حـول جبـور-BCI

أحمـد هابيل و ايلـي قدسي
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة دمشق ـ سورية

تاريـخ الإيداع 2005/11/28
قبل للنشـر في 2006/08/23

الملخص

نسمي جبر- BCI كل مجموعة X مزودة بعملية ثنائية* وبعنصر مميز يرمز لـه بـ 0 والعمليـة الثنائية تحقق مجموعة من الشروط.

نقدم في هذه الورقة العلمية تعميماً لمتطابقات مهمة معروفة في جبور-BCI يمكن أن تـساعد فـي دراسات جديدة في هذا المجال.

الكلمات المفتاحية: جبر-BCI، ذرة، متطابقة، عملية توزيعية.

About BCI- algebras

Ahmad Habil and Ilie Koudsi

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

Received 28/11/2005
Accepted 23/08/2006

ABSTRACT

A BCI-algebra is a non-empty set X with a binary operation, distinguished element 0, and the binary operation satisfying some conditions.
In this paper we presents a generalization of some important known identities in BCI-algebras that could be help in starting new studies in this field.

Key words: BCI-algebra, Atom, Identity, Distributive operation.

المقـدمـة

في عام 1966 قام رياضيان يابانيان (k. Iseki) بتعريف مفهوم جديد أسـمياه جبـر-BCI وقد استقى هذا المفهوم من جهتين الأولى نظريـة المجموعـات و الثانيـة جبـر المنطق. وفي عام 1980 نشرK. Iseki سلسلة من البحوث في هذا الموضوع إذ عـرف مفهوم المثالي، والذرة وقام W. Cornish بدراسات لإيجاد أقل عدد ممكن من الشروط في تعريف الجبر-BCI وأوجد علاقة بين هذا الجبر و الزمرة البوليانية، وخلال الثمانينيـات قام الرياضيان J. Meng, X. L. Xin بدراسة موضوع الذرات ونشرا عدة بحوث تتعلـق به. ثم درس W. Dudek العلاقة بين الجبر-BCI وما سماه شبه الزمرة التبديلية.

ويعد هذا البحث امتداداً لهذه البحوث خاصة موضوع الذرات ونحاول أيـضاً إثبـات صحة بعض المتطابقات المعروفة إنما في حالات أعم.

1ـ جبــور-BCI:

تعاريف و مبرهنات [1] ,[3] ,[5].

1-1- تعريف:

نسمي جبر-BCI كل مجموعة X مزودة بعملية ثنائية $*$ وبعنصر مميز نرمز له بـ0 والعملية الثنائية تحقق الشروط الآتية:

1) $x*x = 0$

2) $x*y = 0,\ y*x = 0 \Rightarrow x = y$

3) $(x*(x*y))*y = 0$

4) $((x*y)*(x*z))*(z*y) = 0$

وذلك مهما تكن x, y, z من X.

في هذه الدراسة سنعد أن الثلاثية $(X, *, 0)$ هي جبر-BCI يعني أن $*$ تحقق التعريف (1-1)، وللاختصار سنقول: إن X هي جبر-BCI.

1-2- مثال:

لتكن $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ولنزود X بالعملية الثنائية المعرفة بالجدول الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

إن X مزودة بهذه العملية هي جبر-BCI انظر[2] ولنلاحظ مثلاً تحقق الشرط(1) في التعريف وذلك واضح من أن عناصر القطر الرئيسي كلها أصفار. أما الخواص الأخـرى فيمكن التحقق من صحتها بالحساب المباشر وهي عملية طويلة ومعقدة لكنها منتهية.

كل جبر-BCI مزود بشكل طبيعي بعلاقة ترتيب معرفة بالشكل الآتـي مـن أجـل عنصرين x, y من X فإن :

$$x \le y \Leftrightarrow x*y = 0$$

علاوة على ذلك لدينا التمهيدية الآتية:

1-3- تمهيدية:

ليكن X جبر-BCI فإن الخواص الآتية محققة:

1) $x*0 = x$

2) $x*(x*(x*y)) = x*y$

3) $(x*y)*z =(x*z)*y$

4) $0*(x*y) = (0*x)*(0*y)$

5) $x \le y \Rightarrow x* z \le y*z,\ z*y \le z*x$

6) $0*(x*y) = 0 \Leftrightarrow 0*x = 0*y$

7) $(x*z)*(y*z) \le x * y$

وذلك مهما يكن x, y, z من X.

1-4- ترميز:

لنفرض أن X جبر-BCI و $x, a\in X$ و n صحيح موجب سوف نرمز لـ $x*(\ldots..)*(x*(a*x))\ldots$ (حيث تظهر x, n مرة) بـ $a*x^n$ أي:

$$a*x^n = (\ldots(a*x)*x)*\ldots..)*x$$

سنستخدم مفهوم العناصر الذرية من النسق n.

1- 5- تعريف:

ليكن X جبر-BCI ، و $n , a\in X$ عدداً صحيحاً موجباً بحيث

$$x*a^n = 0 \Rightarrow x = a$$

فإن a يسمى n – ذرة.

في حال n = 1 سندعو a ذرة فقط.

سنرمز بـ $L_n(X)$ لمجموعة كل الـ n- ذرات في X .

كما نرمز بـ L (X) لمجموعة كل الذرات في X .

سنستخدم أيضاً علاقة تكافؤ نرمز لها بـ ~ ونعرفها كما يأتي:

1- 6- تعريف:

ليكن X جبر- BCI و y , x عنصرين من X إن العلاقة الثنائية:

$$x\sim y \Leftrightarrow 0*x = 0*y$$

هي علاقة تكافؤ على X.

وبفرض $e\in X$ و[e] صف تكافؤ e و كان [e] منتهياً و$[e] = \{ e_1 ,e_2 ,\ldots,e_n\}$ و x عنصراً ما من X فسوف نستخدم الرمز:

$$x^e = (\ldots(x *e_1) * e_2) *\ldots)*e_n) * (0*e^{(n-1)})$$

وإذا كان $e = e_j$ حيث $j\in \{1 ,2, \ldots, n\}$ نستخدم الرمز:

$$x' = (\ldots(x * e_1) * e_2)*\ldots)*e_{j-1})*e_{j+1})*\ldots)*e_n)*(0*e^{(n-1)})$$

1- 7- تعريف:

ليكن X جبر-BCI ، a عنصر من X عندئذ نعرف المجموعة الآتية:

$$T_a = \{x\in X: a*(a*x)= x\}$$

يمكن أن نلاحظ بسهولة استناداً إلى الجزء (2) في التمهيدية (**1- 3**) المذكورة أعـلاه أن $T_a = a*X$ حيث المجموعة $a*X = \{a*x: x\in X\}$ سنستخدم كذلك الرمز $T_a*X= \{u*v: u \in T_a, x\in X\}$.

نقدم فيما يأتي بعض التمهيديات التي سنستخدمها في هذه الورقة العلمية.

1- 8- التمهيدية:

ليكن X جبر- BCI, a, b عنصرين من X عندئذ:

1) a ذرة في X $\Rightarrow$ a*x ذرة في X $(\forall x \in x)$

2) a ذرة في X $\Rightarrow 0*(0*a) = a$

البرهان: انظر [6].

1- 9- تمهيدية:

بفرض X جبر-BCI, n عدداً صحيحاً موجباً y, x عنصرين من X:

1) $0*(0*x^n) = 0*(0*x)^n$

2) $0*(x*y)^n = (0*x^n)*(0*y^n)$

البرهان: انظر[4].

2 ـ الدراسة والبحث

نبدأ الجزء الثاني من هذه الورقة العلمية بالتمهيدية الآتية:

2- 1- تمهيدية:

إذا كان X جبر-BCI عندئذ من أجل أي عنصرين $a, b \in X$ فإن الخواص الآتيـة محققة:

1) $T_{a*b} \subseteq T_a$

2) $T_0 \subseteq T_a$

3) $T_a*X = T_a$

4) $x \in T_a \Rightarrow T_x \subseteq T_a$

البرهان:

لبرهان (1) نأخذ عنصراً من T_{a*b} وليكن y , من تعريف المجموعة T_{a*b} :

$y = (a*b)*((a*b)*y)$

$= (a*b)*((a*y)*b)$

$\leq a*(a*y)$

وذلك استناداً إلى الخاصتين (3)، (7) الواردة في التمهيدية (1-3).

إذاً: $y \leq a*(a*y)$ ومن الشرط (3) في(1-1) $(a*(a*y))*y=0$ ومنه يمكـن أن نكتـب $a*(a*y) \leq y$ وبدمج المتراجحتين نجد: $a*(a*y) = y$ إذاً $y\in T_a$ ومن ثم نكون قـد أثبتنـا الجزء(1).

أما الجزء(2) فينتج مباشرة من (1) وذلك بوضع $a = b$.

لبرهان (3) نأخذ عنصراً من المجموعة T_a*X أي عنصر مـن الـشكل $z*y$ حيـث $z\in T_a$, $y\in X$. لكن $z\in T_a$ يقتضي استناداً إلى الملاحظة الواردة في التعريف (1-7)

وجود عنصر مثل $x \in X$ بحيث $z = a*x$ وعليه نستنتج حسب الجزء (1) في هذه التمهيدية أن:

$$T_{z*y} = T_{(a*x)*y} \subseteq T_{a*x} \subseteq T_a$$

ومن الواضح أن $z*y \in T_{z*y}$ إذاً $z*y \in T_a$ ومن هنا يمكن أن نكتب:

$$T_a * X \subseteq T_a.$$

أما الاحتواء المعاكس فهو واضح من الخاصة (1) في التمهيدية (1-3).

وأخيراً لبرهان الجزء (4) لنفرض أن $x \in T_a$ ومنه يوجد $u \in X$ بحيث $x = a*u$ ومن ثم استناداً إلى الجزء (1) نجد : $T_x = T_{a*u} \subseteq T_a$ إذاً $T_x \subseteq T_a$.

وبهذا يكون قد تم إثبات التمهيدية بكاملها.

ولدينا هنا النتيجة الآتية:

2- 2- نتيجة:

بفرض X جبر-BCI وليكن x, a عنصرين من X , n عدداً صحيحاً موجباً عندئذ:

$$a*(a*(a*x^n)) = a*x^n$$

الإثبات: يتم إثبات النتيجة بطريقة الاستقراء الرياضي بالنسبة للعدد الصحيح n ووفقاً للخاصة (3) من التمهيدية السابقة (2-1)، هذه النتيجة تعد تعميماً للمبرهنة الواردة في [7] حيث تتم البرهنة على صحة المطابقة أعلاه بافتراض $a = 0$.

2- 3- تمهيدية:

ليكنX جبر-BCI عندئذ لدينا الخواص الآتية:

1) $L(X) = T_0 = 0*X$

2) $L_n(X) \subseteq L(X)$ $(\forall n \geq 1)$

3) $a \in L_n(X) \Rightarrow 0*a^{(n-2)} = a$ $(n \geq 2)$

البرهان:

إن الجزء الأول ينتج بسهولة وذلك بتطبيق (2) في التمهيدية(1-8) ومن(1-7).

لبرهان الجزء(2) من السهل أن نرى أولاً أن الخاصة صحيحة من أجل $n = 1$.

في حال$(n > 1)$ نأخذ عنصراً $a \in L_n(x)$.

لدينا استناداً إلى تعريف $*$ والخاصة(3) من التمهيدية (1-3) أن:

$$(0*a^n)*(0*a^n) = 0 \Rightarrow (0*(0*a^n))*a^n = 0$$

ونظراً لأن a هو n – ذرة، فإن: $0*(0*a^n) = a$ وبوضع $0*a^n = x$ يمكن أن نضع

$a = 0*x$ إذاً $a \in L(X)$ استناداً إلى الجزء الأول في هذه التمهيدية.

و أخيرا الجزء (3) يمكن إثباته بأخذ عنصر $a \in L(X)$ ومن ثـم باسـتخدام أسـلوب مماثل لإثبات الجزء الثاني في هذه التمهيدية نرى:

$$0*(0*a^n)=a \;\Rightarrow\; 0*(0*(0*a^n)) = 0*a$$

ومن النتيجة (2-2) أعلاه نجد أن: $0*(0*(0*a^n)) = 0*a^n$ وعليه:

$$0*a^n = 0*a \;\Rightarrow\; (0*a)*a^{n-1} = 0*a$$

ومنه نستنتج: $((0*a)*a^{n-1})*(0*a) = 0$ وباستخدام الخاصة (3) في (1-3) يتضح أن:

$$((0*a)*(0*a))*a^{n-1}=0$$

أي: $0*a^{n-1} = 0$.

يمكن كتابة المساواة الأخيرة بالشكل: $(0*a^{n-2})*a = 0$ والاستفادة من الجزء (2) في هذه التمهيدية ذاتها نجد أن a بحد ذاته ذرة إذاً: $0*a^{n-2} = a$.

وبهذا يتم إثبات التمهيدية.

2- 4- مثال **:** لتكن **$X = \{0, a, b, c\}$** و $*$ معرفة بالجدول الآتي:

$*$	**0**	**a**	**b**	**c**
0	0	0	c	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	c	0	0

إن X جبر- BCI انظر [3] ويمكن التأكد من ذلك مباشرة من الجدول، ولنلاحظ هنـا أن السطر الأول هو عبارة عن المجموعة $0*X$ أو T_0 أي مجموعة ذرات X كمـا ورد في الجزء (1) من التمهيدية (2-3)، وأن الأسـطر الثـاني و الثالـث والرابـع هـي المجموعات T_a , T_b , T_c على الترتيب، إن هذه المجموعات كما هو واضح من الجدول تحوي المجموعة T_0 وهو ما تم إثباته في الجزء (2) من التمهيديـة (2-1)، وكتطبيـق للجزأين الأول والرابع من هذه التمهيدية نأخذ عنصراً ما من عناصر السطر الثالث مثل a إن السطر الثاني أي T_a محتوى في السطر الثالث أي في T_b.

ننتقل الآن إلى برهان متطابقة تُعد تعميماً للمتطابقة الواردة في التمهيدية (1-9).

2- 5- مبرهنة:

ليكن X جبر- BCI و a من X و n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2 عندئذ:

$$(\forall x\in X)\; 0*a^{n-2} = a \Rightarrow a*(a*x^n) = a*(a*x)^n$$

البرهان:

قبل كل شي بتطبيق الخاصة (3) الواردة في التمهيدية (1-3) عدد n من المرات ثم الاستفادة من النتيجة (2- 2) يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(a*(a*x)^n)*(a*(a*x^n)) &= (a*x^n)*(a*x)^n\\ &= (((a*x)*x^{n-1})*(a*x))*(a*x)^{n-1}\\ &= (((a*x)*(a*x))*x^{n-1})*(a*x)^{n-1}\\ &= (0*x^{n-1})*(a*x)^{n-1}\\ &= (0*(a*x)^{n-1})*x^{n-1}\end{aligned}$$

وبالرجوع إلى الجزء(2) من التمهيدية (1-9) يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned}(a*(a*x)^n)*(a*(a*x^n)) &= ((0*a^{n-1})*(0*x^{n-1}))*x^{n-1}\\ &= ((0*a^{n-1})*x^{n-1})*(0*x^{n-1})\\ &= ((0*x^{n-1})*a^{n-1})*(0*x^{n-1})\\ &= ((0*x^{n-1})*(0*x^{n-1}))*a^{n-1}\\ &= 0*a^{n-1}\end{aligned}$$

ولما كان $0*a^{n-2} = a$ اتضح أن $0*a^{n-1} = (0*a^{n-2})*a = a*a = 0$ ومنه إذاً:

$$(a*(a*x)^n)*(a*(a*x^n)) = 0$$

من جهة أخرى لدينا فرض $0*a^{n-2} = a$ وسنبين استناداً إلى ذلك أن a ذرة.

في الواقع نميز حالتين:

الحالة 1 : فيها $n = 2$ وعندئذ $a = 0$ ومن ثم a ذرة

الحالة 2 : فيها $n > 2$ وفي هذه الحالة فإن $(0*a)*a^{n-3} = a$ كما أن العنصر $0*a$ ذرة استناداً إلى الجزء (1) في (2-3) يتضح من ذلك أن a ذرة وذلك وفقاً للجزء (1) من التمهيدية (1-8)، $a*(a*x^n)$ ذرة ونظراً لأن:

$$(a*(a*x)^n)*(a*(a*x^n)) = 0$$

فإن: $a*(a*x)^n = a*(a*x^n)$.

سؤال مفتوح:

ونتساءل هل عكس المبرهنة السابقة صحيح؟ في الحقيقة لم نجد حتى هذه اللحظة جواباً شافياً عن هذا التساؤل، الجواب يكون شافياً إذا:

أ- تم البرهان نظرياً على صحة العكس أو عدم صحته.

ب-إعطاء مثال يظهر أن العكس غير صحيح من أجل قيمة ما لـ n

بدمج المبرهنة السابقة والجزء (3) من التمهيدية (2-3) نحصل على النتيجة الآتية:

2-6- نتيجة:

$$a\in L_n(X) \Rightarrow a*(a*x)^n = a*(a*x^n)$$

2- 7- مبرهنة:

ليكن X جبر-BCI، إذا كان a ذرة في X عندئذ القضايا الآتية محققة:

1) $(a*(x*y)^n)*a = (a*x^n)*(a*y^n)$

2) $a*(x*y)^n = ((a*x^n)*(a*y^n))*(0*a)$

وذلك مهما يكن y, x من X وحيث n أي عدد صحيح موجب.

البرهان:

(1) ليكن y, x من X . لدينا من الجزء (2) التمهيدية (1-9):

$$0*(x*y)^n = (0*x^n)*(0*y^n)$$

ومن الشرط (1) في التعريف **(1-1)** نستنتج:

$$(a*a)*(x*y)^n = ((a*a)*x^n)*((a*a)*y^n)$$

ووفقاً للتمهيدية (1-3) لدينا:

$$(a*(x*y)^n)* a = ((a*x^n)*a)*((a*y^n)*a)$$

وحسب (7) من التمهيدية (1-3):

$$(a*(x*y)^n)*a \le (a*x^n)*(a*y^n)$$

لكن $(a*x^n)*(a*y^n)$ ذرة، وذلك استناداً إلى التمهيدية(1-8) ومن ثم:

$$(a*(x*y)^n)*a = (a*x^n)*(a*y^n)$$

لإثبات صحة المتطابقة الثانية لدينا من المتطابقة الأولى :

$$((a*(x*y)^n)*a)*(0*a) = ((a*x^n)*(a*y^n))*(0*a)$$

الآن من الجزء (7) في التمهيدية (1-3) نجد:

$$((a*(x*y)^n)*a)*(0*a) \le (a*(x*y)^n)*0 = a*(x*y)^n$$

ونظراً لأن العنصر a ذرة نجد من الجزء (1) في التمهيدية (1-8) أن $a*(x*y)^n$ ذرة إذاً:

$$((a*(x*y)^n)*a)*(0*a) = a*(x*y)^n$$

ومن ثم:

$$a*(x*y)^n = ((a*x^n)*(a*y^n))*(0*a)$$

2- 8- مثال:

لتكن $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ولنعرف العملية الثنائية $*$ بالجدول الآتي:

*	0	1	2	3	4
0	0	0	4	4	2
1	1	0	4	4	2
2	2	2	0	0	4
3	3	2	1	0	4
4	4	4	2	2	0

إن $(X, *, 0)$ جبر-BCI، انظر [2] ويمكن إثبات ذلك بالحساب المباشر، وكتطبيق للمبرهنة(2-5) لدينا: $0*2^2 = 2$ إذاً $n-2= 2$ ومنه $n = 4$، إذاً من أجل أي عنصر $x\in X$ لدينا المساواة الآتية:

$$2*(2*x^4) = 2*(2*x)^4$$

وكتطبيق للمبرهنة (2-7) نأخذ العنصر 4 وهو ذرة لأنه من عناصر السطر الأول، باعتبار أن عناصر السطر الأول هي ذرات X كما أوضحنا ذلك في المثال (2-4) إذاً لدينا المتطابقتان الآتيتان:

$$(4*(x*y)^n)*4 = (4*x^n)*(4*y^n)$$

$$4*(x*y)^n = ((4*x^n)*(4*y^n))*(0*4)$$

وذلك مهما يكن العنصران y, x من X ومهما يكن العدد الصحيح الموجب n .

2- 9- تمهيدية:

ليكن X جبر-BCI, في كل صف تكافؤ لعلاقة التكافؤ ~ توجد ذرة واحدة وذرة واحدة فقط هي $0*(0*e)$ حيث $e\in X$ ممثل لصف التكافؤ.

البرهان:

ليكن X جبر-BCI، وليكن e ممثلاً لصف التكافؤ [e] نعلم من الخاصة (2) في التمهيدية (3-1) أن:

$0*(0*(0*e)) = 0*e$ ومن ثم $0*(0*e) \in [e]$ كما أن $0*(0*e)$ ذرة استناداً إلى الجزء (1) في التمهيدية (3-2).

كذلك إذا كانت a ذرة في X وكان $a \in [e]$ فعندئذ:

$$0*a = 0*e \Rightarrow 0*(0*a) = 0*(0*e)$$

ومن ثم:

$$0*(0*a) = a$$

إذاً:

$$0*(0*e) = a$$

نقدم فيما يأتي مبرهنة تبين بعض الحالات التي تتحقق فيها الخاصة التوزيعية بالنسبة للعملية * .

2- 10- مبرهنة:

لنفرض أن X جبر- BCI، و e عنصراً من X صف تكافؤه منتهٍ فإن القضايا الآتيـة صحيحة:

1) x^e ذرة $(\forall x \in X)$

2) $(x*y)^e = (x^e*y^e)*e \ (\forall x, y \in X)$

3) $(x'*y')*e = ((x'*e)*(y'*e))*e \ (\forall x, y \in X)$

البرهان:

برهان الجزء (1): لنفرض أن $y*x^e = 0 , y \in X$ ولنبرهن أن $y = x^e$.

في الواقع نظراً لأن: $y*x^e = 0$ ينتج $0 = 0*0 = 0*(y*x^e)$ ومنه بتطبيق التمهيديـة (1-3) يتضح أن: $0*x^e = 0*y$ ومن ثم: $(0*x^e)*(0*y) = 0$ نرمز لهذه المساواة بـ (*) .

من جهة أخرى لدينا:

$$0*x^e = 0*((\ldots.(x*e_1)e_2)*\ldots..)*e_n)*(0*e^{n-1}))$$

بالاستفادة من الخاصة (4) من التمهيدية (1-3) أكثر من مرة نجد:

$$0*x^e = (\ldots((0*x)*(0*e_1))*(0*e_2))*\ldots..)*(0*e_n))*(0*(0*e^{n-1}))$$

ونظراً لأن $[e] = \{e_1,e_2,\ldots.,e_n\}$ إذاً:

$$0*x^e = (\ldots.(0*x)*(0*e))*(0*e))\ldots)*(0*e))*(0*(0*e^{n-1}))$$
$$= (\ldots.(0*x)*(0*e)^n))*(0*(0*e^{n-1}))$$

واستناداً إلى الخاصة (3) في التمهيدية (1-3) نجد:

$$0*x^e = ((0*(0*e)^n)*(0*(0*e^{n-1})))*x$$

الآن من الجزء (1) التمهيدية (1-9) وبالرجوع للتمهيدية (1-3) نستنتج:

$$0*(0*e)^n = 0*(0*e^n)$$
$$= 0*((0*e^{n-1})*e)$$
$$= (0*(0*e^{n-1}))*(0*e)$$

نستنتج مما ورد أعلاه ما يأتي:

$$0*x^e = (((0*(0*e^{n-1}))*(0*e))*(0*(0*e^{n-1})))*x$$
$$= (((0*(0*e^{n-1}))*(0*(0*e^{n-1})))*(0*e))*x$$
$$= (0*(0*e))*x$$
$$= (0*x)*(0*e)$$
$$= 0*(x*e)$$

أي $0*x^e = 0*(x*e)$.

وبالعودة إلى العلاقة (*) الواردة أعلاه نجد :

$$(0 * (x * e)) * (0 * y) = 0 \Rightarrow 0 * ((x*e)*y) = 0$$

ووفقاً للتمهيدية (1-3) نستنتج أن : $0*((x * y) * e) = 0$ ومن ثم:

$$0* (x *y) = 0 * e$$

إذاً $x*y \in [e]$ وعليه هناك $j\in \{1, 2, \ldots, n\}$ بحيث $x * y = e_j$.

سنبين الآن أن $x^e \le y$ ، أو أن $x^e*y = 0$, يلاحظ أن:

$$x^e * y = (\ldots(x * e_1) * e_2) * \ldots.) * e_n) * (0 * e^{n-1})) * y$$

ومن (3) في التمهيدية (1-3):

$$= (\ldots (x * y) * e_1) * e_2)*\ldots)*e_n)*(0*e^{n-1})$$
$$= (\ldots(e_j * e_1)*e_2)*\ldots.)*e_j)*\ldots)*e_n)*(0*e^{n-1})$$
$$= (\ldots(e_j * e_j) * e_1) * e_2)*..)*e_{j-1}) *e_{j+1}\ldots)*e_n) * (0 * e^n)$$
$$= (\ldots(0 * e_1) * e_2)*\ldots)*e_{j-1})*e_{j+1})*\ldots)*e_n)*(0 * e^{n-1})$$

ونظراً لأن $[e] = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ إذاً وبشكل مماثل للأسلوب المتبع أعلاه نجد:

$$x^e * y = (0 * e^{n-1})) * (0 * e^{n-1}) = 0 \Rightarrow x^e * y = 0 \Rightarrow x^e \le y$$

إذاً لدينا $y \le x^e$ كما لدينا فرض $x^e \le y$ ومن ثم $x^e = y$ إذاً x^e ذرة في x.

برهان (2): وجدنا في الجزء الأول أن x^e, y^e ذرتان في X إذاً حسب (1) التمهيديـة (8-1) يكون $x^e * y^e$ ذرة ومن ثم $(x^e * y^e) * e$ ذرة, علاوة على ذلك $(x * y)^e$ ذرة.

سنبين الآن أن $(x * y)^e$, $(x^e * y^e) * e$ ينتميان إلى صف تكافؤ واحد ومن ثم حـسب التمهيدية (9-2) يكون العنصران متساويين.

في الواقع استناداً إلى التمهيدية (3-1) :

$$0*((x^e * y^e) * e) = (0 * (x^e * y^e)) * (0 * e)$$
$$= ((0 * x^e) * (0 * y^e))*(0 * e)$$

وباستخدام المساواة $0 * x^e = 0 * (x * e)$ الواردة في الجزء السابق نجد:

$$0* ((x^e * y^e) * e) = ((0 * (x * e)) * (0 * (y * e)) * (0 * e)$$
$$= (0 * ((x * e) * (y * e))) * (0 * e)$$

ومن التمهيدية (3-1) يكون لدينا:

$$((x * e) * (y * e)) \le (x * y)$$
$$\Rightarrow ((x * e) * (y * e)) * (x * y) = 0$$
$$\Rightarrow 0 * (((x * e) * (y * e)) * (x * y)) = 0$$

وكذلك:

$$0* ((x * e) * (y * e)) = 0 * (x * y)$$

وعليه يلاحظ أخيراً:

$$0* ((x^e * y^e) * e) = (0 * (x * y)) * (0 * e)$$
$$= 0 * ((x * y) * e)$$
$$= 0 * (x * y)^e$$

ومن ثم $(x * y)^e$, $(x^e * y^e) * e$ ينتميان لصف تكافؤ واحد ونظراً لأن كلاً منهمـا ذرة فإن:

$$(x^e * y^e) * e = (x * y)^e$$

وأخيراً لبرهان الجزء (3) من الواضح أن:

$$(x*y)^e = (x*y)' * e \ , \ y^e = y' * e \ , \ x^e = x' * e$$

ووفقاً للجزء الثاني من التمهيدية:

$$((x' * e) * (y' * e)) * e = (x * y)' * e$$

ولإتمام المطلوب علينا إثبات ما يأتي:

$$(x * y)' * e = (x' * y') * e$$

من السهل أن نرى أن $y' * y = 0$ ومن ثم: $y' \leq y$ ومن جهة ثانية يلاحظ وفقا للتمهيدية (1-3) أن:

$$x' * y \leq x' * y' \Rightarrow (x' * y) * e \leq (x' * y')* e$$
$$= (x' * e) * y'$$
$$= x^e * y'$$

ولما كان x^e ذرة واستناداً إلى الجزء (1) في التمهيدية (1-8) نجد أن $x^e * y'$ ذرة ومن ثم:

$$(x' * y) * e = x^e * y' \Rightarrow (x' * y) * e = (x' * y') * e$$

ولما كان من الواضح وفقاً للجزء (3) من التمهيدية (1-3) فإن:

$$(x'*y)*e = (x*y)'*e$$

نستنتج مباشرةً أن:

$$(x*y)'*e = (x' * y') * e$$

وعليه فإن:

$$((x'*e)*(y'*e))*e = (x'*y')*e$$

لدينا الآن نتيجة تبين تحقق الخاصة التوزيعية في حالات خاصة.

ملاحظة:

إذا فرضنا في النظرية السابقة $0*e = 0$ نحصل على:

$$(x'*y')*e = (x'*e)*(y'*e)$$

البرهان:

رأينا في برهان المبرهنة السابقة أن $x^e = x'{*}e$ إذاً هذا العنصر ذرة في X ومـن ثـم العنصر $(x'{*}e){*}(y'{*}e)$ ذرة استناداً إلى الخاصة (1) من التمهيديـة (1-8) وباسـتخدام الفرض نجد:

$$(((x'{*}e){*}(y'{*}e)){*}((x'{*}e){*}(y'{*}e))){*}e = 0$$

$$\Rightarrow (((x'{*}e){*}(y'{*}e){*}e){*}((x'{*}e){*}(y'{*}e)) = 0$$

$$\Rightarrow ((x'{*}e){*}(y'{*}e)){*}e \le (x'{*}e){*}(y'{*}e)$$

ونظراً لأن العنصر $(x'{*}e){*}(y'{*}e)$ ذرة إذاً:

$$((x'{*}e){*}(y'{*}e)){*}e = (x'{*}e){*}(y'{*}e)$$

ونستنتج أخيراً ووفقاً للجزء (3) في المبرهنة السابقة أن:

$$(x'{*}y'){*}e = (x'{*}e){*}(y'{*}e)$$

2- 11- مثال:

لتكن $X= \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ولنعرف العملية الثنائية * وفق الجدول الآتي:

*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	3	3
1	1	0	0	3	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0

إن $(X, *, 0)$ جبر-BCI انظر [2] أو يمكن التأكد من ذلك بالحساب المباشر. لنطبـق المبرهنة (2-10) من أجل $e = 2$.

من الواضح أن صف تكافؤ 2 هو المجموعة $\{0, 1, 2\}$ ومن ثم فإن العنصر:

$$x^e = (((x * 0) * 1) * 2) * (0 * 2^{3-1})$$

$$= (((x * 1) * 2) * (0 * 2^2)$$

$$= ((x * 1) * 2) * 0$$

$$= (x * 1) * 2$$

ذرة مهما يكن $x\in X$ ، مثلاً بأخذ $x = 4$ نجد أن:

$$4^e = (4 * 1) * 2$$

$$= 4 * 2$$

$$= 3$$

لنأخذ الآن $x, y \in X$ لدينا المساواة الآتية:

$$(x*y)^e = (x^e*y^e)*e \ (\forall \ x, y \in X)$$

أو استناداً إلى ما وجدناه أعلاه نرى أن:

$$((x * y) * 1) * 2 = ((((x * 1) * 2)*((y * 1) * 2)))*2$$

بالنسبة للجزء الأخير من المبرهنة (2-10) لدينا $0 * 2 = 0$ وليكن $x, y \in X$:

$$x' = x * 1, y' = y * 1$$

إذاً وبحسب الملاحظة الأخيرة:

$$(x'*y')*2 = (x'*2)*(y'*2)$$

إن هذه العلاقة صحيحة من أجل العناصر من الشكل $x' = x * 1, y' = y * 1$
أي جميع عناصر العمود الثاني، الواقع تحت العنصر 1 في الجدول.

نتائـــج عامـــة

1- المطابقة $0*x^n = 0*(0*(0*x^n))$ الواردة في [7] تبقى صحيحة إذا استبدلنا العنصر 0 بأي عنصر a من X .

2- المطابقة $0*(0*x)^n = 0*(0*x^n)$ تبقى صحيحة إذا استبدلنا العنصر 0 بذرة a تحقق الشرط $a = 0*a^{n-2}$، ونلاحظ هنا أن العدد n ليس كيفياً وأنه يتعلق بالعنصر a.

3- المطابقة $0*(x*y)^n = (0*x^n)*(0*y^n)$ تتأخذ أحد الشكلين:

$$(a*(x*y)^n)*a = (a*x^n)*(a*y^n)$$

$$a*(x*y)^n = ((a*x^n)*(a*y^n))*(0*a)$$

حيث يكفي لذلك أن يكون العنصر a ذرة في X، وتكون المساواة محققة مهما يكـن العدد الموجب n.

4- تم إثبات أن العنصر x^e ذرة, كما أمكن تحقيق الخاصة التوزيعيـة فـي حـالات خاصة.

REFERENCES

1- Dudek, W. A. (1988). on the axioms system for BCI- algebras, prace Nauk. Wsp cyestochows, Mathematyka 2.

2- Dudek, W. A. (1997). A computer method of computation of BCK and BCI- Algebras of small orders, Novi Sad, pp. 41-64.

3- Huang, W. (2002). Ideals and subalgebras in BCI- algebras, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 26: 567-573.

4- Huang, W. (1992). Nil-radical in BCI-algebras, Math-Japonica 37, No.2: 363-366.

5- Iseki, K. (1980). on BCI- algebras, Math. Sem.Notes 8, 125-130.

6- Meng, J., and Xin, X. L. (1992). Characterizations of atoms in BCI-algebras, Math. Japon. 37, 359-361.

7- Sun, D., and Huang, W. (1999). On Torsion part in BCI- algebras, Math. Japonica 50, No. 1, 115-119.