Les spectres premiers des BCK-algèbres commutatives

Elie koudsi

Département de Mathématiques-Faculté des sciences-Université de Damas - Syrie

Received 28/09/2004
Accepted 13/06/2005

Résumé

Soit A une BCK-algèbre commutative possède la propriété suivante:
$(a \star b) \star b = a \star b; \quad \forall a, b \in A$. le plan de ce travail est le suivant
Nous intéressons d'abord de déduire que l'ensemble
Sym (A) des éléments symétriques de A est une algèbre de Boole.
Nous montrons que l'ensemble X_A = Spec (A) des idéaux premiers de A (« Spectre premier » de A) peut être muni d'une topologie booléenne dont les ouverts fermés sont des parties de la forme
$D(e) = \{ p \in X_A : e \not\in p\}$ avec $e \in$ Sym (A)
Nous montrons également que l'ensemble ordonné D_A des ouverts fermés est une algèbre de Boole isomorphe à l'algèbre de Boole Sym (A) .

Mots Clé: BCK- algèbres commutatives, algèbres de Boole, Espaces booléen Spectres premiers.

الطيوف الأولية لجبور– BCK – التبادلية

إيـاـي قـدسـي

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – الجمهورية العربية السورية

تاريـخ الإيداع 2004/09/28
قبل للنشـر في 2005/06/13

الملخـص

ليكن A جبراً – BCK – تبادلياً يحقق الخاصة الإضافية الآتية: $(a \star b) \star b = a \star b$.

نبين أولاً: في هذه الورقة العلمية أن مجموعة العناصر المتناظرة فيA والتي نرمز لها بـ Sym (A) تشكل جبر بول. ونقدم أيضاً المبرهنة الأساسية الآتية:

إن $X_A = \mathrm{Spec}\,(A)$ مجموعة المثاليات الأولية لـ A (« الطيف الأولي» لـ A) يشكل فضاء تبولوجيـاً بوليـاً، وتكـون المجموعـات المفتوحـة والمغلقـة فـي الفـضاء X_A مـن الـنمط $D(e) = \{ p \in X_A : e \notin p \}$، حيث $e \in \mathrm{Sym}(A)$. ونبرهن أخيراً على أن المجموعة المرتبـة D_A المكونة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في X_A تشكل جبر بول .

وإن التطبيق الذي يقرن بكل عنـصر $e \in \mathrm{Sym}(A)$ المجموعـة المفتوحـة والمغلقـة $D(e)$ هـو ايزومورفيرم بين جبري بول Sym (A) وD_A .

الكلمات المفتاحية: جبور BCK–التبادلية، جبور بول، فضاءات بوليه، طيوف أولية.

1.BCK-algèbres commutatives . Résultats préliminaires

1-1 Rappel Une BCK-algèbre commutative au sens de H.Yutani [7] est un ensemble A muni de deux éléments distingués notés 0 et 1 et une opération binéaire $\bigstar$ satisfaisant les conditions suivantes

1.) $a \bigstar a = 0$
2.) $a \bigstar 0 = a$
3.) $a \bigstar (a \bigstar b) = b \bigstar (b \bigstar a)$
4.) $(a \bigstar b) \bigstar c = (a \bigstar c) \bigstar b$; quelques soient a, b et c de A .

Nous rappelons les principales propriétés et pour une discussion détaillée de ce concept le lecteur pourra se referér aux [7] ou [6] .

1.2. Proposition. Soit A une BCK-algèbre commutative .
Les propriétés suivants sont vérifiés :

1. $a \bigstar b = 0$ et $b \bigstar a = 0$ entraînent $a = b$.
2. $0 \bigstar a = 0$
3. $(a \bigstar b) \bigstar a = 0$
4. $((a \bigstar b) \bigstar (a \bigstar c)) \bigstar (c \bigstar b) = 0$

Démonstration:
1- En effet , l'hypothèse implique immédiatement
$a \bigstar a = a \bigstar 0 = a \bigstar (a \bigstar b) = b \bigstar (b \bigstar a) = b \bigstar 0 = b$
2- Remarquons que $0 \bigstar a = (a \bigstar (a \bigstar 0)) \bigstar a =$
$(0 \bigstar (0 \bigstar a)) \bigstar a = (0 \bigstar a) \bigstar (0 \bigstar a) = 0$
3- C'est une conséquence directe de (2) car :
$(a \bigstar b) \bigstar a = (a \bigstar a) \bigstar b = 0 \bigstar b = 0$
4- En appliquant les conditions (3) et (4) successivement on trouve

$$\begin{aligned} ((a \bigstar b) \bigstar (a \bigstar c)) \bigstar (c \bigstar b) &= ((a \bigstar (a \bigstar c)) \bigstar b) \bigstar (c \bigstar b) \\ &= ((c \bigstar (c \bigstar a)) \bigstar b) \bigstar (c \bigstar b) \\ &= ((c \bigstar b) \bigstar (c \bigstar a)) \bigstar (c \bigstar b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit A une BCK-algèbre commutative . Nous allons définir une relation d' ordre comme suite : $a \leq b$ si et seulement si $a \bigstar b = 0$.
En effet, il est clair que cette relation est réflexive et antisymétrique
De plus , si $a \leq b$ et $b \leq c$ il vient en vertu de l' axiome (4) que
$a \bigstar c = ((a \bigstar c) \bigstar (a \bigstar b)) \bigstar (b \bigstar c) = 0$ et cela signifie que

$a \leq c$

1.3 Proposition. soit A une BCK–algèbre commutative, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $a \leq b$ entraine $a \star c \leq b \star c$ et $c \star b \leq c \star a$.
2. $a \star (a \star (a \star b)) = a \star b$; quelques soient a , b et c de A

Démonstration. Si $a \leq b$. D'après la propriété (4) de la proposition (1.2), on peut écrire :
$(a \star c) \star (b \star c) = ((a \star c) \star (a \star b)) \star (b \star c) = 0$ et , $(c \star b) \star (c \star a) = ((c \star b) \star (c \star a)) \star (a \star b) = 0$
2.) Remarquons d'abord que $a \star (a \star (a \star b)) \leq a \star b$.
D' autre part, la formule $a \star (a \star b) \leq b$ entraine selon la première propriété que $a \star b \leq a \star (a \star (a \star b))$. il en résulte que $a \star (a \star (a \star b)) = a \star b$ d' où la proposition .

1.4 Proposition . soit A une BCK – algèbre commutative , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.) $a \star (b \star a) = a$
2.) $(a \star b) \star b = a \star b$
3.) $(a \star b) \star c = (a \star c) \star (b \star c)$; quelques soient a, b et c de A

Démonstration . 1) $\Rightarrow$ 2) par l' hypothèse , on a : $(a \star b) \star b$
$= (a \star (b \star (a \star b))) \star b = (a \star b) \star (b \star (a \star b))$
$= a \star b$
2) $\Rightarrow$ 1) En effet, il est clair que $(a \star (b \star a)) \star a = 0$ Aussi , notons que $a \star (a \star (b \star a)) = (b \star a) \star ((b \star a) \star a)$
$= (b \star a) \star (b \star a) = 0$
2) $\Rightarrow$ 3). en effet: $(a \star b) \star c = (a \star c) \star b \leq (a \star c) \star (b \star c)$; car $(b \star c) \star b = 0$.
D'autre part, on sait que $((a \star c) \star (b \star c)) \star (a \star b) = ((a \star c) \star (a \star b)) \star (b \star c) = 0$ donc $(a \star c) \star (b \star c) \leq a \star b$. ce qui prouve en utilisant la proposition (1.3) que $((a \star c) \star (b \star c)) \star c \leq (a \star b) \star c$ etpar suite: $(a \star c) \star (b \star c) \leq (a \star b) \star c$
3) $\Rightarrow$ 2) Découle de l'hypothèse en prenant $c = b$.

1.5. Rappel. Soit A une BCK-algèbre commutative, Rappelons suivant [1] qu'une telle algèbre est dite implicative lorsque satisfait l'une des propriétés précédentes

- Désignons désormais: $a \Lambda b = a \bigstar (a \bigstar b)$ et $e(a) = 1 \bigstar a$; nous trouvons directement que $a \Lambda a = a$, $a \Lambda b = b \Lambda a$ et $e(e(e(a))) = e(a)$ en vertu de la proposition (1.3) .
- Déduisons ainsi «$e(e(a)) = a$ si et seulement si $a \bigstar 1 = 0$» et aussi $e(a) \bigstar b = e(b) \bigstar a$

1.6. Proposition . Soit A une BCK-algèbre commutative , alors :

1. $(a \Lambda b) \bigstar a = (a \Lambda b) \bigstar b = 0$
2. $a \bigstar (a \Lambda b) = a \bigstar b$.

1.7. Proposition. Si A est une BCK-algèbre commutative et implicative, alors: **Sym** (A) = $\{u \in A : u \bigstar 1 = 0\}$ est une algèbre de Boole, dont les opérations booléiennes sont :
$u \Lambda v = u \bigstar (u \bigstar v)$, $u \vee v = e(e(u) \bigstar v)$ et $ú = e(u)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.2 de [6].

1.8. Corollaire . Pour $u, v \in$ Sym (A) , nous avons :
$u \bigstar (u \vee v) = 0$ et $(u \vee v) \bigstar u = v \bigstar u$.
Démonstration . soient u , $v \in$ Sym (A) . Remarquons d'abord que
$u \bigstar e(v) = e(e(u) \bigstar e(v) = e(e(v)) \bigstar e(u) = v \bigstar e(u)$
et $e(u) \bigstar e(v) = e(e(v)) \bigstar u = v \bigstar u$.
Nous concluons donc : $u \bigstar (u \vee v) = u \bigstar e(e(u) \wedge e(v))$
$= (e(u) \wedge e(v)) \bigstar e(u) = 0$ et $(u \vee v) \bigstar u$
$= e(e(u) \wedge e(v)) \bigstar u = e(u) \bigstar (e(u) \wedge e(v))$
$= e(u) \bigstar e(v) = v \bigstar u$ (proposition 1.7) .

2. Idéaux et Idéaux premiers

2.1 Rappel. Soit A une BCK-algèbre commutative .
Un idéal I de A est un sous ensemble de A tel que $0 \in I$ et vérifiant: «si $a \bigstar b \in I$ et $b \in I$ alors $a \in I$» . (voir [3])
Un idéal propre est caractérisé par la condition supplémentaire $1 \notin I$.
Remarque qu' un idéal I satisfait la propriété:

«si a $\star$ b = 0 et b $\in$ I alors a $\in$ I ». Egalement, «si a $\in$ A et b $\in$ I alors b $\star$ a $\in$ I». car: (b $\star$ a) $\star$ b = 0 $\in$ I implique b $\star$ a $\in$ I.
Un idéal propre I de A est dit premier lorsque:
«a Λ b $\in$ I $\Rightarrow$ a $\in$ I ou b $\in$ I » quelques soient a , b de A (voir [4])

Nous pouvons introduire les résultats intéressant suivants:

2.2 Proposition. Si I et J sont deux idéaux d' une BCK-algèbre commutative A, alors I**.** J = {a Λ b : a $\in$ I et b $\in$ J} est un idéal de A. En outre I **.** J = I $\cap$ J.

Démonstration. En effet, 0 $\in$ I **.** J . Si a $\star$ b $\in$ I **.** J et b $\in$ I **.** J, alors a $\star$ b, b $\in$ I et de même a $\star$ b, b $\in$ J. Ce qui prouve par l'hypothèse que a = a Λ a $\in$ I **.** J et I **.** J est donc un idéal de A. Aussi, soit x = a Λ b $\in$ I . J où a $\in$ I et b $\in$ J, alors suivant le remarque ci – dessus il vient: x = a$\star$ (a $\star$ b) $\in$ I et x = b$\star$ (b$\star$ a) $\in$ J . ceci nous permet de dire que I. J $\subseteq$ I $\cap$ J Réciproquement, si a $\in$ I $\cap$ J alors a = a Λ a $\in$ I **.** J.

2.3. Proposition. Soient A une BCK-algèbre commutative implicative , I un idéal de A et soit x $\in$ A . Alors l' ensemble
I_x = { a $\in$ A : a $\star$ x $\in$ I } est un idéal de A engendré par I U { x } .
Démonstration . Clairement , 0 $\in$ I_x . Si a $\star$ b, b $\in$ I_x alors
(a $\star$ b) $\star$ x $\in$ I et b $\star$ x $\in$ I . Donc a $\star$ x $\in$ I et par suite a $\in$ I_x .
Cela signifie que I_x est un idéal . C'est manifestement le plus petit idéal de A contenant I et x. En effet, supposons que J est un idéal de A contenant I et x; il vient :
a $\in$ I_x $\Rightarrow$ a $\star$ x $\in$ I $\Rightarrow$ a $\star$ x $\in$ J $\Rightarrow$ a $\in$ J . Donc $I_x \subseteq$ J .

2.4.Notation. Soit A une BCK-algèbre commutative et implicative.
1- L'idéal principal engendré par un élément x sera noté
) x (= { a $\in$ A : a $\star$ x = 0 }, on voit immediatement que x $\in$) x (

2- Si I et J sont deux idéaux de A. L'idéal engendré par leur réunion sera noté I $\star$ J , c'est la borne supérieure de I et J.
En générale, si $(J_i)_{i\in I}$ une famille d' idéaux de A . L'idéal engendré par leur réunion sera noté $\star_{i\in I}$ J_i .

2.5. Proposition. Soit A une BCK-algèbre commutative et implicative, alors:

1- $a \leq b \Rightarrow)a(\subseteq)b($

2- $)a(\cap)b(=)a \Lambda b($; quelques soient a , b de A .

Démonstration. 1) Soit $x \in)a($, il vient alors que $x \leq a$ et $a \leq b$

Donc $x \leq b$ et ceci prouve la première assertion .Pour montrer

2) la première assertion entraînent :

$)a \Lambda b(\subseteq)a($ et $)a \Lambda b(\subseteq)b($. Donc $)a \Lambda b(\subseteq)a(\cap)b($.

D'autre part , si $x \in)a(\cap)b($ alors $x \leq a$ et $x \leq b$, il s' ensuit que: $a \bigstar (a \bigstar x) = x \bigstar (x \bigstar a) = x$ et $(a \bigstar b) \bigstar (a \bigstar x) = 0$ selon la propriétés (4) de la proposition (1 .2). Ce qui implique aussi en appliquant le même axiome que :

$x \bigstar (a \Lambda b) = (a \bigstar (a \bigstar x)) \bigstar (a \bigstar (a \bigstar b)) = 0$ et par suite

$)a(\cap)b(\subseteq)a \Lambda b($.

2.6. Proposition. Soient A une BCK-algèbre commutative implicative et I un idéal propre de A. Les deux assertions suivantes sont équivalentes **(prop (6.2) de [2]):**

(1) I est un idéal premier .

(2) Pour tout couple (J_1 , J_2) d' idéaux de A , on a :

$J_1 . J_2 \subset I \Rightarrow (J_1 \subset I$ ou $J_2 \subset I)$

Démonstration: 1) $\Rightarrow$ 2) En effet, si $J_1 \not\subset I$ et $J_2 \not\subset I$ il existe alors $a \in J_1$ tel que $a \notin I$ et $b \in J_2$ tel que $b \notin I$ donc $a \wedge b \in J_1 . J_2$ tandis que $a \wedge b \notin I$ et ceci prouve que $J_1 . J_2 \not\subset I$.

Ce qui est absurde .

2) $\Rightarrow$ 1) . Si $a \wedge b \in I$. La proposition précédente implique

$)a(.)b(=)a \wedge b(\subset I$, et par l' hypothèse il vient :

$)a(\subset I$ ou $)b(\subset I$. Donc $a \in I$ ou $b \in I$.

3. Spectres premiers

Soit A une BCK-algèbre commutative implicative et soit X_A l'ensemble des idéaux premiers de A .

Si J est un idéal de A, désignons:

$V(J) = \{ P \in X_A : J \subset P \}$ et $D(J) = \{ P \in X_A : J \not\subset P \}$.

Nous proposons de définir une topologie sur X_A «topologie de Zariski», il s' agit là d' une méthode trés analogue á celle que l' on rencontre dans la théorie des algèbres de Boole non commutatives (voir prop (7.2) de [2])

3.1. Proposition .

(1) $V(A) = \emptyset$
(2) $V(\{0\}) = X_A$
(3) Pour toute famille $(J_i)_{i\in I}$ d'idéaux de A ,
$$V(\underset{i\in I}{\bigstar} J_i) = \bigcap_{i\in I} V(J_i).$$

(4) Pour tout couple d'idéaux I et J de A , $V(I \,.\, J) = V(I) \cup V(J)$
Démonstration. En effet: $V(A) = \{P \in X_A : A \subset P\} = \emptyset$ et
$V(\{0\}) = \{P \in X_A : \{0\} \subset P\} = X_A$.
D'ailleurs, $V(\underset{i\in I}{\bigstar} J_i) = \{P \in X_A : \forall\, i\in I,\ J_i \subset P\}$

$= \bigcap_{i\in I} \{P \in X_A : J_i \subset P\} = \bigcap_{i\in I} V(J_i)$.

Enfin, suivant la proposition (2 .6) il vient :
$V(I \,.\, J) = \{P \in X_A : I \,.\, J \subset P\} = \{P \in X_A : I \subset P \text{ ou } J \subset P\}$
$= V(I) \cup V(J)$.

3.2 Corollaire . L'ensemble $\{V(J) : J \in Id(A)\}$ est l'ensemble des fermés d' une topologie sur X_A .
3.3 Définition. On appelle spectre premier de A et on le note **Spec** (A), l'ensemble X_A muni de la topologie dont l'ensemble des ouverts est $\{D(J) : J \in Id(A)\}$ et l'ensemble des fermés est $\{V(J) : J \in Id(A)\}$.
3.4 Notation . Dans la suite de ce travail, nous notons:
$V(e) = \{P \in X_A : e \in P\}$ et $D(e) = \{P \in X_A : e \notin P\}$
pour $e \in$ **Sym** (A).
Remarque: les trois résultats suivants sont analogues aux résultats obtenus au article ([2]) relativement a la notion des algèbres de Boole nom commutatives (voir: (7.6), (7.8) et (7.9) de ([2]) .

3.5 Proposition .
(1) $D(e) = X_A - V(e)$
(2) $D(0) = \emptyset$ et $D(1) = X_A$
(3) $D(e \wedge w) = D(e) \cap D(w)$
(4) $D(e \vee w) = D(e) \cup D(w)$
(5) $D(é) = X_A - D(e) = V(e)$

Démonstration: les formules (1) et (2) sont évidentes. Soit p un idéal premier de A. Il est facile de voir que:

$e \wedge w \in P \Leftrightarrow e \in P$ ou $w \in P$. Donc:
$D(e \wedge w) = \{ P \in X_A : e \wedge w \notin P \}$
$= \{ P \in X_A : e \notin P$ et $w \notin P \} = D(e) \cap D(w)$.
Nous montrons (4). Remarquons d'abord que le corollaire (1.7) entraîne: $e \vee w \in P \Leftrightarrow e \in P$ et $w \in P$. En effet , si $e \vee w \in P$ alors l'égalité $e \bigstar (e \vee w) = w \bigstar (e \vee w) = 0$ (corollaire 1.8) entraine $e \in P$ et $w \in P$. Réciproquement , soit $e \in P$ et $w \in P$ alors $(e \vee w) \bigstar e = w \bigstar e \in P$ et $(e \vee w) \bigstar w = e \bigstar w \in P$
(corollaire 1.8 et remarque précédent) donc $e \vee w \in P$. Donc :
$D(e \vee w) = \{ P \in X_A : e \vee w \notin P\} = \{ P \in X_A : e \notin P$ ou $w \notin P\}$
$= D(e) \cup D(w)$.
Enfin, nous avons: $D(e) \cap D(é) = D(e \wedge é) = D(0) = \emptyset$ et
$D(e) \cup D(é) = D(e \vee é) = D(1) = X_A$. Nous concluons donc que $D(é) = X_A - D(e)$.
Désignons $\mathbf{D}_A$ l'ensemble ordonné des parties de **Spec** (A) de la forme D (e) où $e \in$ **Sym** (A). Nous déduisons le théorème principal suivant .

3.6. Théorème. Spec (A) est un espace booléen dont l'ensemble ordonné des ouverts fermés est $\mathbf{D}_A$.

Démonstration. Prenons J =) e (nous trouvons que D (e)= D(J) et D (e) est donc ouvert . Ainsi, comme $D(é) = X_A - D(e)$,
(proposition 3.5) .Nous déduisons que D(e) est fermé .
Soit J un idéal de A. Alors $D(J) = \bigcup_{x\in I} D(e(e(x)))$.

En effet : $P \in D(J) \Leftrightarrow J \not\subset P \Leftrightarrow \exists x \in J$ tel que $x \notin P \Leftrightarrow$
$\exists x \in J$ tel que $e(x) \in P \Leftrightarrow \exists x \in J$ tel que $e(e(x)) \notin P \Leftrightarrow$
$\exists x \in J$ tel que
$P \in D(e(e(x))) \Leftrightarrow P \in \bigcup_{x\in I} D(e(e(x)))$. Donc D_A forme une

base d'ouverts fermés de la topologie spectrale sur X_A . Montrons que X_A est compact . Considérons un recouvrement $(D(e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ de X_A. Tout idéal premier $P \in X_A$ appartient à l'un des ensembles $D(e_\lambda)$, donc ne contient pas l'un des e_λ . Par suite l'idéal
$J = \bigstar_{\lambda\in\Lambda}) e_\lambda$ (n'est contenu dans aucun idéal premier. Il s'en suit que J = A. Donc $1 \in J$ et il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tel que

$1 = e_{\lambda 1} \bigstar e_{\lambda 2} \bigstar \ldots \bigstar e_{\lambda n}$. Par suite $X_A = D(1) = \bigcup_{i=1}^{n} D(e_{\lambda i})$

(proposition 3.5). Ce qui prouve que X_A est compact . Soient p,q deux idéaux premiers distincts de A **.** Il existe par exemple $x \in A$ tel que $x \in p$ et $x \notin q$ alors $e(x) \notin p$ et $e(x) \in q$.
Donc $p \in D(e(x))$ et $q \notin D(e(x))$. Par suite X_A est séparé donc est un espace booléen . Soit U un ouvert fermé de X_A . Alors il existe $J \in Id(A)$ tel que $U = D(J) = \cup_{e \in sym(A)} D(e)$. Or U est compact , donc il existe $e_1, \ldots, e_n \in sym(A)$ tels que $U = D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_n) = D(e_1 \vee \ldots \vee e_n) \in \mathbf{D}_A$. par conséquent $\mathbf{D}_A$ est l'ensemble des ouverts fermés de X_A .

3.7.Proposition . L'ensemble ordonné $\mathbf{D}_A$ est une algébre de Boole isomorphe à l'algèble de Boole **sym** (A) .

Démonstration : D'après la proposition (3.5), l'application
D: **sym** (A) $\rightarrow \mathbf{D}_A$ qui à un élément $e \in sym(A)$ associe l'ensemble D (e) est un morphisme d'algèbres de Boole. Elle est surjective. Soit $e \in sym(A)$ tel que $D(e) = \emptyset$. Alors e appartient à tout idéal premier de A, donc $e = 0$. L'application D est donc injective. C'est un isomorphisme d'algèbres de Boole .

Références

[1] Iséki, K. and Tanaka, S. (1978) An introduction to the theory of BCK-lgebras, Math. Japon, 23. 1-26.
[2] Koudsi, E. et Diers, V. (1992). Algèbres de Boole nom commutatives, Ann. Sci. Math. Québec, 16 (1), (1- 24) canada .
[3] Meng, J. (1994). On ideals in BCK- algebras, Math. Japon 40, 143 -154.
[4] Meng, J. and Jun. y. (1998). Prime ideals in commutative BCK- algebras, Discussiones Mathematicae, algebras and Stochastic Methods, No 18, 5 -15.
[5] Ponasse, D. et Carrega, J. C. (1979). Algèbre et topologie booléenne. Masson, Paris, New-york, Barcelone, Milan.
[6] Romanowski, A. and traczyk, T. (1980). On commutative BCK- algebras, Math. Japon 25, No. 5, 567-583.
[7] Yutani, H. (1977). On a system of axiomes of a commutative BCK- algebras, Math. Seminar Notes, 255-256, kobe university.