إثبات مبسط لمسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية

محمد سعود الكوسى و محمد الشيخ
قسم الرياضيات ــ كلية العلوم ــ جامعة دمشق ــ سورية

تاريــخ الإيداع 2009/08/11
قبل للنشر في 2010/03/30

الملخص

إن مسألة العكس المطروحة في نظرية الدوال (التوابع) الناقصية تنص على أنه إذا كان $m \in \mathrm{C} \setminus \{0,1\}$ عدداً مُعطى، عندئذ فإنه يوجد[1] $\tau \in \mathrm{H}$ ، بحيث[2] $k^2(\tau) = m$.

ولهذه المسألة أهمية كبيرة في العديد من المسائل والتطبيقات في الرياضيات، التي تدخل في دراستها الدوال الناقصية.

وقد قُدّمت لهذه المسألة عدة إثباتات في مراجع عدة، إلا أنها كانت طويلة وتعتمد على عدة مفاهيم، ليست بسيطة، في التحليل العقدي مثل التمديد التحليلي وسطوح ريمان.

سنقدم في هذه المقالة إثباتاً بسيطاً لهذه المسألة عندما $m \in \mathrm{C} \setminus \left\{0,1,2,\frac{1}{2}\right\}$ ، دون التعرض لأي من المفاهيم السابقة.

الكلمات المفتاحية: الدوال الناقصية، دوال جاكوبي الناقصية، دالة وايرشتراوس الناقصية، الدوال ثيتا، التكاملات الناقصية، الدالة الناقصية المعيارية، سلسلة Eisenstein.

رقم التصنيف الرياضياتي العالمي : 33E05

(1) $\mathrm{H} = \{z \in \mathrm{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

(2) $k^2(\tau) = k^2$ **هو مقاس التكاملات الناقصية.**

A Simple Proof of The Inversion Problem in Elliptic Functions Theory

M. S. Alkousa and M. Alcheikh
Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria

Received 11/08/2009
Accepted 30/03/2010

ABSTRACT

The inversion problem in elliptic functions theory is:

If $m \in \mathrm{C} \setminus \{0,1\}$ is given number, then there exist[(1)] $\tau \in \mathrm{H}$, such that[(2)], $k^2(\tau) = m$

This problem is very important for many problems and applications in mathematics, which elliptic functions occur in their study.

There are many proofs for this problem in many references, but the proofs are very long and depend on many non simple notions in complex analysis, for example analytic continuation and Riemann surfaces.

In this paper we will introduce a simple proof for this problem, when $m \in \mathrm{C} \setminus \left\{0,1,2,\frac{1}{2}\right\}$, without depending on any previous notions.

Key words: Elliptic functions, Jacobi elliptic functions, Weierstrass elliptic function, Theta functions, Elliptic integrals, Elliptic modular functions, Eisenstien series.

Mathematics Subject Classification. 33E05

(1) $\mathrm{H} = \{z \in \mathrm{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$

(2) the modulus of elliptic integrals $k^2(\tau) = k^2$

المقدمة

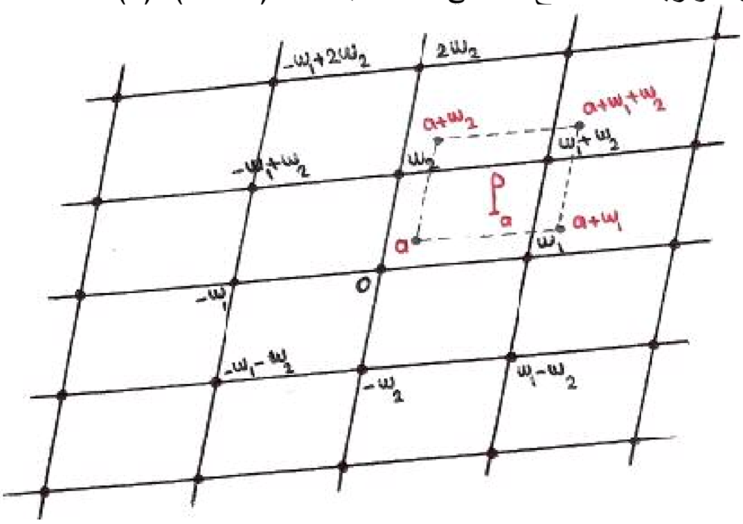
تُعرّف الدالة الناقصية f، بأنها دالة ميرومورفية في C، وحيــدة القيمــة، مزدوجــة الدورية doubly periodic.

ويُقال عن الدالة الدورية f، إنها مزدوجة الدورية إذا كان كل دور من أدوارها لــه الشكل $mw_1 + nw_2$.

إذ: $m,n \in \mathbf{Z}$ و w_1, w_2 أعداد عقدية تحقق $\frac{w_2}{w_1} \notin R$.

وتدعى المجموعة $\Lambda = \left\{ w = mw_1 + nw_2 : m,n \in \mathbf{Z}, \frac{w_2}{w_1} \notin R \right\}$ التي تحوي كــل أدوار الدالة f بشبكة الدور period lattice، المولدة بـ w_1, w_2.

وبذلك سنحصل على شبكة من متوازيات الأضلاع تغطــي المــستوي المركــب C، ورؤوس متوازيات الأضلاع هذه هي نقاط الشبكة Λ، (الشكل1)، (2).



الشكل (1)

إذا كانت a نقطة بحيث لا يوجد أي قطب للدالة الناقصية f علــى محــيط متــوازي الأضلاع الذي رؤوسه $a, a+w_1, a+w_1+w_2, a+w_2$، فإننا ندعو متوازي الأضلاع السابق مع الساحة التي يحيط بها، خلية cell، ونرمز لها بـ P_a، (الشكل1).

ويكفي لدراسة سلوك الدالة الناقصية f، دراسة سلوكها في خلية واحدة مثل P_a (11).

ويُبرهن أن عدد الأقطاب والأصفار للدالة الناقصية f في الخلية P_a هو عددٌ منتـــهٍ. (2، 11).

وأن مجموع الرواسب للدالة الناقصية عند الأقطاب الموجودة داخل الخلية P_a يساوي الصفر (2).

ومن ثم فإن مرتبة[1] الدالة الناقصية يجب أن تكون أكبر أو تساوي 2 (2).

والدوال الناقصية التي مرتبتها تساوي2، إما أن يكون لها قطبان بسيطان والراســـبان عند هذين القطبين مختلفان بالإشارة فقط، وهذه الدوال تسمى دوال جـــاكوبي الناقــصية $sn(z),cn(z),dn(z),....$، أو أن يكون لها قطب مضاعف والراسب عند هذا القطب يساوي الصفر، وتسمى هذه الدالة بدالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ (2).

وقد حازت نظرية الدوال الناقصية في القرن التاسع عشر والعـــشرين علـــى الجـــزء الأكثر اهتماماً في التحليل العقدي نظراً إلى أهميتها وتطبيقاتها الواسعة في فروع مختلفـــة من الرياضيات مثل الجبر ونظرية الأعداد والميكانيك والإحصاء ونظرية التقريبات، وفي العشرين سنة الأخيرة أدّت هذه الدوال دوراً مهماً في التبولوجيا (2).

كما أن لها تطبيقات في الهندسة الكيميائية chemical engineering، وفي ميكانيـــك الكم quantum mechanics، وميكانيك السوائل fluid mechanics،.... (9).

دالة وايرشتراوس الناقصية:

لتكن $\Lambda=\left\{w=mw_1+nw_2:m,n\in\mathbf{Z},\frac{w_2}{w_1}\notin\mathrm{R}\right\}$. تعرّف دالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ بالشكل:

$$\wp(z,\Lambda)=\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Lambda'}\left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

إذ $\Lambda'=\Lambda\setminus\{0\}$.

وقد قدّم وايرشتراوس دالته هذه في عام 1862 [9]، وهي دالة ناقصية بـــالأدوار w_1 و w_2، زوجية، من المرتبة الثانية، أقطابها من الدرجة الثانية في Λ، (5).

وكذلك مشتقها $\wp'(z)=\frac{d}{dz}\wp(z)$ هو دالة ناقصية بـــالأدوار w_1 و w_2، فرديـــة، أقطابها من المرتبة الثالثة عند نقاط Λ (2، 8).

[1] تعرّف مرتبة الدالة الناقصية بأنها عدد الأقطاب الموجودة داخل الخلية P_a، مع مراعاة تكرار الأقطاب المضاعفة.

والدالة $\wp(z)$ تحقق المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$ (2، 8، 10).

إذ إن $g_2 = 60S_4$ و $g_3 = 140S_6$. وتـــدعى بـــاللامتغيرات invariants لدالـــة وايرشتراوس الناقصية.

و $S_m = \sum_{w \in \Lambda'} \frac{1}{w^m}$، وهذه المتسلسلة متقاربة إطلاقاً عندما $m \geq 3$ (8) وتدعى سلسة Eisenstein من المرتبة m، وعندما يكون m فردياً فإن $S_m = 0$ (10).

تعريف 1:

لـــتكن $\Lambda = \left\{ w = mw_1 + nw_2 : m, n \in \mathbf{Z}, \frac{w_2}{w_1} \notin \mathrm{R} \right\}$ شـــبكة دور لدالـــة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ وليكن $w_3 = -w_1 - w_2$ و لنعرف:

$$e_1 := \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), e_2 := \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), e_3 := \wp\left(\frac{w_3}{2}\right)$$

إن الأعداد e_1, e_2, e_3 مختلفة مثنى مثنى (10)، وتحقق المـــساواة $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

كما أن $e_1 e_2 e_3 = \frac{g_3}{4}$, $e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = -\frac{g_2}{4}$ (2، 10).

ويبَرهن أن:

* .... $\wp'^2(z) = 4\left(\wp(z) - e_1\right)\left(\wp(z) - e_2\right)\left(\wp(z) - e_3\right)$ (2).

تعريف 2:

تعرّف الدالة $\lambda(\tau)$ على $\mathrm{H} = \{z \in \mathrm{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$، التي تدعى بالدالة الناقـــصية المعيارية، بالمساواة:

$$\lambda(\tau) := \left(\frac{\theta_2(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}\right)^4$$

ويُبرهن أن: $\lambda(\tau) = k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$، إذ k^2 هو مقياس التكاملات الناقصية (1، 2).

وتعرّف التكاملات الناقصية بأنها التكاملات التي لها الشكل $\int R\left[z,\sqrt{P(z)}\right]dz$ إذ إن $P(z)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة، والمعادلة $P(z)=0$ ليس لها جذور مضاعفة، و R دالة كسرية بـ z و $\sqrt{P(z)}$ (2).

والدوال:

$$\theta_4(z)=\theta_4\left(z\mid\tau\right):=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2niz}\ ;\ q=e^{\pi i\tau}$$

$$\theta_1(z)=\theta_1\left(z\mid\tau\right):=-iq^{1/4}e^{iz}\theta_4\left(z+\frac{\pi\tau}{2}\right)$$

$$\theta_2(z)=\theta_2\left(z\mid\tau\right):=\theta_1\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_3(z)=\theta_3\left(z\mid\tau\right):=\theta_4\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$$

هي الدوال ثيتا[1]، وهي دوال صحيحة، ولها دور أساسي في دراسة الدوال الناقصية (2، 11)، ولها تطبيقات مهمة جداً في نظرية الأعداد (4، 7).

مسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية:

إذا كان $\tau\in\mathrm{H}$ عدداً معلوماً و كان $k^2(\tau)=\dfrac{\theta_2^4\left(0\mid\tau\right)}{\theta_3^4\left(0\mid\tau\right)}\in\mathrm{C}\setminus\{0,1\}$، فإن حل المعادلة التفاضلية:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=\left(1-y^2\right)\left(1-k^2y^2\right)\ ....(1)$$

هو $y=sn(z,k)$. (دالة جاكوبي الناقصية).

إلا أنه في العديد من المسائل والتطبيقات في الرياضيات التي تدخل في دراستها الدوال الناقصية، يتطلب إيجاد حل للمعادلة **(1)** (أي إيجاد $y=sn(z,k)$) في الحالة التي تكون فيها k مُعطاة ولا نعلم أي شيء عن τ (2، 3، 11).

من أجل ذلك لا بد من إثبات مسألة وجود عدد $\tau\in\mathrm{H}$ بحيث يكون للمعادلة:

---

[1] من أجل الترميزات للدوال ثيتا، فإنه إذا كانت هناك حاجة لإظهار τ نكتب $\theta_j\left(z\mid\tau\right)$، و إذا كانت هناك حاجة لإظهار الوسيط q نكتب $\theta_j\left(z,q\right)$، واختصاراً نكتب $\theta_j(z)$ إذ $j=1,2,3,4$. وعندما $z=0$ فإننا نكتب $\theta_l=\theta_l\left(0\mid\tau\right)$ لأجل $l=2,3,4$.

$$m = k^2(\tau) = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)}.................(2)$$

حل، إذ إن $m \in \mathrm{C} \setminus \{0,1\}$. التي تدعى بمسألة العكس.

وفي حال أثبتنا وجود τ كحل للمعادلة (2) فإنه يمكننا بناء الدالة $sn(z,k)$ بدلالة الدوال ثيتا بالشكل:

$sn(z,k) = k^{-1/2} \dfrac{\theta_1\left(\theta_3^{-2}z \,|\, \tau\right)}{\theta_4\left(\theta_3^{-2}z \,|\, \tau\right)}$، بوصفه حلاً للمعادلة التفاضلية **(1)** (2، 11).

وصعوبة المسألة تكمن في إثبات أنه إذا كان لدينا $m \in \mathrm{C} \setminus \{0,1\}$ فإنه يوجد $\tau \in \mathrm{H}$ بحيث تكون $m = k^2(\tau)$

مبرهنة (1) (مسألة العكس):

ليكن $m \in \mathrm{C} \setminus \{0,1\}$ عدداً مُعطى، عندئذٍ فإنه يوجد $\tau \in \mathrm{H}$، بحيث تكون $k^2(\tau) = m$.

تم التعرض لإثبات هذه المبرهنة في مراجع عدة من أهمها [2] و[6]، إلا أن هذه الإثباتات كانت طويلة وتبدأ بحالة خاصة عندما $0 < m < 1$ ومن أجل $m \in \mathrm{C} \setminus \{]-\infty,0] \cup [1,\infty[\}$ فإن الإثبات يتم بالاعتماد على مفاهيم أخرى في التحليل العقدي مثل مفهوم التمديد التحليلي analytic continuation، وبعدها تتم دراسة الحالتين $m \in]-\infty,0[$ و $m \in]1,\infty[$، كلّ على حِدة.

وفي المرجع [6] اِستُخدمت سطوح ريمان Riemann surfaces من أجل إثبات المطلوب.

وسوف نقوم بتقديم إثبات مبسّط لهذه المبرهنة من أجل $m \in \mathrm{C} \setminus \left\{0,1,2,\frac{1}{2}\right\}$، وذلك بالاستفادة من المبرهنة التالية الوارد إثباتها في المرجع [10]، علماً أن إثباتها بسيط ولا يعتمد على المفاهيم الوارد ذكرها أعلاه.

مبرهنة (2):

إذا كان a_2 و a_3 عددين عقديين بحيث $(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \neq 0$. عندئذٍ يوجد w_1 و w_2 من C بحيث $\frac{w_2}{w_1}$ ليس عدداً حقيقياً، وبحيث يكون لدالة وايرشتراوس الناقصية اللامتغيرات $g_2(w_1,w_2) = a_2 , g_3(w_1,w_2) = a_3$.

ملاحظة: نشير أولاً إلى أنه في سياق إثبات المبرهنة (2) (10) نجد أن: $\operatorname{Im}\left(w_2/w_1\right) > 0$.

إثبات المبرهنة (1):

لتكن $m \in \mathrm{C} \setminus \left\{0,1,2,\frac{1}{2}\right\}$ ولتكن b_1,b_2,b_3 أعداداً عقدية منتمية إلى المجموعة $\left\{\frac{2-m}{3},\frac{-m-1}{3},\frac{2m-1}{3}\right\}$ بحيث $b_i \neq b_j$ مهما تكن $i \neq j$ و $i,j = 1,2,3$.

عندئذٍ فإن $b_i \neq 0$ $(\forall i = 1,2,3)$ و $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

بوضع $a_2 = -4(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)$ و $a_3 = 4b_1b_2b_3$، نجد أن $(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \neq 0$.

ومن ثم فإنه حسب المبرهنة (2) يوجد w_1 و w_2 من C بحيث $\operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) > 0$ وبحيث $g_2(w_1,w_2) = a_2$ و $g_3(w_1,w_2) = a_3$ و g_2 , g_3 هي لا متغيرات دالة وايرشتراوس الناقصية.

لنأخذ $\tau = \frac{w_2}{w_1}$. عندئذٍ τ هو العدد المطلوب إثبات وجوده، ولنبين ذلك.

وضوحاً $\tau \in \mathrm{H}$.

لدينا: $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$، أي أن:

$$
\begin{aligned}
\wp'^2(z) &= 4\wp^3(z) + 4(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)\wp(z) - 4b_1b_2b_3 \\
&= 4\wp^3(z) - 4(b_1 + b_2 + b_3)\wp^2(z) + 4(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)\wp(z) - 4b_1b_2b_3 \\
&= 4\left(\wp^3(z) - b_3\wp^2(z) - b_1\wp^2(z) + b_1b_3\wp(z) - b_2\wp^2(z) + b_2b_3\wp(z) + b_1b_2\wp(z) - b_1b_2b_3\right) \\
&= 4\left((\wp^2(z) - b_1\wp(z) - b_2\wp(z) + b_1b_2)(\wp(z) - b_3)\right) \\
&= 4\left(\wp(z) - b_1\right)\left(\wp(z) - b_2\right)\left(\wp(z) - b_3\right)
\end{aligned}
$$

ولـــدينا مـــن المرجـــع (2) $\wp'^2(z)=4\big(\wp(z)-e_1\big)\big(\wp(z)-e_2\big)\big(\wp(z)-e_3\big)$

(انظر * في التعريف1).

وبذلك سيكون لدينا الحالات الست الآتية:

(1) $e_1=b_1\ ,\ e_2=b_2\ ,\ e_3=b_3$

(2) $e_1=b_1\ ,\ e_2=b_3\ ,\ e_3=b_2$

(3) $e_1=b_2\ ,\ e_2=b_1\ ,\ e_3=b_3$

(4) $e_1=b_3\ ,\ e_2=b_1\ ,\ e_3=b_2$

(5) $e_1=b_2\ ,\ e_2=b_3\ ,\ e_3=b_1$

(6) $e_1=b_3\ ,\ e_2=b_2\ ,\ e_3=b_1$

ومن أجل كل حالة من الحالات الست السابقة نأخذ على الترتيب:

(1) $b_1=\frac{2-m}{3}\ ,\ b_2=\frac{-m-1}{3}\ ,\ b_3=\frac{2m-1}{3}$

(2) $b_1=\frac{2-m}{3}\ ,\ b_2=\frac{2m-1}{3}\ ,\ b_3=\frac{-m-1}{3}$

(3) $b_1=\frac{-m-1}{3}\ ,\ b_2=\frac{2-m}{3}\ ,\ b_3=\frac{2m-1}{3}$

(4) $b_1=\frac{-m-1}{3}\ ,\ b_2=\frac{2m-1}{3}\ ,\ b_3=\frac{2-m}{3}$

(5) $b_1=\frac{2m-1}{3}\ ,\ b_2=\frac{2-m}{3}\ ,\ b_3=\frac{-m-1}{3}$

(6) $b_1=\frac{2m-1}{3}\ ,\ b_2=\frac{-m-1}{3}\ ,\ b_3=\frac{2-m}{3}$

وفي الحالات السابقة جميعها يمكننا أن نكتب:

$$k^2(\tau)=\lambda(\tau)=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}=\frac{\left(\frac{2m-1}{3}\right)-\left(\frac{-m-1}{3}\right)}{\left(\frac{2-m}{3}\right)-\left(\frac{-m-1}{3}\right)}=m$$

وبذلك نجد أن $\tau=\frac{w_2}{w_1}$ يحقق المعادلة $k^2(\tau)=m$ و هو المطلوب .

REFERENCES

[1] Ahlfors, L. V., 1966, Complex Analysis, second edition, NewYork, McGraw-Hill
[2] Armitage, J. V. and Eberlein, W. F., 2006, Elliptic Functions, Cambridge University Press.
[3] Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, 1953, Higher Transcendental Functions , vol.2, McGraw-Hill
[4] Erdelyi, A. W. Magnus, F.Oberhettinger, F. G. Tricomi, 1955, Higher Transcendental Functions, vol.3, McGraw-Hill
[5] Freitg, E. and Busam, R., 2005, Complex Analysis, Springer-Verlag.
[6] Hancock, H., 1959, Lectures on the theory of Elliptic Functions, NewYork, Dover.
[7] Hardy, G. H. and Wright, E. M., 1979, An Introduction to The Theory of Numbers, fifth edition, Oxford, Oxford University Press.
[8] Markushevich, A.L., 1967, Theory of Functions of a Complex Variable, vol.3, Prentice-Hall, Inc.
[9] Robin K.S.Hankin, 2006, Introducing elliptic, an R Package for Elliptic and Modular Functions, Journal of Statistical Software, vol.15, Issue 7,1-22.
[10] Tom M.Apostol, 1989, Modular Function and Dirichlet Series in Number Theory, Springer –verlag.
[11] Whittaker, E. T. and waston, G.N., 1927, A Course of Modern Analysis, forth edition, Cambridge University Press.