:

$$g : P \to R^+ \cup \{+\infty\}$$

ويحقق هذا التابع الشروط الآتية:

a) $g(P_i) \le f(p) \forall p \in P_i$

b) $g(P_i) = f(P_i) \forall P_i \in T$

c) $g(P_j) \ge g(P_i)$ If P_j is a son to P_i , $P_i \in P$

تعريف 2 ـ 3

إذا كانت قيمة حل مسألة جزئية ناتجة عن التفريع أقل من قيمة أفضل حل تم التوصل إليه حتى عملية التفريع التي أدت إلى حصولنا على هذا الحل، وكانت العقدة التـي تمثـل هذه المسألة تنتمي إلى مجموعة العقد النهائية، فتخصص قيمة هذا الحل للمتحول z ونعده أفضل حل تم التوصل إليه.

تعريف 2 ـ 4

نقول عن عقدة من عقد التفرع الشجري إنها عقدة مسبورة إذا تم تفريعها لعدة أخلاف (والأخلاف هي عبارة عن عقد سلفها المباشر هو العقدة المسبورة) وتم تقويم كل خلف من أخلافها.

قضية 2 ـ 1

يمكن حذف كل عقدة P_j حيث $P_j \in P$ من التفرع الشجري وعدم سـبرها لاحقـاً إذا كان:

$$g(P_j) \geq z$$

البرهان: لا يمكن استناداً إلى خصائص التابع القاصر أن نحصل من هذه المسألة على حل ذي قيمة أقل للمسألة P_0 ومن ثم نستطيع حذفها. وتطبق قاعدة الحذف هذه عند البحث عن حل وحيد للمسألة المطروحة، في حين يجب عرض العلاقة السابقة عند البحث عـن مجموعة الحلول المثلى على النحو الآتي:

$$g(P_j) > z$$

2 ـ 2 ـ 3 خصائص التفرع الشجري

تسمح المفاهيم التي تم تحديدها سابقاً وهي القيمة المثلى z^* والتابع القاصر g والتـابع الاقتصادي f بتعريف أربع مجموعات جزئية منفصلة من P هي:

أ – التفرع الشجري الحرج $C = \{ P_i / g(P_i) < z^* \}$

ب – العقد المحيرة $M = \{ P_i / g(P_i) = z^* \text{ and } P_i \text{ not terminal} \}$

ج – العقد المثلوية $O = \{ P_i / g(P_i) = z^* \text{ and } P_i \text{ terminal} \}$

د – العقد القابلة للحذف $D = \{ P_i / g(P_i) > z^* \}$

وتحقق هذه المجموعات العلاقة الآتية :

$$P = C \cup M \cup O \cup D = \phi \cap M \cap O \cap D ; C \quad (1)$$

كما نرمز بـ A لمجموعة العقد المولدة التي لم تسبر بعد، وهي عبارة عن العقد الحيـة الناتجة عن تنفيذ خوارزمية B&B.

تعريف 2 ـ 5

تختار الاستراتيجية S التي ندعوها استراتيجية الأفضل أولاً من المجموعة *A* العقـدة التي لها أصغر قيم التابع القاصر g .

وتجدر الإشارة إلى أنه لا بد في أثناء تنفيذ الخوارزمية من سبر جميع عقـد التفـرع الشجري الحرج إذا كان هدفنا هو البرهان على عدم وجود حل أفضل من الحل الذي تـم التوصل إليه، كما أننا نرى ضرورة عرض الميزة الأساسية لاسـتراتيجية الأفـضل أولاً على الاستراتيجيات الأخرى المعتمدة في سبر التفرع الشجري كاستراتيجية البحـث فـي العمق واستراتيجية البحث في العرض وذلك في الخاصة الآتية:

خاصة 2 ـ 1

يمنع سبر التفرع الشجري وفقاً لاستراتيجية الأفضل أولاً من سبر عقد المجموعة *D*.

في الواقع تحول قيمة الحد الأدنى لمسائل المجموعة*D* التي لم يتم فحصها بعد سـبر العقد التي تمثل هذه المسائل لأن قيم التابع القاصر لهذه المسائل تكون أكبر من*z وذلـك وفقا لتعريف المجموعة *D*. ومن ثم تخفض اسـتراتيجية الأفـضل أولاً بالمقارنـة مـع الاستراتيجيات الأخرى من عدد المسائل الجزئية المسبورة.

2 ـ 2 ـ 4 إدارة العقد ذات الأفضليات المتساوية

لم يتم عند وضع أسس استراتيجية الأفضل أولاً تحديد قاعـدة لاختيـار عقـدة مـن مجموعة عقد متساوية التقويم. وتنتج حالة عدم تحديد اختيار العقدة في هذه الحالة بـشكل أساسي من استخدام عمليات التنفيذ لحزمة تمثل رتل أفضليات العقد الحية، كما لا تـسمح بنية المعطيات المستخدمة بتحديد ترتيب لمعالجة المسائل الجزئية التي لها التقويم نفسه.

لذا يجب وضع استراتيجيات خاصة لإدارة العقد المتساوية الأفضلية (التقويم).

لنعتبر أن PR (*A*) وPO (*A*) وPL (*A*) عبارة عن مجموعات عقد من قائمة العقد الحية (*A*) وتدل على التوالي على أحدث العقد المولّدة وأقدم العقد المولّدة والعقد المولّـدة الواقعة إلى أقصى يسار التفرع الشجري.

نعرف الآن ثلاث قواعد لإدارة العقد متساوية التقويم :

$$\{P_i / P_i \in PR(A)\} \quad (2)\ I\ (LIFO) \quad S_l(A) = \{P_i / g(P_i) = \min g(P_j)\}$$

$$\{P_i / P_i \in PO(A)\} \quad (3)\ I\ (FIFO) \quad S_f(A) = \{P_i / g(P_i) = \min g(P_j)\}$$

$$\{P_i / P_i \in PL(A)\}\ I\ (Sequence)\ S_s(A) = \{P_i / g(P_i) = \min g(P_j)\} \quad (4)$$

3 ـ خوارزمية التفرع والحد المتوازية

نعرض نموذجاً لخوارزمية B&B متوازية يسمح بتحديد خصائصها وإبراز فعالياتها.

3 ـ 1 نموذج للخوارزمية المتوازية

تهدف موازاة الخوارزمية إلى تقديم الإمكانية لمجموعة المعالجات للقيام على التوازي باختيار العقد وسبرها.

ينجز كل معالج حلقة التفريع بالأسلوب نفسه الذي يتم فيه بالأسلوب التتابعي، أي يختار العقدة ذات التقويم الأقل ثم يسبرها ويدرج في القائمة العامة للعقد الحية كل مسألة جزئية مولّدة يمكن أن تقود لحل أفضل.

ويجب إيلاء تزامن مختلف المعالجات اهتماماً خاصاً في أثناء تعديل قيمة الحل أو تغيير رتل الأفضلية للمحافظة على بنية المعطيات المشتركة وتجنب تفككها. كما لابد من إجراء تعديل مهم على الخوارزمية التتابعية عند تحويلها لخوارزمية متوازية للتحقق من انتهائها، إذ تعد الخوارزمية المتوازية قد أنجزت مهمتها إذا كان رتل العقد فارغاً وكانت جميع المعالجات خاملة.

وقد يتبين والحالة هذه أن تنفيذ هذا النموذج المتوازي يبدو سهلاً، إلا أن الأمر ليس كذلك فيما يتعلق على الأقل بالتحليل النظري لأن هذا التحليل يستند باعتقادنا إلى أربع فرضيات إضافية هي:

الفرضيةA1 : الإسناد المباشر

يرتبط تابع التقويم ومبدأ التفريع المطبقان على المسألة الجزئيةP_i فقط بالمعلومات المتوافرة على طول المسار بين العقدة الابتدائيةP_0 والعقدة P_i .

الفرضية A2 : التزامن

يختار كل معالج من المعالجات في اللحظة نفسها عقدة مختلفة لسبرها وتدرج جميع المعالجات معاً المسائل الناتجة عن ذلك في نهاية مرحلة السبر.

الفرضية A3 : ثبات حجم العمل

يكون حجم عمل كل معالج في كل دورة من دورات الخوارزمية ثابتاً طوال التنفيذ، كما يكون مستقلاً عن قرينة المسألة (تقويم، درجة التفريع، ...) التي يقوم المعالج بحلها.

الفرضية A4: ثبات تكلفة التنفيذ

يعد زمن الولوج إلى رتل العقد الحية أو لأي مورد مشترك آخر ثابتاً أو مهملاً .

تتحقق الفرضية الأولى بشكل ضمني لأنها تنتمي لقواعد تنفيذ خوارزميات B&B، كما تتصف هذه الفرضية بخاصة أساسية إذ إنها تضمن القرينة نفسها للمسائل الجزئية مهما كانت الاستراتيجية المعتمدة.

وتترابط الفرضيات الثلاث الأخرى بقوة مع بعضها بعضاً وينتج عنها إدراج مفهـوم الدورة في تنفيذ خوارزمية B&B.

تعريف 3 ـ 1

ينجز كل معالج في أثناء دورة من دورات الخوارزمية الحلقـة التـي تتكـون مـن عمليات الاختيار والسبر والإدراج. أما إذا كان عدد العقد الحية أقل من عدد المعالجـات فإن على المعالجات غير المشغولة انتظار الدورة اللاحقة.

خاصة 3 ـ 1

تعرف الدورة وحدة زمن التنفيذ وذلك بشكل مستقل عن الجهاز الذي يتم التنفيذ عليه.

ويتم خلال دورة في النموذج التتابعي وفقاً لما تقدم سبر مسألة جزئية واحدة وتفريغها، في حين يتم في أثناء دورة في نموذج متواز يحتوي علىP معالج سبر وتفريع P مـسألة جزئية على الأكثر هي المسائل الجزئية ذات التقويمات الأقل.

وعلى الرغم من القيود القوية للفرضيات السابقة فإنه ينتج عن التنفيذ وفقاً لمـا تقـدم حالة من عدم التحديد لأنه لا يمكن تحديد المعالجات التي ستختار العقد مـن جهـة، ولا كيفية ترتيب إدراج العقد المولدة في نهاية الدورة من جهة أخرى.

3 ـ 2 الخصائص التمييزية

نعرض أولاً الخصائص التقليدية للنموذج ثم نعمل علـى إدراج خـصائص أخـرى ضرورية لتحديد حدود لعدد الدورات.

3 ـ 2 ـ 1 خوارزمية التفرع والحد التتابعية الأمثلية

ترتبط درجة تعقيد خوارزميات B&B ارتباطاً وثيقاً بالمسألة التوافقية المحلولة. وقد تم إدراج معايير عدة وأدوات تسمح بمقارنة مختلف الاستراتيجيات المعتمدة. ومن البديهي أن يعد عدد المسائل الجزئية المسبورة إحدى طرائق تقدير جودة الاستراتيجية.

علاوة على ذلك فقد بين بعض الباحثين مثل Ibaraki الفائدة مـن أخـذ عـدد العقـد المسبورة في أثناء التنفيذ بالحسبان خصوصاً إذا تم التغاضي عن بعض الفرضيات السابقة مثل فرضية ثبات تكلفة التنفيذ.

نقدم الآن مجموعة من التعاريف اللازمة في المراحل اللاحقة من هذا العمل:

تعريف 3 –2

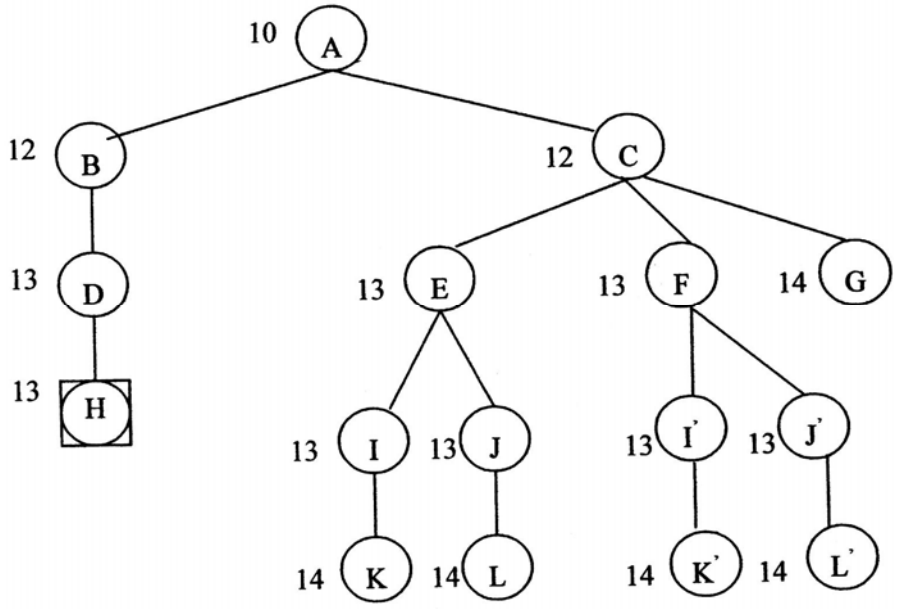
تعد خوارزمية B&B التتابعية التي تصغر في أثناء تنفيذها عـدد المـسائل الجزئيـة المسبورة أي عدد الدورات خوارزمية أمثلية.

تتصف الخوارزميات التتابعية بالتطابق بين عدد دوراتها وعـدد المـسائل الجزئيـة المسبورة، ولا تتحقق هذه الخاصة فـي الخوارزميـات المتوازيـة رغـم الفرضـيات السابقة إذ يمكن أن يكون عدد الدورات المنجزة في التنفيذ المتوازي مختلفـاً عـن عـدد الدورات اللازمة في التنفيذ التتابعي مقسوماً على عدد المعالجات.

ويعود السبب الأول لهذا الاختلاف إلى أنه من الممكن أن يكون عدد العقد الحية فـي كل دورة من دورات التنفيذ المتوازي للخوارزمية أقل من عدد المعالجات، ومـن ثـم لا نضمن أن يكون عدد العقد التي يتم سبرها في كل دورة مساوياً لعدد المعالجات، ويعـود السبب الثاني كما بينا سابقاً إلى وجود قيم متساوية لتابع التقويمg مما يؤدي إلى عمليـات سبر مختلفة للتفرع الشجري. كما يمكن أن يؤدي إلى صراع في اختيار العقـد مـرتبط بقواعد استراتيجية الأفضل أولاً المستخدمة. ونعتقد أن السبب الرئيس لحالة عدم التحديـد هذه ناجم عن عدم تضمين استراتيجية الاختيار المعتمدة قواعد دقيقة لاختيـار المـسائل الجزئية الحية.

ليكن لدينا كمثال على ذلك التفرع الشجري المعروض في الشكل (1) إذ يرمز المربع في هذا الشكل للعقدة الممثلة للحل الأمثل، كما نعـرض فـي الـشكل (2) نتـائج تنفيـذ خوارزمية B&B بالأسلوبين التتابعي والمتوازي على هذا التفرع الشجري للبحـث عـن الأفضل أولاً وفق مختلف القواعد، كما نبين في حالة التنفيذ المتوازي الحالات المختلفـة لرتل العقد الحية.

يمثل كل سطر من الشكل (2) نتائج كل دورة من دورات التنفيـذ التتـابعي أولاً ثـم التنفيذ المتوازي مبينين فيه العقدة (العقد) المسبورة وحالة قائمة العقد الحية وفقاً لترتيـب الاختيار وقيمة أفضل حل z. ويتبين لنا من ذلك أنه قد ينتج عن القاعدة التسلـسلية تنفيـذاً محدداً بدقة، في حين يؤدي تطبيق القواعد الأخرى إلى اختلاف في عدد الـدورات مـن تنفيذ إلى آخر على الرغم من اعتماد استراتيجية البحث نفسها , كما نتج عن اعتماد قاعدة LIFO شذوذاً ضاراً لأن التنفيذ المتوازي احتاج لست دورات والتنفيـذ التتـابعي لأربـع دورات أي كان زمن التنفيذ التتابعي أقل من زمن التنفيذ المتـوازي علـى الـرغم مـن مضاعفة عدد المعالجات في حالة التنفيذ المتوازي، واحتاج التنفيذ المتوازي وفق قاعـدة FIFO لعدد دورات التنفيذ التتابعي نفسه الأمر الذي يعد مخيباً.



الشكل (1) التفرع الشجري للبحث بخوارزمية B&B

قاعدة السبر	عدد المعالجات	الذروة المسبورة	قائمة الذرى الحية	قيمة الحل
FIFO	1	A	B,C	∞
		B	C,D	
		C	D,E,F,G	
		D	Ø	z* =13
LIFO	1	A	C,B	∞
		C	B,F,E,G	
		B	D,F,E,G	
		D	Ø	z*=13
Sequence	1	A	B,C	∞
		C	D,E,F,G	
		D	Ø	z*=13
FIFO	2	A,Ø	B,C	∞
		B,C	permut (D,E,F),G	
		E,F	D,permut (I,I`,J,J`),G or D,E	Ø
		D,Ior I`orJ or J`	Ø	z*=13
LIFO	2	A,Ø	C,B	∞
		C,B	permut (D,F ,E),G	
		F,E	permut (I,I`,J, J`),D,G or D,F	Ø
		(I,I`,J, J)	D,permut (K,K`,L,L`),G / * in two iteration * /	
		D,KorK` or LorL`	Ø	z*=13
Sequence	2	A,Ø	B,C	∞
		B,C	D,E,F,G	
		D,E	Ø	z*=13

الشكل (2) أمثلة عن التنفيذ التتابعي ولمتوازي

3 ـ 2 ـ 2 التماسك

نستعرض الآن بعض المفاهيم التي تسمح بتحديد مدلول التماسك وتحليل الشذوذ.

تعريف 3 ـ 3

مع مراعاة الفرضيات A1 إلى A4 نقول عن خوارزمية B&B: إنهـا متماسـكة إذا وفقط إذا وجدت عقدة على الأقل مسبورة في أثناء التنفيذ التتابعي للخوارزمية تم سـبرها في دورة من دورات التنفيذ المتوازي لها.

خاصة 3 ـ 2

تتصف القاعدة التسلسلية استناداً لما تقدم بأنها متماسكة في استراتيجية الأفضل أولاً .

قضية 3 ـ 1

ليكن P_{s1} التفرع الشجري الذي تسبره خوارزميـة B&B باعتمـاد الاسـتراتيجية s_1 ومراعاة الفرضيةA1 بغية إيجاد الحل الأمثل لمسألة ما، إذا توصلت خوارزميـة B&B ذات الاستراتيجية s_2 التي تسبر التفرع الشجري P_{s2} إلى حل المسألة وبرهنـت علـى أن الحل أمثلي فإن P_{s1} هو تفرع شجري جزئي من P_{s2}.

البرهان:

لتكن P_i العقدة المسبورة المولدة للعقدة الموافقة لأفضل حل معروف وقيمتـه z^* فـي التفرع الشجري P_{s1} المسبور وفق الاستراتيجية s_1 . يضمن سبر كامل التفرع الشجري P_{s1} وفق الإستراتيجية s_2 أن تكون العقدة p_i قد تم سبرها وأن لا تتعدى قيمة الحل النـاتج عن تنفيذ الاستراتيجية s_2 القيمة*z. ونظراً لأن التنفيذ وفق s_1 قد بين أنه لا يوجـد حـل تكون معه قيمة التابع الاقتصادي أصغر من*z، نستنتج أن أحسن حل ناتج بالتنفيذ وفـق الاستراتيجية s_2 مساوٍ لـ z^* .

لنتفحص مجموعة العقد المحتواة في قائمة العقد الحية في أثناء التنفيذ وفق استراتيجية s_2 والتي يرمز لها بـ A_{s2}، حين تم سبر آخر عقدة من عقد P_{s1} فلا يكون لأي من هذه العقد تقويماً أكبر من z^* . لنفترض أن A_{s2} تحتوي على عقـدة p_j حيـث قيمـة $g(p_j)$ أصغر من z^* . يوجد سلف قريب لـ p_j هو p_k حيث $p_k \in P_{s1}$ و$p_k \in P_{s2}$ (يكون هـذا السلف في أسوأ الحالات أصل التفرع الشجريP_0). ليكن $p_{k'}$ خلفاً لـp_k حيث $p_{k'} \notin P_{s1}$ و$p_{k'} \in P_{s2}$، واستناداً إلى شروط خوارزمية B&B فإن:

$$g(p_k) \le g(p_{k'}) \le g(p_j) < z^*$$

ويتعارض هذا القول بأن $p_{k'}$ لم يكن مدرجاً في A_{s1} أو تم حذفه من A_{s1} . وبالأسلوب نفسه نبرهن أنه لم نتمكن من سبر p_j ضمن P_{s1} ومن ثم كانت A_{s2} فارغة عندما تم سبر P_{s1} بالكامل وخوارزمية B&B مع الاستراتيجية s_2 برهنت على أمثلية الحـل المبحـوث عنه.

3 ـ 3 فعاليات خوارزمية التفرع والحد المتوازية

برهن Li & Wah [19] صحة النظرية الآتية «يعد التماسك شرطاً كافياً لمنع ظهـور الشذوذ الضار في استراتيجية الأفضل أولاً». واقترحا وفقاً لذلك إضافة رقم المسار كدليل ثانٍ لأفضلية كل عقدة لجعل استراتيجية الأفضل أولاً متماسكة. تحقق القاعـدة التسلـسلية هذا التعديل لأن العقدة المختارة هي العقدة ذات التقويم الأقل وتنتمي للمسار الواقـع فـي أقصى اليسار، ويمكن بلوغ التماسك في كل قاعدة تحذف إمكانية وجود عقـد متـساوية التقويم ومن ثم لا يمكن وفق القاعدة السابقة لعقدتين لهما التقويم نفسه ورقم المسار نفـسه أن تتوضعا في اللحظة نفسها في رتل العقد الحية لأن ترتيب اختيارهمـا متناسـب مـع ترتيب ظهورهما على طول المسار. يقترن التماسك وفقاً لتعريفـه باسـتراتيجية البحـث التتابعي وتكمن فائدته الأساسية في محاولته سبر التفرع الشجري للبحث التتـابعي علـى الأفضل. وتحاول الاستراتيجية التسلسلية سبر أقل عدد ممكن من عقد التفـرع الـشجري للبحث التتابعي لتجعل ظهور شذوذ التسريع ممكناً.

واستناداً إلى ذلك يمكن تقديم تعريف للتماسك أكثر قوة من السابق.

تعريف 3 ـ 4

ضمن الفرضيات A1 حتى A4 نقول: إن اسـتراتيجية خوارزميـة B&B متماسـكة بالكامل إذا وفقط إذا تم اختيار العقدة p_i قبل العقدة p_j إذا كان :

$$g(p_i) \le g(p_j)$$

خاصة 3 ـ 3

إن الشرط اللازم لظهور شذوذ التسريع هو ألا تكون اسـتراتيجية البحـث متماسـكة بالكامل [19].

يكون التفرع الشجري المطور تتابعياً في هذه الحالة شديد الاخـتلاف عـن التفـرع الشجري الأصغري الواجب سبره ويصبح سبر عقد معينة غير ضروري.

لهذا السبب يجب إدراج مفهوم العدد الأصغري من عقد التفـرع الـشجري الواجـب سبرها وسندرس ذلك العدد متفحصين التفرعات الشجرية الجزئية الأربعة المعرفـة فـي العلاقة (1).

يتم حذف مجموعة عقد D التي لا تسبرها أبـداً خوارزميـةB&B التتابعيـة وفـق استراتيجية الأفضل أولاً. وبشكل بدهي يجب توليد عقدة نهائية p^*_j من O لها أفضل قيمة لتابع الهدف z^* . فضلاً عن ذلك يجب سبر التفرع الشجري C بالكامل وذلـك للبرهـان على عدم وجود حل قيمته أفضل من قيمة الحل*z. ولكن قد يكون سبر عدد مـن عقـد المجموعة M ضرورياً لبلوغ p^*_j أي لتوليدها كما يجب أن يكون عدد هذه العقد أصغرياً. ونحصل على هذا العدد الأصغري إذا تم فقط سبر العقد الواقعة على أقصر مـسار بـين عقدتين إحداها في C والأخرى في O .

تعريف 3 ـ 5

إن بعد عقدة p_j من عقد تفرع شجري عن مجموعـة العقـد K والـذي نرمـز لـه بـ $d(p_j, K)$ عبارة عن العدد الأصغري من عقد المسار بين p_j وعقدة من عقد K .

مقترح 3 ـ 1

إن العدد الأصغري $\Phi^*(1)$ من الدورات اللازمة لحل مسألة بواسـطة خوارزميـة B&B على جهاز بمعالج واحد مساوٍ لـ:

$$\Phi^*(1) = |C| + \min_{P_j \in O} d(P_j, C)$$

وبشكل مماثل فإن من الضروري أن نحدد عدد العقد التي تسبرها في أسوأ الحـالات خوارزمية B&B باستراتيجية الأفضل أولاً، ويتطابق هذا مع اسـتخدام اسـتراتيجية مـا تكتشف أفضل حل في وقت متأخر بحيث يكون عدد الدورات اللازم للوصول إلى الحـل أعظمياً. فضلاً عن ذلك يجب أن تكون العقدة p_j التي تولد العقدة p^*_j التي تحمل أفضل قيم z^* آخر عقدة من M تم اختيارها من قائمة العقد الحيةA. وتفتـرض فرضـيات B&B أن يكون تقويم جميع المسائل الجزئية المسبورة سابقاً أقل أو يساوي إلى $g(p^*_j)$. نستنتج من ذلك أن أسوأ الحالات توافق سبر جميع عقد C و M وأنه لا يوجـد إلا حـل وحيـد p^*_j ناتج عن آخر عقدة تم سبرها .

استناداً إلى ما تقدم نعرض المقترح الآتي:

مقترح 3 ـ 2

يتحدد عدد الدورات اللازم لخوارزمية B&B التتابعية التـي تـستخدم اسـتراتيجية الأفضل أولاً للوصول إلى الحل الأمثل وفق العلاقة الآتية :

$$\Phi^*(1) \leq \Phi(1) \leq |C \cup M|$$

حيث $\Phi^*(1)$ هو العدد الأصغري من الدورات المعرف بالمقترح (3-1).

خاصة 3 ـ 4

إذا كانت جميع تقويمات المسائل الجزئية مختلفة فإن استراتيجية الأفضل أولاً أمثلية بعدد الدورات. كما تكون المجموعة الجزئيةM فارغة، ويكون عدد الدورات $\Phi(1)$ مساوياً لـ $\Phi^*(1)$ الذي يوافق عدد المسائل الجزئية في C .

ويجب في هذه الحالة التعامل مع المجموعة M في المقترح (3-2) بحذر شديد. لأنه من الممكن أن توجد عقد غير نهائية تقويمها مساوٍ للقيمة الأمثلية ولا يقود ذلك بالضرورة لخيارات غير محددة. وفي الواقع يمكن ألا يتم سبر المجموعةM إذا كانت عقدة أمثلية خلفاً مباشراً لعقدة من عقد التفرع الشجري الحرج.

مقترح 3 ـ 3

الشرط الكافي لتكون استراتيجية الأفضل أولاً متماسكة هو أن تكون عقدة أمثلية خلفاً مباشراً نتج عن سبر عقدة حرجة .

البرهان:

لتكن p_{j*} إحدى عقد C التي تولد عقدة p_* تنتمي لـ O. يكون التنفيذ التتابعي على هذا النحو أمثلياً لأن توليد p_* لا يحتاج إلا لسبر C. ووفقاً لذلك يتم لاحقاً حذف كل عقدة غير حرجة مدرجة في قائمة العقد الحية. ووفقاً لاستراتيجية الأفضل أولاً تنتمي كل عقدة سبرت قبل p_{j*} إلى C. ليكن في هذه الحالة P_s التفرع الشجري المسبور في التنفيذ التتابعي وفق استراتيجية الأفضل أولاً، نرى بسهولة أن P_s مطابق لـ C. لنفترض أنه في أثناء التنفيذ المتوازي لم يتم في الدورة E_i سبر عقدة من P_s، ومن ثم فإن جميع العقد التي سبرت في هذه الدورة تنتمي جميعها إلى M. وبالتالي ووفقاً لاستراتيجية الأفضل أولاً فقد تم سبر جميع عقد C، كما أنه وفقاً للقضية (3-1) يكون التنفيذ منتهياً ويتعارض هذا مع وجود الدورة E_i. نستنتج من ذلك أن هناك عقدة على الأقل قد تم سبرها في كل دورة من دورات التنفيذ المتوازي للخوارزمية.

قضية 3 ـ 2

لا يمكن أن يقع شذوذ التسريع مع استراتيجية الأفضل أولاً إذا كانت عقدة أمثلية خلفاً مباشراً لعقدة حرجة.

البرهان:

لا يمكن اعتماداً على المقترح (3-3) أن يقع الشذوذ السيئ، لأنـه إذا كـان P_s هـو التفرع الشجري المسبور في أثناء التنفيذ التتابعي وفق استراتيجية الأفضل أولاً فإن هـذا التفرع الشجري مساوٍ لـ C. نستنتج من ذلك أن التفرع الشجري المسبور هـو التفـرع الشجري الأمثل كما يكون عدد دورات التنفيذ التتابعي $\Phi(1)$ أمثلياً، ومن ثم لا يمكـن أن تكون قيمة $\underline{\Phi}(p)$ التي تمثل العدد الأصغري من دورات التنفيذ المتـوازي أقـل مـن حاصل قسمة عدد عقد المجموعة C على عدد المعالجات P، ويمنع هذا ظهـور شـذوذ التسريع.

تعريف 3 ـ 6

يكون التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B أمثلياً إذا وفقط إذا صغر هذا التنفيـذ العـدد الأعظمي للدورات التي ينفذها معالج واحد وبمعنى آخر إذا تم تـصغير زمـن الحـساب اللازم لآخر معالج نشط. يمكننا القول وفقاً لذلك إنه مهمـا كانـت اسـتراتيجية البحـث المستخدمة فإنه لابد من وضع حدود لعدد دورات التنفيذ المتوازي الذي تحتاجه خوارزمية B&B لسبر التفرع الشجري، لذلك نحسب الآن عدد الدورات هذا في أحـسن الحـالات وأسوأها.

مقترح 3 ـ 4

إن عدد الدورات $\Phi(P)$ الـلازم للتنفيـذ المتـوازي لخوارزميـة B&B باعتمـاد استراتيجية الأفضل أولاً وباستخدام P معالجاً محدود بالعلاقة الآتية:

$$\max\left(\frac{\Phi^*(1)}{p}, h_C, \min_{p_k \in O} l(p_k)\right) \le \Phi(p) \le \frac{\Phi^{worst}(1) - h_{CYM}}{P} + h_{CYM}$$

حيث:

$h_C = \max_{p_I \in C} l(p_i)$ C هو ارتفاع التفرع الشجري الحرج h_c

$h_{CYM} = \max(h_C, h_M)$ CYM هو ارتفاع التفرع الشجري h_{CYM}

$\Phi^*(1)$ هو عدد الدورات الأصغري في التنفيذ التتابعي .

$\Phi^{worst}(1)$ هو العدد الأعظمي للدورات في التنفيذ التتابعي ويساوي $|CYM|$.

البرهان:

إن قيمة قاصر عدد الدورات اللازم مساوٍ للعدد الأصغري للعقد الموافق لـ $\Phi^*(1)$ مقسوماً على عدد المعالجات، إلا أن هناك بعض التحديدات المفيدة لتنقية هـذا القاصـر. نظراً لأنه من غير الممكن في بادئ الأمر (بعد عدد قليل من الـدورات) توليـد العقـدة الأمثلية في التفرع الشجري حتى إذا كان عدد المعالجات غير منتـه. لـذا يجـب تنفيـذ عمليات التفريع بالكامل بين الأصل والعقدة الأمثلية مستوى – مستوى، ويـتم البرهـان على أمثلية الحل بعد أن تسبر جميع عقد المجموعةC. كما يتم بالأسلوب نفسه حساب قيمة راجح عدد الدورات. يمثل سبر جميع عقد المجموعتينCو M كما أشـرنا سـابقاً أسـوأ الحالات الممكنة للسبر، كما أن ارتفاع التفرع الشجري في هذه الحالة هو h_{CYM} ، ومن ثم تعطى قيمة راجح عدد الدورات اللازم لسبر مجموعات العقد هذه مساوية لـ:

$$(|C \cup M| - h_{CYM}) / P + h_{CYM}$$

يمكن تجزئة هذا الراجح إلى قسمين، يمثل القسم الأول العدد الأعظمي للدورات التـي يقوم خلالها كل معالج بالاحتفاظ بعقدة لسبرها، ويمثل الثاني العدد الأعظمـي للـدورات اللازمة لبلوغ العقدة الأكثر عمقاً عندما لا يبقى عمل لجميع المعالجات.

وتجدر الإشارة إلى أنه قد يكون من المتعذر بلوغ هذه الحدود لذلك نرمز لاحقاً لقاصر $\Phi(p)$ بـ $\underline{\Phi}(p)$ ولراجحه بـ $\overline{\Phi}(p)$.

تعريف 3 ـ 7

إن التفرع الشجري الأمثل باستخدام P معالجاً هو التفرع الشجري الناتج عن التنفيـذ الأمثل لخوارزمية B&B باستخدام P معالجاً.

تجدر الإشارة هنا إلى أنه بالنظر لإمكانية عدم إشغال جميع المعالجات في أثناء التنفيذ المتوازي للخوارزمية فإنه من الممكن ألا يقود سبر التفرع الشجري الأمثل فـي التنفيـذ التتابعي للخوارزمية إلى السبر الأمثل في التنفيذ المتوازي باستخدامP معالجاً، ومـن ثـم يمكن ألا يكون التفرع الشجري الأمثل $P^*(p)$ محتوى في التفرع الشجري النـاتج عـن التنفيذ التتابعي الأمثل $P^*(1)$.

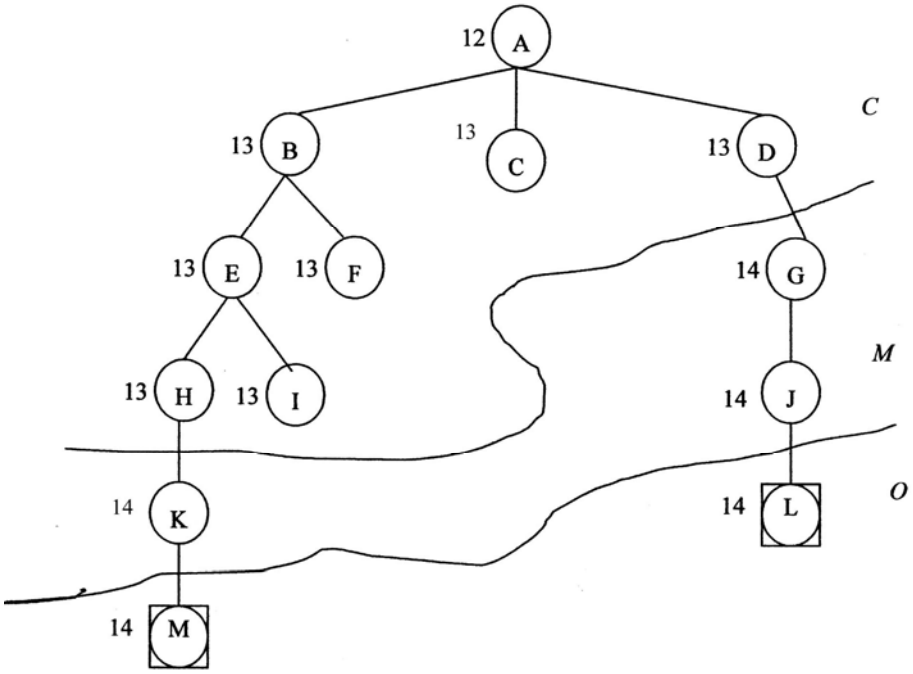
ويبين المثال المعروض على الشكل رقم (3) هذه الحالة إذ نجد أن:

$P^*(3) = \{ A,B,C,D,E,F,G,H,I,J \}$

$P^*(1) = \{ A,B,C,D,E,F,H, \}$

نلاحظ أن العدد الأمثل لدورات التنفيذ التتابعي $\Phi^*(1)$ هـو تـسع دورات والعـدد الأمثل لدورات التنفيذ المتوازي باستخدام ثلاثة معالجـات $\Phi^*(3)$ هـو أربـع دورات.

كما نلاحظ اختلاف التفرع الشجري الأمثل المسبور تتابعياً عن التفرع الشجري الأمثـل المسبور على التوازي.



الشكل (3) مثلوية التفرع الشجري للبحث بخوارزمية B&B المتوازية

4 ـ مقارنة بين مختلف استراتيجيات إدارة العقد متساوية الأفضلية

نحاول الآن دراسة مختلف قواعد إدارة العقد متساوية التقويم ثم نقارن بـين فعاليتهـا وسلوكياتها المختلفة بالنسبة لظهور حالات الشذوذ.

4 ـ 1 قاعدة FIFO

تقدم قاعدة FIFO في حالة التنفيذ التتابعي علاقة رتبية لاختيار العقد من قائمة العقـد الحية، كما تسمح بتقييم عدد الدورات بشكل دقيق جداً.

مفاهيم

نرمز بـ M_k لمجموعة جزئية من العقد p_I المنتمية إلى M بحيث يكون لـ ـ p_i k سلف في M. كما تحدد قيمة الدليل k رتبة كل عقدة من عقد المجموعة M.

قضية 4 ـ 1

يجب أن يتم في أثناء التنفيذ التتابعي وفق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO سبر جميع عقد المجموعة M_{i-1} قبل أن نبدأ بسبر عقد المجموعة M_i حيث i موجبة حتماً.

البرهان:

باعتماد أسلوب الاستدلال نجد أنه في أثناء التنفيذ التتابعي يكون سبر عقدة من M_0 ممكناً إذا وفقط إذا تم سبر جميع عقد المجموعة C، فضلاً عن ذلك في نهاية سبر آخر عقدة من C تكون جميع عقد M_0 في رتل العقد الحية A، ولم يتم سبر أي منها بعد ولا يمكن إدراج أي منها لاحقاً. يتم إدراج عقدة p_1 من M_1 في القائمة A لأن سلفها المباشر ينتمي إلى M_0 بأفضلية أصغر من أفضليات جميع العقد p_0 من M_0 (لأن p_0 أقدم من p_1) ونستطيع بإعادة تطبيق البرهان السابق أن نبرهن صحة القضية.

تقود القضية (4-1) للنظرية الآتية:

نظرية 4 ـ 1

ضمن فرضية أن عقدة أمثلية لا تكون خلفاً لعقدة حرجة، فإن العقدة p^* ذات القيمة الأمثلية الناتجة في أثناء التنفيذ التتابعي وفق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO تنتمي إلى مجموعة العقد الأمثلية و يكون بعدها عن مجموعة العقد الحرجة أصغرياً، أي:

$$P^* \in \{p_i \in O / d(p_i, c) = \min_{P_j \in O} d(p_j, c)\}$$

البرهان:

نعتمد أسلوب نقض الفرض. لتكن p_1 عقدة منتمية لـ O ولنفترض أن بعدها عن C ليس أصغرياً وأنه قد تم توليدها قبل عقدة أمثلية P^*. وشريطة أنه لا يوجد حل أمثل ناتج عن سبر عقدة حرجة فإن p_m سلف p_1 و p_0 سلف p^* تنتميان كلتيهما إلى M. لتكن M_{km} وM_{k0} المجموعات التي تنتمي إليها على التوالي P_m, P_0 مع $k_m > k_0$. وفق القضية (4-1) فإنه قد وجب سبر P_0 قبل P_m وهذا يتناقض مع الفرضية ويبرهن النظرية.

مقترح (4 ـ 1)

لتكن M_k^* المجموعة التي ينتمي إليها سلف عقدة الحل الأمثل , حينئـذ يكـون عـدد دورات التنفيذ التتابعي لخوارزمية B&B والذي نرمز له $\Phi_f(1)$ محصوراً بين :

$$|C| + \sum_{i=0}^{K^*-1} |M_i| \le \Phi_f(1) \le |C| + \sum_{i=0}^{k^*} |M_i|$$

ويسمح لنا ذلك بالحصول على حدود أقل اتساعاً حين نقـارن عـدد دورات التنفيـذ المتوازي لخوارزمية B&B مع عدد دورات التنفيذ التتابعي لها.

مقترح (4 ـ 2)

إن عدد دورات التنفيذ المتوازي $\Phi_f(p)$ لخوارزمية B&B باستراتيجية الأفـضل أولاً ووفق قاعدة FIFO محدود من الأدنى بالعلاقة الآتية:

$$\max\left(\frac{\Phi_f(1) - (m-1)(h_C - \min_{p_i \in M} l(p_i))}{p}, \underline{\Phi}(p) \right) \le \Phi_f(p)$$

إذ تمثل m عدد المسارات الموجود في M .

البرهان:

يمكن نظرياً تشبيه سبر عقد D في أثناء التنفيذ المتوازي مهما تكن القاعدة المعتمـدة مع استراتيجية الأفضل أولاً بدورة خاملة نتجت عن نقص في العمل. يمكن في هذه الحالة ألا يكون التنفيذ المتوازي لخوارزميةB&B على التفرع الشجري للبحث التتابعيP_s أفضل سبر ممكن للتفرع الشجري للبحث المتوازي P_p.

لتكن الحالة المعطاة بالشكل (4-a) حيث نتج شـذوذ فـي أثنـاء التنفيـذ المتـوازي لخوارزمية B&B لأننا وصلنا إلى عقدة p_{p^*} ذات قيمة أمثلية بشكل أبكر مـن وصـولنا للعقدة p_{s^*} ذات القيمة الأمثلية المولدة في أثناء التنفيذ التتابعي. (تعني أبكر أننـا حـصلنا على p_{p^*} قبل p_{s^*} في التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B).

يجب أن ينتمي p_s و p_p سلفي العقدتين p_{s^*}, p_{p^*} على التوالي إلى M وإلا فإن التنفيـذ التتابعي أمثلياً بمقتضى القضية (3-2). كما ينتمي $p_{s`}$ سلف $p_s$ الذي تم سبره قبل العقـدة $p_p$، إلى $M_{ks`}$ وقد تم سبره بعد $p_{p`}$ سلف p_p الذي ينتمي إلى M_{kp-1} .

فبتطبيق المخطط الذي تقدمه قاعدة FIFO من جديد فإن أقدم سلف لـ p_{s*} وليكن p_{s0} المنتمي إلى M_0 قد تم سبره بعد $p_{p``}$ الذي هو سلف لـ $p_{p*}$ و ينتمي إلى $M_{kp`-ks`}$ . وهكذا فإن توليد عقدة نهائية $p_{p*}$ قبل $p_{s*}$ قد وفر على الأقل سبر عقد المسار بين $p_{s`}$ و $p_s$. ويكون العدد الأعظمي للعقد المحذوفة محدوداً بـ $k_s - k_{s`}$ إذ تساوي $k_{s`}$ إلى $k_p - k_{p``}$. فضلاً عن ذلك يكون $k_{p``}$ محدوداً من أجل p`` بالعلاقة :

$$(h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i))$$

الذي يمثل الاختلاف الأعظم في طول المسارات بين p_{s0} و p_{p0}. ووفق النظرية (4-1) فإن: $k_p \geq k_s$ ، ومن ثم فإن القيمة العظمى لـ $k_s - k_{s`}$ تساوي إلى:

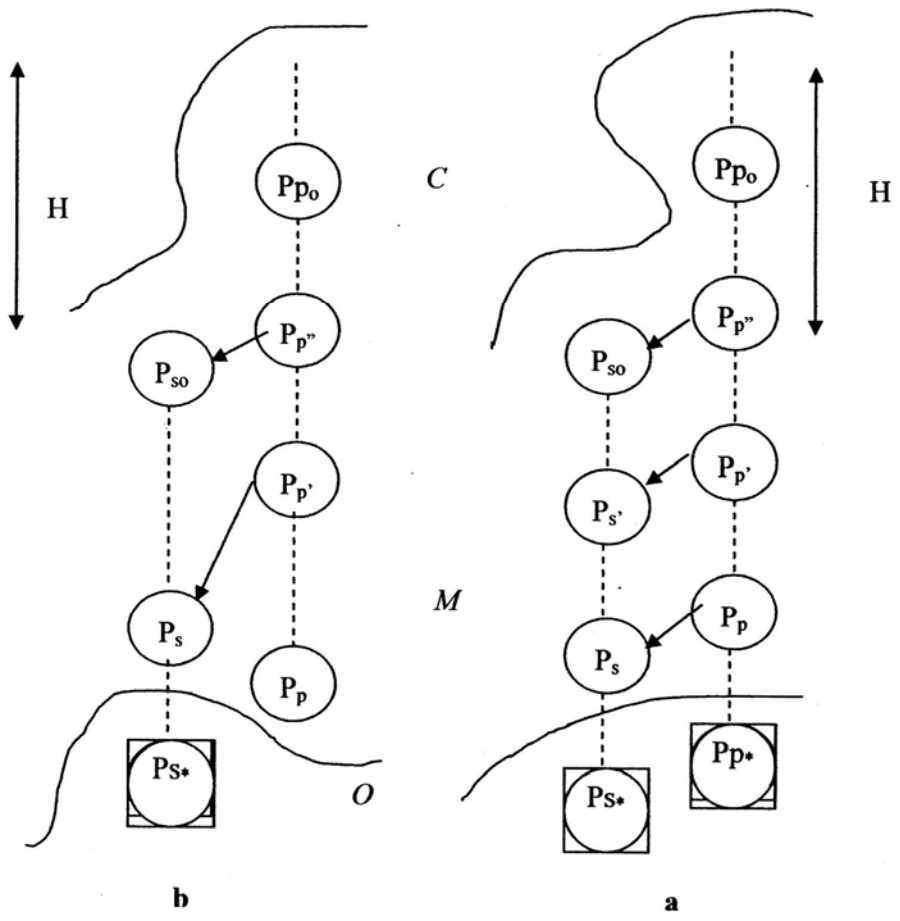
$$k_s - (k_p - (h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i)))$$

والذي يكون محدوداً من الأعلى من أجل $k_p = k_s$ ، وهكذا فإن الطول الأعظمي للمسار من $p_{s`}$ إلى $p_s$ والذي يساوي إلى $k_s - k_{s`}$ هو: $h_C - \min_{P_i\in M} l(p_i)$.

ولكن يمكن لتوليد عقدة نهائية p_p أن يؤدي أيضاً إلى حذف جميع العقد M التي تنتظر في قائمة العقد الحية A أن يتم تفريعها مثل $p_{s`}$, ويساوي العدد الأعظمي لمثل هذه العقد إلى m-1 أي عدد المسارات المختلفة فيM باستثناء المسار الذي تنتمي إليه p_p , وبذلك يكون عدد العقد المسبورة قد تم اختزاله بـ :

$$(m-1)\times(h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i))$$

شريطة ألا نتجاوز الأصغري العام (القاصر) للبحث المتوازي $\underline{\Phi}(p)$. كما أن الطول الأعظمي للمسار من $p_{s`}$ إلى p_s هو العدد الأعظمي من الموجات من حجم m-1 التي تنفذ بين بداية سبر المسار p_p وبداية سبر المسارات الأخرى من M ويجب أن نلاحظ في مثل هذه الحالة أن العقد الواقعة على طول المسار الذي يقود إلى $p_{p``}$ قد تم سبرها في أثناء سبر مجموعة العقد الحرجةC.



الشكل (4) تقويم الحدود الدنيا (a) والحدود العليا (b) وفق قاعدة FIFO

$$H = h_C - \min_{p_i \in M} l(p_i)$$

مقترح (4 ـ 3)

يحسب الحد الأعلى لعدد الدورات $\Phi_f(p)$ اللازم للتنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B اعتماداً على استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO بالعلاقة الآتية :

$$\Phi_f(p) \le \min\left(\frac{\Phi_f(1)+(m-1)(h_C-\min_{p_i\in M} l(p_i))-h_{CYM}}{p}+h_{CYM}, \overline{\Phi}(p)\right)$$

حيث m عدد صحيح يمثل عدد المسارات الموجودة في M.

البرهان:

يمكن نظرياً تشبيه سير عقد المجموعة D في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B وفق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO بدورة كاملة نتجت عن نقص في العمل. وعلى العكس يماثل التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B على التفرع الشجري للبحث مع مجموعة عقد التفرع الشجري CYM أسوأ حالات التنفيذ ومن ثم يحدد راجح عدد الدورات بالعلاقة:

$$(|CYM|-h_{CYM})/p+h_{CYM}$$

وقد تم أخذ ارتفاع CYM بالحسبان في الدورات التي لا يوجد فيها عدد كافٍ من العقد في قائمة العقد الحية لإشغال جميع المعالجات.

ومع ذلك يمكن ألا يتم بلوغ هذا الراجح لأنه لا يتم تفحص جميع عقد C و M. ووفقاً لقاعدة FIFO يمثل تفحص التفرع الشجري للبحث التتابعي بأكمله أسوأ حالات السير في التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B. لتكن p_{s*} المنتمية إلى O العقدة النهائية ذات القيمة الأمثلية المولدة في أثناء التنفيذ التتابعي ولتكن لدينا الحالة المعروضة بالشكل (4-b) حيث ولدت العقدة p_p المنتمية إلى P_p في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B ولم يتم توليدها في أثناء التنفيذ التتابعي فإن p_p لا تنتمي إلى P_s وقد وجب توليد p_p في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B قبل p_{s*}.

ليكن p_s سلف p_{s*} فإن p_s ينتمي وفق الفضية (3-2) إلى M. وليكن $p_{p'}$ سلف p_p الذي تم سبره قبل p_s ومن ثم فإن $p_{p'}$ تنتمي إلى M_{kp-1}, فبتطبيق مخطط سبر الرتب لقاعدة FIFO فإن $p_{p''}$ أقدم سلف لـ p_p والذي تم سبره قبل p_{s0} ينتمي إلى $M_{kp'-ks}$. وليكن p_{p0} أقدم سلف لـ $p_{p''}$ في M، حينئذ فإن الطول الأعظمي بين $p_{p''}$ و p_{p0} هو الفرق الأعظمي بين $l(p_{s0})$ و$l(p_{p0})$ أي :

$$h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i)$$

وهكذا فإن العدد الأعظمي لعمليات السبر في M على طول المسار من p_{p0} إلـى p_p مساوٍ لـ:

$$k_p = (k_p - k_{p``}) + (k_{p``} - k_{p0}) = (k_s + 1) + (h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i))$$

كما أن العدد الأعظمي لعمليات السبر طوال المسار نحو p_p التـي لا تنتمـي للتنفيـذ التتابعي مساوٍ لـ:

$$, h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i)$$

فضلاً عن ذلك فإن عدد المسارات التي تتوضع عليها عقدة لا يتم سبرها إلا في حالة التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B محدود بـ m-1 أي العدد الأعظمي للمسارات فـي M المختلفة عن المسار P_s، وإن عدد العقد المسبورة في أثناء البحث المتوازي قد زاد بـ:

$$(m-1)\times(h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i))$$

شريطة ألا يتعدى التكلفة القصوى الكلية للبحث المتـوازي$\overline{\Phi}$(p). سـنرمز لاحقـاً بـ $\overline{\Phi_f(p)}$ للحد الأدنى لعدد الدورات المعرف بالمقترح (4-2) وبـ $\overline{\Phi_f(p)}$ للحـد الأعلى لعدد الدورات المعرف بالمقترح (4-3).

تتمثل النتيجة المعنوية لهذين المقترحين في السماح بتحليل الشروط اللازمة و الكافيـة لوجود ثلاثة أنواع من الشذوذ يمكن أن تظهر في أثناء التنفيـذ المتـوازي لخوارزميـة B&B باستراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO.

يمكننا في المقام الأول إذاً حساب التسريع الأعظمي، ومن ثم تبيان إمكانيـة ظهـور شذوذ التسريع في أثناء التنفيذ المتوازي .

نتيجة 4 ـ 1

يتحدد من الأعلى التسريع (s) التي يمكن أن ينتج من استخدامP معالجاً بالعلاقة الآتية:

$$s \le p \times \frac{\Phi_f(1)}{\Phi_f(1) - (m-1)(h_C - \min_{p_{i\in M}} l(p_i))}$$

البرهان:

ينتج البرهان استناداً إلى المقترح (4-2). إن التسريع محدود بالنسبة بين عدد دورات التنفيذ التتابعي وعدد دورات أفضل تنفيذ متوازٍ لخوارزمية B&B.

يعطي في المقام الثاني شرط وجود شذوذ ضار في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزميةB&B قدرة التحسين الفعلي لفعاليات استخدام التوازي في حل المسألة.

نتيجة 4 ـ 2

إن الشرط اللازم لظهور الشذوذ السيئ في أثناء التنفيذ وفق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO يتمثل في العلاقة الآتية :

$$(m-1)\times(h_C-\min_{p_{i\in M}} l(p_i))\geq(P-1)\times(\Phi_f(1)-h_{CYM})$$

البرهان:

يمكن القول بالاعتماد على المقترح (4-3) إن الشذوذ السيئ يحدث إذا كان التسريع (أي نسبة زمن التنفيذ التتابعي إلى زمن التنفيذ المتوازي) أقل من 1، ونتوصل لصحة النتيجة بمقارنة عدد دورات التنفيذ التتابعي مع عدد دورات أسوأ حالات التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B.

كما يمكن في المقام الثالث تحليل أثر زيادة الموارد (زيادة عدد المعالجات المستخدمة) في فعالية الخوارزمية وذلك من خلال تطبيق الخوارزمية على المسألة نفسها عدداً من المرات وتغيير عدد المعالجات المستخدمة في كل تطبيق ثم مقارنة نتائج ذلك.

نتيجة 4 ـ 3

يظهر الشذوذ الضار بالنمو في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B وفق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة FIFO عندما نزيد عدد المعالجات من P_1 إلى P_2 حيث $p_2=\rho p_1$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$p_1\ \phi\ \frac{(\rho-1)\Phi_f(1)-(\rho+1)(m-1)(h_C-\min_{p_{i\in M}} l(p_i))+(h_{CYM})}{\rho(h_{CYM})}$$

البرهان :

نستطيع بالاعتماد على المقترحين (4-2) و(4-3) القول إن الشذوذ الضار يظهر بعد مقارنة عمليتي تنفيذ تتم الأولى علىP_1 معالجاً وتنجز الثانية باستخدام P_2 معالجاً علماً أن $P_2 > P_1$ وذلك إذا احتاج تنفيذ الخوارزمية على P_1 معالجاً زمناً أقل من تنفيذها على P_2 معالجاً وباعتبار ρ على أنها معدل نمو الموارد أي $\rho = P_2 / P_1$ نبرهن بسهولة صحة النتيجة، كما يمكننا استناداً إلى ما سبق القول: إن الشرط اللازم والكافي لظهور الشذوذ الضار يتمثل بتحقق العلاقة الآتية :

$$\underline{\Phi_f(p_1)} < \overline{\Phi_f(p_2)}$$

4 ـ 2 قاعدة LIFO

تسمح استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة LIFO كما في الحالة السابقة بالحصول على بعض المعلومات المفيدة بالنسبة لترتيب اختيار العقد من قائمة العقد الحية.

ندرج أولاً عدة حدود متقاربة (أي يمكن بلوغها) تتعلق بالتنفيذ التتابعي. تميل قاعدة LIFO إلى السير في الأمام (في العمق) في مسار يتكون من عقد متساوية التقويم من التفرع الشجري للبحث لخوارزمية B&B، ويكون عدد الدورات أعظمياً حين تكون المسارات التي تمت زيارتها أولاً في M هي أسوأ المسارات أي التي لا تقود لعقدة ذات قيمة أمثلية، وبالمقابل يكون هذا العدد اصغرياً إذا كان أول مسار تمت زيارته فيM هو أفضل مسار أي أنه يقود لعقدة ذات قيمة أمثلية مع المرور بأقل عدد من ذرىM، وفي هذه الحالة فإن الحدود الموافقة هي على التوالي لأسوأ حالات التنفيذ التتابعي وأحسنها.

مقترح 4 ـ 4

ليكن $\Phi^*(1)$ العدد الأمثل لدورات التنفيذ التتابعي الموصوف بالمقترح (3-1), يكون حينئذ عدد دورات التنفيذ التتابعي لخوارزمية B&B والذي نرمز له بـ $\Phi_l(1)$ محدوداً من الأدنى والأعلى بالعلاقة :

$$\Phi^*(1) \le \Phi_l(1) \le |C \Upsilon M|$$

كذلك الأمر نستطيع في حالة التنفيذ المتوازي وفق هذه القاعدة الوصول إلى حدود أكثر دقة من الحدود العامة الموصوفة في المقترح (3-4) ويمكن بلوغ مختلف حدود عدد دورات التنفيذ المتوازي الناتجة عن تحليل جميع الحالات الممكنة.

مقترح 4 ـ 5

إن عدد الدورات $\Phi_\rho(p)$ اللازم للتنفيذ المتوازي لخوارزميةB&B باستراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة LIFO محدود من الأدنى والأعلى وفق العلاقة الآتية:

$$\max\left(\frac{\Phi_l(1)-|M|}{p}, \underline{\Phi}(p)\right) \le \Phi_l(p) \le \min\left(\frac{\Phi_l(1)+|M|-h_{CYM}}{p}+h_{CYM}, \overline{\Phi}(p)\right)$$

البرهان:

يمكن من الناحية النظرية اعتبار السير غير المجدي لعقدD ممثلاً لدورة خاملة ناتجة عن نقص في العمل، ومن ثم يمكن أن يكون الفرق الأعظمي بين عدد العقد المسبورة في التنفيذ التتابعي وتلك المسبورة في التنفيذ المتوازي مساوياً لـ $|M|$ -1 عقدة.

وتبين هذه النتيجة بوضوح أن الحالتين المتطرفتين ممكنتـان فـي أثنـاء البحـث وفـق استراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة LIFO.

يمكن في المقام الأول أن يحتاج التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B إلى عـدد كبيـر من الدورات في حين أدى التنفيذ التتابعي إلى سبر أمثلي للتفرع الشجري للبحث الممثـل لتلك الخوارزمية. ويتوقف التنفيذ التتابعي دون الحاجة لتفحص الجزء غير المفيد مـن M إذا قاد مسار لعقدة ذات قيمة أمثلية وتم سبره أولاً. إلا أنه يمكن في أثناء التنفيذ المتوازي أن تستطيع المعالجات الأخرى توليد عقد مختلفة عن M وإدراجها بعد إدراج عقـدة مـن مسار مفيد قبل القيام بعملية انتقاء نظراً لأن ترتيب الإدراج غير محدد. وتؤدي هذه الحالة في التوازي إلى سبر كامل المجموعة الجزئية من M التي لا تحتوي على حـل ممكـن الأمر الذي يؤدي إلى تأجيل العمل على المسار المفيد، ومن ثم تقود هذه الحالة لحـساب الحد الأيمن من الصيغة السابقة. ويجب ملاحظة أن الحدود العليـا $\overline{\Phi}(p)$ للتنفيـذ علـى التوازي تهيمن دوماً على الحدود الناتجة لأن$\Phi_1(1)$ مساو على الأقل لعدد عناصر التفرع الشجري الحرج. ومع ذلك يسمح ذلك بتحديد الاختلاف الأعظمي في عـدد العقـد غيـر المسبورة على التوازي أو بمعنى آخر تميز حالة الشذوذ.

يمكن في المقام الثاني أن يكون عدد دورات التنفيذ المتوازي للخوارزمية أصغرياً على الرغم من أن تنفيذها التتابعي قد احتاج لسبر كثيف للتفرع الشجري الموافق لخوارزميـة B&B. فإذا تم في المرحلة الأخيرة من التنفيذ التتابعي سبر المسار الذي يقود لعقـدة ذات قيمة أمثلية فإن هذا التنفيذ ينتهي بعبور كامل الجزء غير المفيد مـنM . إلا أنـه يمكـن للمعالجات الأخرى في أثناء التنفيذ المتوازي توليد عقدة مـن المـسار المفيـد فـي M وإدراجها بعد إدراج عقدة من عقد المجموعة الجزئية غير المفيدة وقبل عملية الانتقاء لأن ترتيب الإدراج غير محدد. وتتكرر هذه الحالة (إدراج العقدة التي تقـود للحـل الأمثـل أخيراً) في كل دورة من دورات التنفيذ المتوازي وتقود إلى سبر مجموعة جزئية مـن M لا تتضمن حلاً أمثلياً ومن ثم تؤدي هذه الحالة إلى حساب قيمة الحد الأيسر من العلاقة.

نرمز لاحقاً بـ $\overline{\Phi_l(p)}$ و$\Phi_l(p)$ للحد الأعلى والحد الأدنى لعدد الدورات المـشار إليه في المقترح. كما أن النتيجة ذات الدلالة المعنوية التي نتوصل إلهـا بفـضل هـذا المقترح هي تحليل الشروط اللازمة والكافية لأنواع الشذوذ الثلاثة التي يمكن أن تحـصل في أثناء التنفيذ المتوازي للبحث عن الأفضل أولاً وفق قاعدةLIFO ونـستنتج باعتمـاد التحليل نفسه الذي استندنا إليه في دراسة قاعدة FIFO النتائج الآتية:

نتيجة 4 ـ 4

إن قيمة s التي تمثل التسريع الذي يمكن أن ينتج عن استخدامP معالجاً محدودة مـن الأعلى بالعلاقة:

$$s \le P \times \frac{\Phi_l(1)}{\Phi_l(1) - |M|}$$

نستنتج بالاعتماد على المقترح (4-5) أن التسريع محدود بالنسبة بين $\Phi_l(1)$ عـدد دورات التنفيذ التتابعي لخوارزمية B&B وعدد دورات أفضل تنفيذ متوازٍ لها $\underline{\Phi_l(p)}$.

نتيجة 4 ـ 5

يمثل تحقق العلاقة اللاحقة الشرط اللازم لظهور الشذوذ الـسيئ فـي أثنـاء تنفيـذ الخوارزمية وفق استراتيجية الأفضل أولاً و قاعدة LIFO :

$$|M| \ge (P-1) \times (\Phi_l(1) - h_{CYM})$$

يقع الشذوذ السيئ عندما يكون التسريع أقل من الواحد. و يبرهن على صحة النتيجـة من خلال مقارنة $\Phi_l(1)$ عدد دورات التنفيذ التتابعي لخوارزميـة B&B وعـدد دورات أسوأ حالات التنفيذ المتوازي لها $\overline{\Phi_l(p)}$.

نتيجة 4 ـ 6

تمثل العلاقة اللاحقة الشرط اللازم لظهور شذوذ التسريع الضار فـي أثنـاء التنفيـذ المتوازي لخوارزمية B&B باستراتيجية الأفضل أولاً وقاعدة LIFO حين يتم زيادة عـدد المعالجات من P_1 إلى P_2 حيث ($P_2 = \rho P_1$):

$$P1 > \frac{(\rho-1)\Phi_l(1) - (\rho+1)(|M|) + (h_{CYM})}{\rho(h_{CYM})}$$

البرهان:

يمكن اعتماداً على المقترح (4-5) أن يظهر الشذوذ الضار للتـسريع حـين نقـارن عمليتي تنفيذ للخوارزمية الأولى باستخدام P_1 معالجاً والثانية باستخدام P_2 معالجاً علماً بأن $P_2 / P_1 > 1$ وذلك إذا احتاج التنفيذ المتوازي للخوارزمية في عملية التنفيذ الأولـى إلـى عدد من الدورات يقل عن العدد الذي تحتاجه عملية التنفيذ الثانية أي عندما يكون:

$$\underline{\Phi_l(p_1)} < \overline{\Phi_l(p_2)}$$

وباعتبار $\rho = P_2 / P_1$ على أنها نسبة تزايد الموارد وأخذ ذلك بالحسبان فـي العلاقـة السابقة نبرهن صحة النتيجة.

4 ـ 3 الفاعدة المتماسكة

لكي نتمكن في الفقرة اللاحقة من إجراء مقارنة منصفة بين مختلف القواعد، لابد مـن تقديم وصف لحدود التنفيذ في حالة التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B باعتمـاد قاعـدة

متماسكة كاستراتيجية للبحث. نفترض لسهولة الشرح أن القاعـدة المتماسـكة التـي تـم اعتمادها هي القاعدة التسلسلية (sequenc) . تشبه سلوكية هذه القاعدة في التنفيذ التتـابعي سلوكية قاعدة LIFO في حين أنها تختلف عنها اختلافا كبيراً في حالة التنفيذ المتوازي.

مقترح 4 ـ 6

ينحصر عدد الدورات $\Phi_c(p)$ اللازم لإنجاز البحث في أثناء تنفيذ خوارزمية B&B على P معالجاً باستراتيجية الأفضل أولاً والقاعدة التسلسلية بين:

$$\max\left(\frac{\Phi_c(1)-|M|}{P},\underline{\Phi}(p)\right)\le\Phi_c(P)\le\min(\Phi_c(1),\overline{\Phi}(p))$$

البرهان:

يمكن تشبيه سبر عقد المجموعة D بدورة كاملة في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزميـة B&B ويعني ذلك أن الفرق بين عدد العقد المسبورة في أثناء التنفيـذ التتـابعي والتنفيـذ المتوازي للخوارزمية لا يتعدى المقدار $|M|-1$.

يمكننا بادئ ذي بدء واعتماداً على ما ورد في الفقرة (3-3) القول: إن عدد الدورات الأعظمي اللازم للتنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B لا يمكـن أن يتعـدى عـدد دورات التنفيذ التتابعي لها ويسمح ذلك بحساب الطرف الأيمن من العلاقة.

كما يمكننا بعد ذلك تحديد عدد الـدورات الأصـغري الـلازم للتنفيـذ المتـوازي لخوارزمية B&B حتى ولو احتاج التنفيذ التتابعي لسبر كثيف للتفرع الـشجري للبحـث. فإذا تأجل حتى المرحلة الأخيرة من التنفيذ التتابعي سبر المسار الذي يقود لعقدة ذات قيمة أمثلية (الواقعة إلى أقصى اليمين) فإن التنفيذ التتابعي ينتهي بعد تفحص كامل الجزء غير المفيد من M، بيد أنه يمكن في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B أن يكون المسار النافع هو الجزء الوحيد الذي تم سبره من M في الوقت نفسه الذي تقوم بـه المعالجـات الأخرى بسبر الجزء غير المسبور بعد من C مما يؤدي إلى عدم سبر الجـزء الـذي لا يتضمن حلولاً من M، في حين لا تقع هذه الحالة في أثناء التنفيذ التتابعي للخوارزمية.

نرمز لاحقاً بـ $\underline{\Phi_c(P)}$ و $\overline{\Phi_c(p)}$ للحد الأدنى والحد الأعلى لعدد الدورات المشار إليهما في المقترح السابق، يسمح هذان الحدان بشكل مماثل لما تم في القواعـد الـسابقة بتحديد الشروط اللازمة والكافية لظهور الشذوذ في أثناء التنفيذ المتوازي للبحـث وفـق استراتيجية الأفضل أولاً والقاعدة التسلسلية.

نتيجة 4 ـ 7

يعطى الحد الأعلى لقيمة s التي تمثل التسريع الذي يمكن أن ينـتج عـن اسـتخدام P معالجاً بالعلاقة الآتية :

$$s \le P \times \frac{\Phi_c(1)}{\Phi_c(1) - |M|}$$

البرهان:

يتحدد التسريع اعتماداً على المقترح (4-6) بالعلاقة بين $\Phi_c(1)$ عدد دورات التنفيـذ التتابعي للخوارزمية و $\underline{\Phi_c(p)}$ عدد دورات أفضل تنفيذ متوازٍ لها.

نتيجة 4 ـ 8

لا يمكن أن يظهر شذوذ سيئ في أثناء التنفيذ المتوازي للبحث عن الأفضل أولاً وفـق القاعدة التسلسلية.

نتيجة 4 ـ 9

تمثل العلاقة اللاحقة الشرط اللازم لظهور شذوذ التسريع الضار فـي أثنـاء التنفيـذ المتوازي لخوارزمية B&B وفق استراتيجية الأفضل أولاً والقاعـدة التسلـسلية حـين يزداد عدد المعالجات من P_1 إلى P_2 حيث $P_2 = \rho P_1$:

$$P1 > \frac{\rho\Phi_c(1) - \rho(|C|) - (\rho+1)(|M|) + (h_{CYM})}{\rho(h_{CYM})}$$

البرهان :

يمكن اعتماداً على المقترح (4-6) أن يظهر شذوذ التسريع الضار حين نقارن عمليتي تنفيذ متوازٍ للخوارزمية نفسها تنجز الأولى علىP1 معالجاً والثانيـة علـى P2 معالجـاً علماً أن $P2 > P1$ وذلك إذا كان عدد دورات عملية التنفيذ الأولى أقل مـن عـدد دورات العملية الثانية، أي عندما يكون:

$$\underline{\Phi_C(P1)} < \overline{\Phi_C(P2)}$$

وباعتبار $\rho = P_2 / P_1$ على أنها نسبة تزايد موارد التنفيذ وتعويضها في العلاقة السابقة نبرهن صحة النتيجة .

4 ـ 4 دراسة مقارنة بين مختلف القواعد

لا تبدو وفقاً لما تقدم المقارنة سهلة بين مختلف القواعد التي تـستخدمها اسـتراتيجية الأفضل أولاً، فعلى الرغم من أنه من الممكن تعميم النتائج التي توصلنا إليها عن حـدود عدد دورات التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B وفـق قاعـدة LIFO علـى أي قاعـدة عشوائية لا تضع فرضيات عن ترتيب اختيار العقد يتعذر تطبيق نتائج السبر التتابعي وفقاً

لهذه القاعدة على القواعد الأخرى نظراً لأن السبر التتابعي للتفرع الشجري لخوارزمية B&B وفقاً لهذه القاعدة يكون محدداً بدقة ومعروفاً مسبقاً. ويعزى هذا التناقض إلى ارتباط سلوكية الاستراتيجية وفق قاعدة معينة ارتباطاً وثيقاً مع معطيات المسألة المرغوب في حلها بحيث يتعذر إجراء تحليل للحالة الوسطية وفقاً لعمليات تنفيذ خاصة، وتجدر الإشارة إلى أنه من الممكن الحصول في مثل هذه الحالات على حدود متقاربة ومحكمة لعدد الدورات تسمح بمقارنة استراتيجيات مختلفة نعتمد القاعدة نفسها على الرغم من تعذر المقارنة بينها بشكل مباشر.

فضلاً عن ذلك يرتبط الميل للشذوذ في مختلف القواعد بنوعية السبر التتابعي لأنه من الممكن أن يكون عدد الدورات المستخدم لتحديد مجالات عدد دورات التنفيذ المتوازي مختلفاً من قاعدة إلى أخرى كما بينت النتائج التي توصلنا إليها حول مجالات الحدود في التنفيذ التتابعي.

وتجدر الإشارة أيضاً إلى أنه إذا طبقت الخوارزمية مرات عدة على المسألة نفسها فإننا نجد اختلافاً بين عدد العقد المسبورة ومن ثم بين عدد الدورات من تنفيذ إلى آخر مهما كانت القاعدة المعتمدة، ويعزى سبب الاختلاف هذا إلى حجم الجزء الذي يتم سبره من M في كل عملية تنفيذ، وقد قمنا بحساب الاختلاف الأعظمي من أجل كل قاعدة فكان مساوياً لـ $(m-1)(h_c - \min_{p_i \in M} l(p_i)) \le |M|$ من أجل قاعدة FIFO ولـ $|M|$ من أجل قاعدة LIFO ووصل هذا الاختلاف في الحد الأدنى للقاعدة التسلسلية المتماسكة إلى $|M|$ مما يسمح لنا بالقول: إن الشرط الرئيس على النهايات التي تضمنها الحدود العامة $\underline{\Phi}(p)$ و $\overline{\Phi}(p)$ للتنفيذ المتوازي يتمثل في المتراجحة الآتية :

$$(m-1)(h_c - \min_{P_i \notin M} l(p_i)) \le |M|$$

ويظهر في كل حد من حدود المتراجحة السابقة حجم العقد التي تنتمي لـ M والتي تولد التكلفة الزائدة أو مقدار الوفر في عدد دورات التنفيذ التتابعي والتي تسهم في توليد شذوذ التسريع، كما نستطيع بسهولة أن نستنتج أن مقدار الاختلاف الممكن في عدد الدورات يكون أكبر ما يمكن عند استخدام القاعدة LIFO.

تعريف 4 ـ 1

تكون استراتيجية بحث مع قاعدة معطاة مهيأة للشذوذ في أثناء تحويلها على التوازي إذا كانت درجة ظهور هذه الظاهرة تقريباً عالية . بمعنى آخر إذا كانت فسحة مجال عدد الدورات الممكنة لتنفيذ خوارزمية B&B كبيرة نسبياً.

خاصة 4 ـ 1

إن قاعدة FIFO أقل استعداداً للشذوذ من قاعدة LIFO .

نستطيع القول استناداً إلى مختلف النتائج التي توصلنا إليهـا سـابقاً: إن اسـتراتيجية الأفضل أولاً وفق قاعدة FIFO تقود في التنفيذ المتوازي إلى إمكانية ظهور شذوذ سـيئ بشكل أقل من قاعدة LIFO، كما أن هناك فائدة أخـرى لقاعـدة FIFO تكمـن فـي أن شروط ظهور شذوذ التسريع الضار أقل قوة من شروط ظهوره في قاعـدة LIFO إلا أن العيب الرئيس لقاعدة FIFO يكمن في عدم قدرتها على إظهار شذوذ تسريع ذي دلالـة حقيقية مقارنة مع قاعدة LIFO.

خاصة 4 ـ 2

إن القاعدة التسلسلية مهيأة لشذوذ التسريع لكنها لا تولد شذوذاً سيئاً .

بينت النتائج السابقة الفائدة المهمة للتماسك الذي وصـفه Li &Wah [19]، ولا يـتم استنتاج هذه الخاصة الأصيلة إلا من خصائص المسألة نفسها.

خاصة 4 ـ 3

تكون القاعدة التسلسلية مهيأة لظهور الشذوذ الضار بالتسريع .

اعتماداً على النتائج (4-6) و(4-9) فإن القاعدة المتماسكة مهيأة أكثر من قاعدة LIFO للشذوذ الضار بالتسريع إذا كان:

$$\rho\left(\Phi_C(1)-|C|\right)<(\rho-1)\Phi_I(1)$$

حيث تمثل ρ النمو النسبي في عدد المعالجات.

5 ـ نحو نموذج غير متزامن

لا تتحقق في الواقع العملي فرضية التزامن (A2) وفرضية ثبات حجم العمل (A3)، لأن الزمن اللازم لحساب تقويم عقدة من عقد B&B مرتبط بالمسألة المدروسة، كما أنه يتغير بشكل عام طوال التنفيذ، فعلى سبيل المثال يكون تقويم عقدة في العمق أسرع من تقويم عقدة يكون أحد أسلافها قريباً من الأصل. تؤدي تجزئة المسائل الجزئية إلى تصغير حجم مجموعة الحلول ويعد ذلك السبب الرئيس في الوفر بالسرعة. ويتمتع التطبيق اللامتزامن في هذه الحالة بأفضل الفعاليات لأنه يستفيد من اختلاف أزمنة المهمات الموافقة لسبر العقد، كما يسمح الاختلاف بين حجم العمل لمعالج بسبر عقدة جديدة منذ أن ينتهي من معالجة العقدة التي اختارها سابقاً الأمر الذي يلغي انتظار الدورة اللاحقة.

يحتاج بكل أسف التحليل النظري للنموذج المتوازي كما أسلفنا لثلاث فرضيات قوية (A2) حتى (A4) لذا يجب تفحص ما ينجم عن تجاهل فرضية التزامن وثبات حجم العمل واعتماده في النتائج السابقة لنبقى قريبين من واقع التطبيقات الحقيقية. كما يجب تحديد مفهوم المثالية المقدم في الفقرات السابقة بدقة كي تبقى اقتراحاتنا صحيحة وواقعية.

تعريف 5-1

في أثناء حل مسألة معطاة يكون التنفيذ المتوازي لخوارزميةB&B أمثلياً إذا وفقط إذا صغر المدة العظمى للمهمة التي ينفذها معالج واحد .

من المنطقي الافتراض بأن زمن سبر عقدة ما p_i من عقد التفرع الشجري للبحث يبقى ثابتاً في أثناء التنفيذ التتابعي أو التنفيذ المتوازي منذ أن يتم تحديد مبدأ التفريع وتابع التقويم. وتبقى جميع الخواص الناتجة عن التماسك صحيحة حين نتجاهل الفرضيتين (A2) و(A3). وإذا تم في لحظة ما في أثناء التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B سبر عقدة على الأقل من العقد التي تم سبرها في التنفيذ التتابعي فقد يؤدي ذلك إلى ظهور شذوذ سيئ. أما فيما يتعلق بالنتائج الأخرى تبقى المقارنة بشكل رئيسي حول الاختلاف بين عدد

العقد المسبورة في أثناء مختلف أنواع التنفيذ. وفي الواقع إذا كانت k_1 العقد المـسبورة أو الدورات الخاملة التي نتجت في أثناء التنفيذ E_1 دون أن تنتج في أثناء التنفيذ E_2 وكانـت k_2 العقد المسبورة أو الدورات الخاملة التي حصلت في أثناء التنفيذE_2 دون أن تقـع فـي أثناء التنفيذ E_1 فإننا نستنتج من ذلك أن هناك اختلافاً في الكلفة قـدره $|k_2 - k_1|$ عمليـة سبر بين التنفيذينE_2 وE_1 ومع ذلك فإن مثل هذا التحليل قد لا يكون صحيحاً دون قيـود الفرضيتين (A2) و(A3) لأنه قد لا تحتاج كل من الـ k_2 عقدة لزمن التقويم نفسه الذي تحتاجه كل عقدة من الـ k_1 عقدة. لذلك يجب علينا أن نأخذ بالحسبان جودة السبر بـدلاً من عدد العقد المسبورة ويبدو للوهلة الأولى أن مقارنة العدد الكلـي للـدورات المتعلقـة بالتفرع الشجري الحرج هو أمر صحيح لأنه يجب سبره في كل تنفيذ لخوارزمية B&B، وكل عقدة تسبر في التنفيذ المتوازي لخوارزمية B&B ولم يتم سبرها في تنفيذ آخر هي ذروة منتمية حتماً إما لـ M أو لـ D. بعد ذلك لا يمكن أن نعد الفرضية التـي تعـد أن تكلفة الدورة الخاملة التي تنتج عن نقص في العمل معادلة لتكلفة دورة ضائعة لسبر عقدة من D صحيحة لأنه يمكن لمعالج قد اختار عقدة غير مفيدة من قائمة العقد الحية المليئـة بعقد من D حصراً أن ينهي سبره بعد زمن طويل من قيام معالج آخر بإدراج عقدة مفيدة منC أو من M في القائمة. وعلى العكس من ذلك يصبح معالج خامل نشطاً منذ اللحظـة التي تمتلئ فيها القائمة الفارغة .

ولحل هذه المعضلة فقد تضمن نموذج Deo & Quinn [21] المدة الزمنية t(i) اللازمة لفحص مسألة جزئية وتفريعها من المستوىi في التفرع الشجري للبحث إلا أننا نعتقـد أن ذلك غير صحيح لأنه ليس بالضرورة أن يكون للعقد في المستوى نفسه القـرائن نفـسها ومستوى المعطيات ذاته، وفي الواقع يمكن حساب تقويمات هذه العقد بأساليب مختلفـة إذا رغبنا محاباة بعض المسارات دون المسارات الأخرى.

يكون تحليل أسوأ الحالات حيث يتم جمع أسوأ أزمنة سبر كـل عقـدة غيـر عـادل ومتشائم لأنه يتجاهل ظواهر الارتباط بين المعالجات عن إدارة عمليـة إمـلاء القائمـة بالعقد الحية. ومن جهة أخرى لن يكون التحليل عن الحل الوسط المتعلق بالفرضية (A3) دقيقاً كما بينا سابقاً.

وانطلاقاً من مختلف هذه النقاط فإن النتـائج التجريبيـة المعروفـة فـي الأدبيـات [19,10, 6, 3] مقترنة بالنتائج النظرية تبين أنه من المفيد دراسة نموذج واقعي للتطبيـق المتوازي المتعلق بالواقع الحقيقي الذي نعتقد أنه اللاتزامن وأن نتوصل مـن ذلـك إلـى استخلاص أفضل النماذج وأشدها صلابة.

6 ـ مناقشة

لقد هدف هذا البحث إلى دراسة أثر استراتيجيات الأفضل أولاً في موازاة خوارزميات B&B وتدعيمها بنتائج نظرية.

يسمح النموذج المستخدم أن نأخذ بالحسبان عوامل التسريع الناتج عن زيادة عدد المعالجات والتباطؤ الناتج عن إنجاز عمل غير مجدٍ، وتسمح التطبيقات بالحصول على معلومات مفيدة في هذا المجال يتم التوصل إليها في نهاية التنفيذ، وقد بينت التجارب في مجال البحث عن الحل الأمثل للمسائل التوافقية أن تابع التقويم هو غالباً نفسه لمسائل من النوع نفسه مهما كان حجمها، كما أن منحنى توزيع مختلف قيم المسائل الجزئية غالباً ما يكون أسياً للتفرع الشجري Bi&B، ويعطي بذلك الكثير من العقد غير النهائية التي يكون تقييمها مساوياً للقيمة الأمثلية. ويبدو أنه من المفيد في هذه الحالة تحديد هوية مسائل الأمثلة (الاستمثال) التوافقية وتحليلها كي نستطيع تحديد قاعدة إدارة العقد المتساوية القيمة طوال استراتيجية الأفضل أولاً.

كما يسمح إجراء اختبارات على مسائل من حجم صغير وعدد محدود من المعالجات بالحصول على معايير ضابطة لتحسين خيارات حل المسائل الكبيرة الحجم باستخدام أجهزة كبيرة يمكن زيادة عدد معالجاتها.

من جهة أخرى تبدو وجهات النظر الموجودة في الأدبيات [19, 21, 25] لحل مشكلة الشذوذ غير مقنعة تماماً، كما أن مفهوم التكلفة الزائدة لضمان التماسك في إدارة بنية المعطيات مبالغ فيه، فضلاً عن أن القواعد الأخرى دون التكلفة الزائدة يمكن أن تطبق بشكل أفضل في إدارة بنية المعطيات، وأخيراً لا يعد التماسك حلاً عاماً للشذوذ لأنه لا يمنع من ظهور حالات التسريع الضار.

فضلاً عن ذلك لا تهتم وجهة النظر هذه بالبحث عن أفضل سبر للتفرع الشجري لخوارزمية B&B وإنما تتدخل لقيادة السبر المتوازي طوال العبور التتابعي.

ولإنهاء هذا الموضوع نحلل مختلف الآثار الناتجة عن احترام الفرضيات (A1-A4).

تعد فرضية الإسناد المباشر على تابع التقويم ومبدأ التفريع جزءاً جوهرياً من خوارزمية B&B كما أن فرضيات التزامن حسب ما بيّنا سابقاً لا يمكن تحقيقها بسهولة في أثناء التنفيذ في حين تبقى الفرضية (A4) المتعلقة بالتكلفة الزائدة الناجمة عن الولوج إلى الموارد المشتركة محققة في الواقع، لذلك يجب تأمين ولوج متنافس بتكلفة ثابتة والذي يكون ممكناً في بنى معطيات خاصة بخوارزمية B&B وفي الحالة المعاكسة تتزايد تكلفة الولوج مع تزايد عدد المعالجات مما يقود إلى تقليل الفعالية.

7 ـ الخاتمة

لقد حددنا وحللنا ظاهرة الشذوذ في خوارزميات B&B المتوازية باستراتيجية الأفضل أولاً، كما سمح تعريف نموذج محدد بتحليل زمن التنفيذ مقيساً بعدد الدورات بشكل مستقل عن الجهاز المستخدم وحصلنا بذلك على حدود لعدد الدورات سواء كان التنفيذ تتابعيـاً أم متوازياً، إلا أنها بقيت عامة جداً وغير قابلة للاستخدام للحصول علـى معلومـات عـن الشروط الضرورية والكافية لظهور الشذوذ في استراتيجية الأفضل أولاً، الأمـر الـذي حملنا على صياغة حدود أكثر دقة وأكثر واقعية، كما بيّنّا أهمية إدارة المـسائل الجزئيـة ذات التقويم المتساوي الأمر الذي قاد لتعريف قواعد بسيطة ومختلفة لترتيب العقد، كمـا درسنا ثلاث قواعد مختلفة لاختيار العقد هـي قاعـدة FIFO وقاعـدة LIFO والقاعـدة التسلسلية، وأعطينا من أجل كل واحدة منها حدوداً محكمة لفعاليات تنفيـذ خوارزميـات B&B. كما سمح إدراج خاصة قابلية الشذوذ بمقارنة مختلف القواعد واقتـراح خيـارات بسيطة لتأمين الفعاليات المطلوبة عند الموازاة.

كما بيّنّا أن قاعدة FIFO هي أقل القواعد المحرضة على الشذوذ وبرهنا علاوة علـى ذلك أن القاعدة المتماسكة التي طورت بمواجهة مشكلة الشذوذ السيئ لا تمنع من ظهـور شذوذ تسريع ضار .

REFERENCES

1- AKL, S. G. (1997)." Parallel Computation Models And Methods", Prentice Hall.

2- Almasi, G. S., Gottlieb, A. (1994). "Highly Parallel Computing", The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc.

3- Aorts, E., Lenstra, J. K. (2003). "Local Search In Combinatorial Optimization", Princeton University Press.

4- Bagchi, K. Oct. (1997). "Advanced Computer Performance Modeling And Simulation", Gordon and Breach, Published in UK.

5- Beasley, J. E. (1987). Supercomputers and Operational Research. Journal Of Operational Research Society 38: 1085 – 1089.

6- Chandy, K. M., Misra, J. Nov. (1982). Distributed Computation On Graphs: Shortest Path Algorithm CACM, Vol 25, n°11, pp. 833 – 837.

7- Dijkstra, E. W., Feigen, W. H. J. & Van Gasteren, A. J. M. (1983). Derivation Of A termination Detection Algorithm For Distributed Computation, Inf. Proc. Lett. 16 (5), pp. 217 – 219.

8- Foster, I. (1994). "Designing And Building Parallel Programs", Addison – Wesley.

9- Freeman, T. L., Philips, C. (1993). "Parallel Numerical Algorithm", Prentice Hall.

10- Grama, A., Gupta, A., Karypis, G., Kumar, V. (2003). "An Introduction To Parallel Computing: Design Analysis Of Algorithms", Addison-Wesley.

11- Hromkovi, J. Feb. (1997). "Communication Complexity And Parallel Computing: The Application Complexity In Parallel Computing", Springer - verlag, Berlin and Heidelberg Of Communication KG. GmbH & Co.

12- Hughes, C. (2003). "Parallel and Distributed Programming Using C++", Addison Wesley.

13- Ibaraki, T. (1976). Theoretical Comparisons Of Search Strategies In Branch And Bound Algorithms, International Journal Of Computer And Informations Sciences, 5 (4): 315 – 344.

14- Ja`Ja, J. (1992). "An Introduction To Parallel Algorithms", Addison – Wesley.

15- Joidan, H., Alaghband, G. (2002). "Fundamentals Of Parallel Processing", Prentice Hall.

16- Karniadakis, G. (2003). "Parallel Scientific Computing In C++ And MPI", Cambridge University Press.

17- Korte, B. Jens Vygen, (2002). "Combinatorial Optimization", Springer.

18- Li, G., Wah, B. (1984). Computational Efficiency Of Parallel Approximate Branch And Bound Algorithms Proc. Of The Int, Conf. on Parallel Processing, pp. 473 – 480.

19- Li, G., Wah, B. W., June, (1986). Coping With Anomalies In Parallel Branch and Bound, IEEE On Computer, C-35 (6): 568–573. Trans.

20- Migdalas, A. May. (1997). Parallel Computing In Optimization, Applied Optimization, Vol . 7, Published In Netherlands.

21- Quinn, M. J. (1994). "Parallel Computing, Theory and Practice", McGraw - Hill, Series in Computer Science Second edition.

22- Sahnis, S., Lai, H. (1984). Anomalies In Branch And Bound, Com. of ACM, Vol. 27, n°6, PP. 594- 602.

23- Stavrors, A., Zenios, S. Jan. (1998). "Parallel Optimization, Theory, Algorithms And Applications", Oxford University Press inc.

24- Tel, G. (2002). "Introduction To Distributed Algorithms", Cambridge University Press.

25- Wah, B. W. and C. -F. Yu. September. (1985). Stochastic Modeling Of Branch And Bound ALGPRITHMS under A Best – First Search, IEEE Trans. Software Eng., SE. 11 (922 – 934).

26- Yann C. D., Patrick Siarry. (2003). "Multiobjective Optimization", Springer.

27- Yao, D., Zhang, H. Zhou, X. (2003). "Stochastic Modeling and Optimization", Springer.

.