

حساب المساحات المائلة للعقارات وتقييم دقتها

د.م. عبد الرزاق عجاج⁽¹⁾

الملخص

يترافق تطوّر مفاهيم استثمار البيانات المساحية مع تطوّر تقانات القياس والحساب والرسم وانتشار النظم المؤتمتة في استثمار هذه البيانات وتبادلها وتخزينها عموماً. وتحلّ الطرائق المتطورة، في التمثيل الرقمي للعقارات، مكان الطرائق الترسيمية الورقية في رسم المخططات العقارية، واستثمارها، وخصوصاً في حساب المساحات. يترافق ذلك مع تزايد متطلبات الدقة في حساب المساحات، الذي تعجز عن تلبيته الطرائق التقليدية، نتيجة لارتفاع قيم العقارات السكنية والزراعية. عرض البحث أهم طرائق حساب المساحات المستوية والمائلة سواء باستخدام الأرصاد الحقلية، أو توابعها من الإحداثيات ثلاثية الأبعاد، ودقة الحساب وفق كل طريقة. كما ركّز البحث على الفروقات بين المساحة الأفقية والمائلة، المتعلقة بارتفاع المنطقة عن سطح البحر، والارتسام المستخدم، وكذلك ميل سطح الأرض، وتأثير كل من هذه العوامل في قيم الفروقات. تناول البحث ايجاد طرائق مختلفة في حساب المساحات (السطوح) ودراستها في الفراغ الأقرب للمساحات الفعلية للعقارات، وذلك بالإفادة من البيانات المكانية الأفقية والارتفاعية المتوافرة عن هذه العقارات جميعها. ويتم ذلك من خلال مكاملة البيانات العقارية والطبوغرافية الرقمية للحصول على المساحات المائلة للعقارات.

الكلمات المفتاحية: المساحة المائلة، المساحة الأفقية، العقار، البيانات المكانية، الإحداثيات ثلاثية الأبعاد، دقة الحساب.

⁽¹⁾ أستاذ مساعد، قسم الهندسة الطبوغرافية، كلية الهندسة المدنية، جامعة دمشق، والجامعة العربية الدولية الخاصة، سورية.

Computation of Tilted Planar Areas of Real –Estate Parcels and Evaluation of their Accuracy

Dr. Abdulrazzak Ajaj⁽¹⁾

Abstract

The development of the surveying exploitation concepts data cope with the advanced techniques of measurements, computations, drawing of maps and the proliferation of automated systems, thus enabling data to be stored and exchanged in general. The advanced methods of digital cadastral representation have replaced the traditional manual methods of the utilization of real estate maps, especially in the field of planar area computations. This goes with the increasing demand on accuracy requirements of computation, which the traditional methods cannot achieve as a result of the increasing values of agricultural and residential real estates.

This paper presents the most important methods in the field of planar and tilted cadastral area computations, either by using field observations or others like 3-dimensional extent (3D point coordinates), and accuracy evaluation of each suggested method.

The paper also focuses on the differences in computations of horizontal and tilted planer areas related to the mean sea level, map projection, earth surface slope and the effects of all those factors on the differences mentioned above.

This research studies and highlights the different methods in computations of 3D-space planer areas which are as close as possible to the actual situation of real estate entities, thus making use of all horizontal and vertical data available about those entities, which is accomplished by the integration of cadastral data and the digital topographic ones, in order to achieve those requirements of planar tilted area computations.

Keywords: Tilted planar area, Planar area, Real estate (cadastral entity), Spatial data, 3-dimensional coordinates, Computation accuracy.

⁽¹⁾ Associate Professor, Department of Topography, Faculty of Civil Engineering, Damascus University, and Arab International University (AIU), Syria.

مقدمة

يرتبط مصطلح مساحة العقار بالمساحة المستوية للمضلع المحدد للعقار. إذ يجري عموماً، حساب مساحة العقار من المخططات العقارية الورقية الترسيمية، وفق الإحداثيات المستوية (X,Y) لنقاط رؤوس العقار في جملة الإحداثيات العامة للقطر [1]. وكما هو معلوم، فإنّ المساحة الفعلية للعقارات، أو قطع الأراضي تختلف اختلافاً كبيراً أحياناً عن المساحة المستوية، تبعاً لميول العقار أو المنطقة وطبوغرافيتها. حالياً ومع تغير القيمة الاقتصادية للأراضي وارتفاع أسعار العقارات، تبرز أهمية حساب المساحات الفعلية للعقارات، خصوصاً ضمن المدن والتجمعات السكنية والمناطق السياحية، حيث تتوفر المخططات الطبوغرافية بالمقاييس الكبيرة لهذه المناطق. تحمل المخططات الطبوغرافية بيانات ثلاثية الأبعاد (X,Y,H) لنقاط رؤوس العقارات جميعها ونقاط تبدل الميل ضمن هذه العقارات، مما يجعلنا نبرز أهمية حساب المساحات في الفراغ (السطوح في الفراغ) وتقديم بيانات مساحية لأيّ عقار يطلبه المراجع من الدوائر العقارية بشكل أكثر دقة من الذي يحصل عليه حالياً في دوائر المساحة التابعة لمديريات المصالح العقارية في المحافظات السورية.

المشكلة العلمية للبحث

أتاح تطور أجهزة القياس وبرمجيات الحساب والرسم وتقانات الاستثمار إمكانية تطوير الطرائق التقليدية في التمثيل الترسيمي للعقارات، واستثمار المخططات العقارية عموماً، وحساب مساحات العقارات خصوصاً، إلى التمثيل الرقمي الأكثر دقة، والاستثمار الواسع والمختلف لهذه المخططات. إذ بقيت المخططات العقارية الورقية والطرائق التقليدية في حساب المساحات من هذه المخططات عاجزة، حتى الآن عن تلبية متطلبات الدقة المتزايدة في حساب

المساحات [10]. إنّ توافر المخططات العقارية والطبوغرافية الرقمية قدّم بيانات كافية وإمكانيات جديدة في حساب المساحات ثلاثية الأبعاد (الفراغية) الأقرب إلى المساحات الفعلية للعقارات [8] وهو ماسعينا إليه في هذا البحث.

الهدف من البحث

إيجاد طرق مختلفة في حساب المساحات الفراغية الأقرب للمساحات الفعلية للعقارات ودراستها وذلك بالإفادة من البيانات المكانية الأفقية والارتفاعية المتوفرة عن هذه العقارات جميعها، من خلال مكاملة البيانات العقارية والطبوغرافية الرقمية للحصول على المساحات المائلة للعقارات، وتقييم دقة الحساب وفق الطرائق المقترحة.

1- حساب المساحات المستوية للعقارات: تحسب

المساحات المستوية للعقارات بطرائق متعددة تحليلية أو ترسيمية [4]، تستند إلى قياسات حقلية، أو ما ينتج عنها لاحقاً من إحداثيات مستوية يتم الحصول عليها من المعالجة المكتبيّة لهذه القياسات، أو من المخططات المرسومة بموجب الإحداثيات. نذكر من هذه الطرائق، طريقة حساب مضلع مغلق مؤلف من n نقطة، بموجب العلاقة:

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= 1/2 \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \quad (1)$$

إذ (X,Y) إحداثيات رؤوس المضلع في جملة الإحداثيات المستوية العامة وفق الإسقاط المعتمد، n عدد نقاط رؤوس العقار.

يمكن أن نأخذ كحالة خاصة للمقارنة [1]، مساحة أبسط الأشكال وهو المثلث. يُعبّر عن مساحة المثلث بالعلاقة (2) الآتية:

$$S = \sum_{n=1}^i P_i \quad (3)$$

إذ P_i - مساحة المثلث الفراغي

3- الفرق بين المساحات المستوية والمائلة:

تختلف المساحات المستوية بشكل متفاوت عن المساحات الفعلية للعقارات لأسباب مختلفة أهمها:

- تحسب المساحة المستوية اعتماداً على إحدائيات تريبعية متعامدة مرجعة إلى سطح مقارنة (إهليلج كلارك 1880، في الحالة السورية)، القريب جداً من سطح البحر. وعليه فإن الفرق بين المساحة المستوية والمائلة يتعلق بارتفاع المنطقة عن سطح البحر [6].

تكتب علاقة إرجاع المسافات إلى سطح البحر بالشكل:

$$K_d = \frac{d}{d_0} = \frac{R+H}{R} = 1 + \frac{H}{R} \quad (4)$$

إذ: d - المسافة على سطح الأرض، d_0 - المسافة على الإهليلج، R - نصف القطر الوسطي للإهليلج الممثل للأرض في المنطقة، H - ارتفاع المنطقة عن سطح البحر. استناداً للعلاقة السابقة، نكتب علاقة إرجاع المساحات بالشكل:

$$K_p = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{H}{R}\right)^2 = 1 + 2\frac{H}{R} + \left(\frac{H}{R}\right)^2 \quad (5)$$

بإهمال الحد من الدرجة الثانية في العلاقة السابقة، نظراً إلى صغر قيمة H بالنسبة إلى R ، نجد أن الحد $2\frac{H}{R}$ يمثل قيمة التشوه في المساحة بسبب الإرجاع إلى سطح البحر. ويوضح الجدول (1) الآتي قيم هذه النسبة بدلالة الارتفاع.

الجدول (1) التشوه النسبي للمساحات بسبب الإرجاع إلى

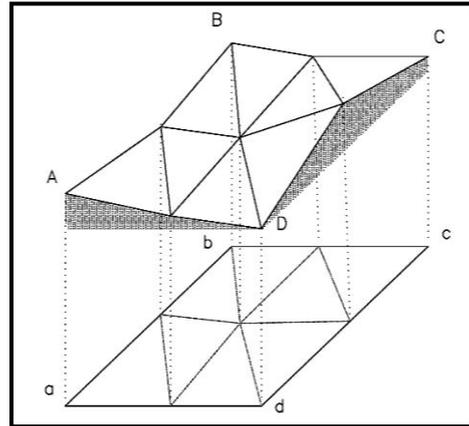
سطح البحر							
H (m)	20	100	500	1000	1500	2000	3000
2H/R	1:160000	1:32000	1:6400	1:3200	1:2100	1:1600	1:1060

- تنتج الإحدائيات المستوية عن إسقاط القياسات المنجزة على سطح الأرض، والمرجعة إلى إهليلج معتمد، وفق ارتسام محدد. لذلك فإن المساحة المستوية تحمل خطأ

$$P = 1/2[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_1)(x_1 - x_3)] \quad (2)$$

2- حساب المساحات المائلة للعقارات: تأخذ العقارات

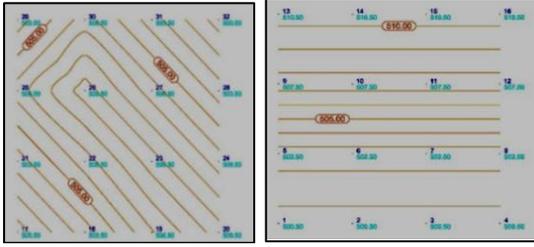
على الطبيعة، غالباً، أشكالاً غير منتظمة الشكل وذات ميول متغيرة ومتعددة ضمن العقار الواحد، لذلك لابد من تقسيم العقارات إلى أشكال بسيطة تأخذ بالحسبان نقاط تبدل ميل الأرض ضمن هذه العقارات وعلى محيطها (الشكل 1). وحساب المساحات الفعلية لهذه الأشكال. أهم هذه الأشكال هي المثلثات في الفضاء ثلاثي الأبعاد. تنتج هذه المثلثات عند تمثيل سطح الأرض وفق نموذج تضاريس رقمي (DTM- Digital Terrain Model) [12]، يبنى بمساعدة برمجيات مساحية تخصصية من خلال تشكيل شبكة المثلثات غير النظامية (TIN-Triangulation Irregular Network) بين النقاط المتجاورة الممثلة بإحدائيات ثلاثية الأبعاد $(x, y, z(H))$ في النظام الإحداثي العام للقطر (المستوي والارتفاعي). إن التعبير عن الإحدائيات z كتابع للمنسوب H دليل على المعالجة المسبقة للارتفاعات المعطاة وفق توابع إحصائية معينة لتصحيح التضاريس [6].



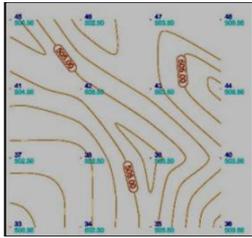
الشكل (1) المساحة المائلة للعقار لدى تمثيله وفق الصيغة TIN.

تحسب المساحة المائلة للعقار من مجموع مساحات المثلثات الفراغية (المائلة) المشكلة له بالعلاقة:

مينية على أساس مستويات نقاط محيطية ونقاط تبديل الميل ضمن العقارات.



ميول منتظمة باتجاه واحد



ميول متعددة وغير منتظمة

الشكل (2) نماذج من ميول سطح العقار

لدراسة تأثير الميل، نعدّ سطحاً ذا ميل وسطي منتظماً.

نكتب:

$$P' = P \times \cos v \quad (6)$$

إذ v - زاوية الميل الوسطية مقدّرة بالراديان،

P' - المساحة الأفقية، P - المساحة المائلة.

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{4} + \dots$$

يكتب منشور $\cos v$: وبإهمال الحدود من المرتبة الرابعة فما فوق، نكتب

العلاقة السابقة بالشكل:

$$P = \frac{P'}{1 - \frac{v^2}{2}} \quad (7)$$

بعد ضرب البسط والمقام في الطرف الثاني من العلاقة

السابقة بمرافق المقام، وإصلاح المعادلة، وإهمال الحدود

من الدرجة الرابعة بالنسبة الى v ، نجد:

$$P = P' + P' \frac{v^2}{2} \quad (8)$$

تُعبّر النسبة $\frac{v^2}{2}$ عن مقدار التشوه في المساحات الناتج

عن ميل سطح الأرض. يوضّح الجدول (3) التشوه النسبي

في المساحات بسبب ميل سطح الأرض بمقدار v راديان.

تشوه نتيجة الإسقاط (في حالتنا السورية ارتسام روسيل الستيريوغرافي شبه المطابق). ترتبط قيمة هذا التشوه ببعد المنطقة عن مركز الإسقاط.

تراوح تغيرات قيمة هذا التشوه من 0 إلى $1/2270$ (من

$M = 200\text{km}$ إلى $M = 275\text{km}$)، ومن 0 إلى $1/1730$ (من

$M = 275\text{km}$ إلى $M = 350\text{km}$)، يبيّن الجدول (2)

تغيرات هذا التشوه (KP) تبعاً لتغير البعد عن مركز

الإسقاط (M)، وكذلك التشوه النسبي (KP/P) ضمن

المنطقة السورية [Durafford Report].

الجدول (2) التشوه النسبي للمساحات بسبب الإرجاع إلى سطح البحر.

تشوه المساحة من أجل 1 هكتار (10000 m^2)		
التشوه النسبي	قيمة التشوه	البعد عن مركز الإسقاط
K_p/P	$K_p (\text{m}^2)$	$M (\text{km})$
-1:1000	-10	0
-1:1250	-8	50
-1:1700	-6	175
-1:2500	-4	225
-1:5000	-2	250
0	0	275
1:5000	2	300
1:2500	4	325
1:700	6	350
1:1250	8	375
1:1000	10	400
...

• يتعلق الاختلاف بين المساحة المستوية والمساحة

المائلة بدرجة ميل الأرض الطبيعية. وغالباً ما تكون

العقارات أو قطع الأراضي متعددة الميول. قد تتساوى في

بعض الحالات المساحات المستوية لبعض العقارات إلا أنّ

المساحات المائلة لذات العقارات قد تختلف اختلافاً

ملحوظاً. ينتج ذلك بسبب اختلاف ميول سطح الأرض

لهذه العقارات. في الشكل (2) نبيّن ثلاثة نماذج من ميول

سطح الأرض لعقارات متساوية المساحة الأفقية، مختلفة

المساحة المائلة، تمّ التعبير عن الميول بخطوط تسوية

الجدول (3) تشوه المساحات بسبب ميل سطح الأرض

v (rad)	v (grad)	$\frac{v^2}{2}$	P' (m ²)	$P' \frac{v^2}{2}$	P	التشوه النسبي
0.01	0.6366	0.00005	10000	0.5	10000.5	1:20000
0.05	3.1831	0.00125	10000	12.5	10012.5	1:800
0.1	6.3662	0.005	10000	50	10050	1:200
0.15	9.5493	0.01125	10000	112.5	10112.5	1:90
0.2	12.7324	0.02	10000	200	10200	1:51
0.25	15.9155	0.03125	10000	312.5	10312.5	1:33
0.3	19.0986	0.045	10000	450	10450	1:23
0.35	22.2817	0.06125	10000	612.5	10612.5	1:17

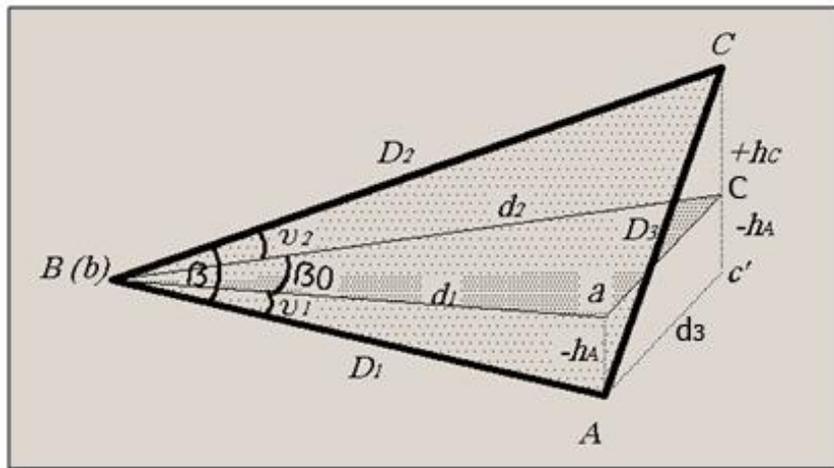
4- حساب المساحات

أما الطريقة الثانية فتكون اعتماداً على الإحداثيات التربيعية المستوية والارتفاعية، التي تنتج عن الأرصاد الحقلية المنجزة استناداً إلى نقاط الأساس الجيوديزي وفق النظام الإحداثي العام للقطر، ومن ثمّ فإنّ دقة الحساب وفق هذه الطريقة ترتبط (إلى حدّ ما) بدقّة الأساس الجيوديزي المستوي والارتفاعي.

تناولنا من الطرائق الكثيرة الممكنة لحساب المثلث المائل طريقتين مختلفتين أحدهما باستخدام الأرصاد والأخرى باستخدام الإحداثيات. ونشير إلى أنّ الطريقة الأولى باستخدام أرصاد حقلية من قياسات خطية وأرصاد زاوية تنجز محلياً لكلّ عقار أو قطعة من الأرض دون الاستناد إلى نقاط الأساس الجيوديزي، المرتبطة مع الشبكة العامة للقطر، ومن ثمّ فإنّ دقة الحساب وفق هذه الطريقة مستقلة عن أخطاء جملة الإحداثيات العامة بما فيها الارتسام.

4-1 حساب المساحات باستخدام الأرصاد الحقلية [2]:

ليكن لدينا المثلث ABC مسقطه المستوي المثلث abc المار من النقطة B، الشكل (3). تقاس حقلية الزاوية β والضلعان D_1 و D_2 وزاويتا الميل لهذين الضلعين v_1 و v_2 في المثلث ABC.



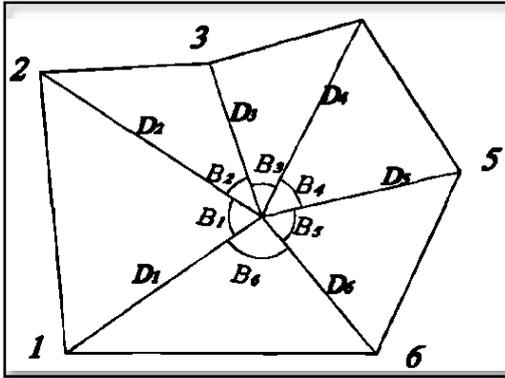
الشكل (3) مثلث في الفراغ ومسقطه الأفقي

$$P = \sqrt{s(s - D_1)(s - D_2)(s - D_3)} \quad (16)$$

$$s = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{2} \quad \text{حيث:}$$

وبذلك يمكن حساب المساحة المائلة للعقار من خلال تقسيمة إلى مجموعة من المثلثات المائلة المكوّنة له، مع الأخذ بالحسبان أفضل حالة لاختيار نقاط تبديل الميل ضمن وعلى محيط العقار، وحساب المساحة وفق العلاقات الواردة آنفاً.

تجدر الإشارة إلى أنه يتعذر في بعض الحالات قياس أضلاع محيط العقارات بسبب وجود أسوار وعوائق. في هذه الحالة من الأفضل تقسيم العقار إلى مجموعة من المثلثات التي تشترك برأس واحد ضمن العقار، كأن يتم اختيار النقطة A في الشكل (4)، بحيث يشكّل كل مثلث مستوي ميلاً واحداً. تقاس المسافات جميعها المائلة D_i ، والزوايا المركزية كلها β_0 ، وكذلك زوايا الميل ν من النقطة المختارة A إلى نقاط رؤوس العقار جميعها. تحسب بعد ذلك قيم الزوايا الفراغية β بالعلاقة (15). [2].



الشكل (4) تقسيم العقار إلى مثلثات

عندها يمكن حساب مساحة العقار وفق العلاقة:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i D_{i+1} \sin \beta_i \quad (17)$$

كمثال على حساب المساحات المائلة، تمّ بدايةً، حساب المساحات المستوية للمثلثات المكوّنة للعقار الذي له الشكل نفسه (3)، واعتماداً على القياسات والأرصاد الحقلية ووفقاً

تكتب علاقة مساحة المثلث الحقل المائل بالشكل:

$$P = \frac{D_1 D_2 \sin \beta}{2} \quad (9)$$

إذ β - الزاوية الفراغية بين الضلعين D_1 و D_2 في المثلث ABC، المجهول الوحيد في المعادلة (9). من حل المثلث ABC نكتب:

$$\cos \beta = \frac{D_1^2 + D_2^2 - D_3^2}{2D_1 D_2} \quad (10)$$

نوجد المسقط الأفقي للضلع D_3 ، من المسقط الأفقي للمثلث abc:

$$d_3 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos \beta_0 \quad (11)$$

نعوض في العلاقة (11) مع الأخذ بالحسبان العلاقة بين الأضلاع المقيسة D_i ومساقطها الأفقية d_i بمعرفة زاوية الميل ν ، نجد:

$$d_3^2 = D_1^2 \cos^2 \nu_1 + D_2^2 \cos^2 \nu_2 - 2D_1 D_2 \cos \nu_1 \cos \nu_2 \cos \beta_0 \quad (12)$$

لدينا من المثلث ACC' القائم في C'

$$D_3^2 = d_3^2 + (h_C - h_A)^2$$

$$\text{وكذلك: } h_A = D_1 \sin \nu_1, \quad h_C = D_2 \sin \nu_2$$

عندها وبملاحظة العلاقتين (11) و (12)، نجد:

$$D_3^2 = D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 (\cos \beta_0 \cos \nu_1 \cos \nu_2 + \sin \nu_1 \sin \nu_2) \quad (13)$$

نعوض (13) في (10)، نحصل على المعادلة (14)

الآتية:

$$\cos \beta = \cos \beta_0 \cos \nu_1 \cos \nu_2 + \sin \nu_1 \sin \nu_2$$

ومنه:

$$\beta = \arccos(\cos \beta_0 \cos \nu_1 \cos \nu_2 + \sin \nu_1 \sin \nu_2) \quad (15)$$

وبمعرفة قيمة الزاوية β ، يمكن إيجاد القيمة الفعلية

لمساحة المثلث المائل بالعلاقة (9).

وكذلك يمكن حساب المساحة الفعلية للمثلث المائل ABC من خلال القياسات الحقلية لأضلاعه الثلاثة باستخدام العلاقة المعروفة (علاقة Geron) [2]:

قطعة من الأرض متوسطة المساحة (بحدود 5000.00m^2) ومتبدلة الميل (زاوية الميل الوسطي لها بحدود 8.75grade)، من مرتبة مئات الأمتار المربعة، أي مايعادل نسبة 3.34% من مساحة العقار.

للعلاقات السابقة، حسبت المساحة الأفقية للعقار. بعد ذلك حسبت المساحات الجزئية للمثلثات المائلة المكونة للعقار وبعدها المساحة المائلة للعقار. استخدمت في الحسابات الأرصاء نفسها أو توابعها. الواردة في الجدول (4) إذ تبيّن أنّ الفرق بين المساحة المائلة والمساحة الفعلية لعقار أو

الجدول (4) الأرصاء الحقيقية وحساب مساحة عقار

النقطة	الزاوية الأفقية β_0 (grad)	المسافة المائلة D (m)	زاوية الميل ν (grad)	الزاوية الفراغية β (grad)	المساحة الأفقية P" (m^2)	المساحة المائلة P (m^2)
1		48.79	-10.5821			
	102.8876			101.0472	598.42	618.93
2		25.85	-7.9828			
	75.4697			77.13948	466.26	480.57
3		38.14	9.3561			
	44.8222			44.07831	806.51	831.56
4		62.69	14.0606			
	43.2846			44.90885	1127.79	1197.19
5		54.10	0.4978			
	75.7906			76.10212	1129.66	1148.80
6		43.75	-10.0307			
	57.7445			56.72991	873.63	892.32
1		48.79	-10.5821			
					5002.28	5169.37
					167.09	الفرق
			8.75	الميل الوسطي	3.34%	النسبة المئوية

يمكن إيجاد قيمة m_β باشتقاق المعادلة (15) والانتقال من المشتقات الخاصة إلى الخطأ متوسط التربيع، ونكتب بشكل نهائي:

$$m_\beta^2 = \frac{(\cos \nu_1 \cos \nu_2)^2}{\sin^2 \beta} \times \left[\sin^2 \beta_0 m_{\beta_0}^2 + (\tan \nu_2 - \cos \beta_0 \tan \nu_1)^2 m_{\nu_1}^2 + (\tan \nu_1 - \cos \beta_0 \tan \nu_2)^2 m_{\nu_2}^2 \right] \quad (21)$$

إذ m : الخطأ المتوسط التربيع للقيم المحسوبة β والقيم المقاسة الموافقة β_0 ، ν_1 ، ν_2 .

عندما تكون زوايا الميل صغيرة جداً يمكن عدّ: $\beta \approx \beta_0$ ، $0 \approx |\nu_1| \approx |\nu_2|$ عندها تصبح $m_\beta \approx m_{\beta_0}$

لتحليل دقة تعيين المساحة المائلة للعقار وفق الطريقة المبينة آنفاً [10]، كتبنا معادلة الخطأ المتوسط التربيع للعلاقة (17) وفق ما يأتي:

$$m_P^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial D_1} \right)^2 m_{D_1}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial D_2} \right)^2 m_{D_2}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} \right)^2 m_\beta^2 \quad (18)$$

نعوض قيم المشتقات الخاصة في المعادلة (10) ونقسم طرفي المعادلة على P^2 ، مع ملاحظة العلاقة (9)، نجد:

$$\left(\frac{m_P}{P} \right)^2 = \left(\frac{m_{D_1}}{D_1} \right)^2 + \left(\frac{m_{D_2}}{D_2} \right)^2 + ctg^2 \beta \quad (19)$$

نعدّ أنّ: $\frac{m_{D_1}}{D_1} = \frac{m_{D_2}}{D_2} = \frac{m_D}{D}$ ، عندها يمكن أن تأخذ العلاقة (19) الشكل:

$$\frac{m_P}{P} = \sqrt{2 \times \left(\frac{m_D}{D} \right)^2 + ctg^2 \beta} \times m_\beta^2 \quad (20)$$

إذا عددنا قيمة وسطية للزوايا الأفقية $\beta = 50^{gr}$

نحصل وفق العلاقتين (21) و (20) على الخطأ النسبي لحساب المساحة المائلة $\frac{m_P}{P} \approx \frac{1}{7000}$.

4-2 حساب المساحات باستخدام الإحداثيات

تكتب علاقة حساب مساحة المثلث الفراغي بدلالة الإحداثيات الثلاثية لنقاط رؤوسه بالشكل [3]:

$$P = 1/2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 (z_i x_{i+1} - z_{i+1} x_i) \right)^2} \quad (22)$$

وبمعرفة المصفوفة الخطية للمشتقات الخاصة F للتابع P بالنسبة الى القيم المقيسة (الإحداثيات) في العلاقة (22): [3]، [7]. معتبرين أن الإحداثيات قيم غير مرتبطة (مستقلة). عناصر مصفوفة المشتقات الخاصة F للتابع P بالنسبة الى القيم المقيسة (الإحداثيات) في العلاقة (22) نكتب بالشكل:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right) = \frac{P_{xy}(y_2 - y_3) + P_{zx}(z_3 - z_2)}{2P} \\ F_2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial y_1} \right) = \frac{P_{xy}(x_3 - x_2) + P_{yz}(z_2 - z_3)}{2P} \\ F_3 &= \left(\frac{\partial P}{\partial z_1} \right) = \frac{P_{yz}(y_3 - y_2) + P_{zx}(x_2 - x_3)}{2P} \\ F_4 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right) = \frac{P_{xy}(y_3 - y_1) + P_{zx}(z_1 - z_3)}{2P} \\ F_5 &= \left(\frac{\partial P}{\partial y_2} \right) = \frac{P_{xy}(x_1 - x_3) + P_{yz}(z_3 - z_1)}{2P} \\ F_6 &= \left(\frac{\partial P}{\partial z_2} \right) = \frac{P_{yz}(y_1 - y_3) + P_{zx}(x_3 - x_1)}{2P} \\ F_7 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} \right) = \frac{P_{xy}(y_1 - y_2) + P_{zx}(z_2 - z_1)}{2P} \\ F_8 &= \left(\frac{\partial P}{\partial y_3} \right) = \frac{P_{xy}(x_2 - x_1) + P_{yz}(z_1 - z_2)}{2P} \\ F_9 &= \left(\frac{\partial P}{\partial z_3} \right) = \frac{P_{yz}(y_2 - y_1) + P_{zx}(x_1 - x_2)}{2P} \end{aligned}$$

وبالتبديل والإصلاح، نحصل على العلاقة:

في المثال السابق:

قيست المسافات والزوايا بجهاز المحطة المتكاملة (Total Station)، إذ قيست المسافات بدقة نحو $\frac{m_D}{D} = \frac{1}{10000}$ ورصدت الزوايا الأفقية والشاقولية بدقة: $m_{\beta_0} = m_{v_1} = m_{v_2} = 1^c$

نعيد كتابة العلاقة (22) بالشكل:

$$P = \sqrt{P_{xy}^2 + P_{yz}^2 + P_{zx}^2}$$

$$P_{zx} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{إذ:}$$

$$P_{yz} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

هي مساط المثلثات المائلة على مستويات الإحداثيات الموافقة. من هنا يتضح أن مساحة المثلث الفراغي (المائل) تساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعات مساقطه على مستويات الإحداثيات الثلاثة.

تكتب علاقة تقدير الخطأ المتوسط التربيع لحساب مساحة المثلث المائل، وفق العلاقة (22)، بالشكل:

$$m^2_P = F K_{xyz} F^T \quad (23)$$

في العلاقة السابقة: $-K_{xyz}$ مصفوفة تمام التباين لشعاع القياسات، وتكتب بالشكل:

$$K_{xyz} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

المنطقة. تبلغ الدقة المستوية لنقطة التسوية غير المباشرة وفق دفتر الشروط الفنية الخاصة بالمسح الطبوغرافي بالمقياس الأساسي 1:1000 مقداراً $m_x = m_y = 0.12m$. كما عُبر عن الدقة الارتفاعية بمقدار ثلث التباعد بين خطوط التسوية. وكما هو معلوم فإن خطوط التسوية في المخططات الطبوغرافية ترسم من خلال بناء سطح (surface) استناداً إلى نقاط التسوية، عن طريق بناء أشكال هندسية غير متقاطعة تستند رؤوسها إلى نقاط التسوية غير المباشرة. أهم هذه الأشكال هي المثلثات ثلاثية الأبعاد. تقوم البرمجات المساحية التخصصية بتمثيل سطح الأرض وفق نموذج تضاريس رقمي (DTM-Digital Terrain Model) من خلال تشكيل شبكة المثلثات غير النظامية (TIN-Triangulation Irregular Network) بين النقاط المتجاورة الممثلة بإحداثيات ثلاثية الأبعاد $(x, y, z(h))$ في النظام الإحداثي العام للقطر (المستوي والارتفاعي) [5]. ويمكن معرفة الإحداثيات ثلاثية الأبعاد $(x, y, z(h))$ لأي نقطة من السطح (surface) الذي بني الشكل (5). أي أنه يمكن الحصول على الإحداثي $z(h)$ لنقاط رؤوس العقار ونقاط تبدل الميل ضمن العقار.

$$m_p = \frac{m_{xy(z)}}{2} \sqrt{[d^2]} \quad (25)$$

إذ: $m_{xy(z)}$ - الخطأ المتوسط التربيع للإحداثيات الفراغية لرأس المثلث.

d_i - طول ضلع المثلث الفراغي. بفرض أن الإحداثيات متساوية الدقة $m_x = m_y = m_z$ ، يكون الخطأ المتوسط التربيع لتوضع رأس المثلث.

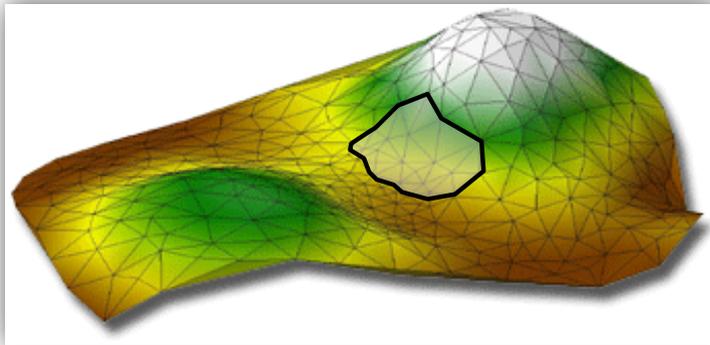
$$m_t = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \text{ أي } m_t = \sqrt{3} m_{xy(z)}$$

تأخذ العلاقة (23)، عندها الشكل العام لتقييم دقة حساب المثلث الفراغي:

$$m_p = \frac{m_t}{2\sqrt{3}} \sqrt{[d^2]} \quad (26)$$

5- الإفادة من المخططات الطبوغرافية الرقمية في حساب المساحات المائلة للعقارات

تحمل المخططات الطبوغرافية الرقمية للمدن والتجمعات العمرانية المهمة والمناطق السياحية والمدن الصناعية، اذ قيمة الأراضي والعقارات مرتفعة جداً، إحدائيات ثلاثية الأبعاد لنقاط التفاصيل جميعها في المناطق المشمولة بالمسح الطبوغرافي [5]، [11]، وأهم هذه النقاط هي نقاط تبدل الميل للسمات الطبيعية، بغية التمثيل الإرتفاعي المناسب للمقياس 1:1000 أو 1:5000، إذ يجري تمثيل المنحدرات والجروف والوديان والتلال بالدقة الارتفاعية المتناسبة مع المقياس وميل الأرض في تلك



الشكل (5) توضع عقار على سطح الأرض وفق شبكة TIN

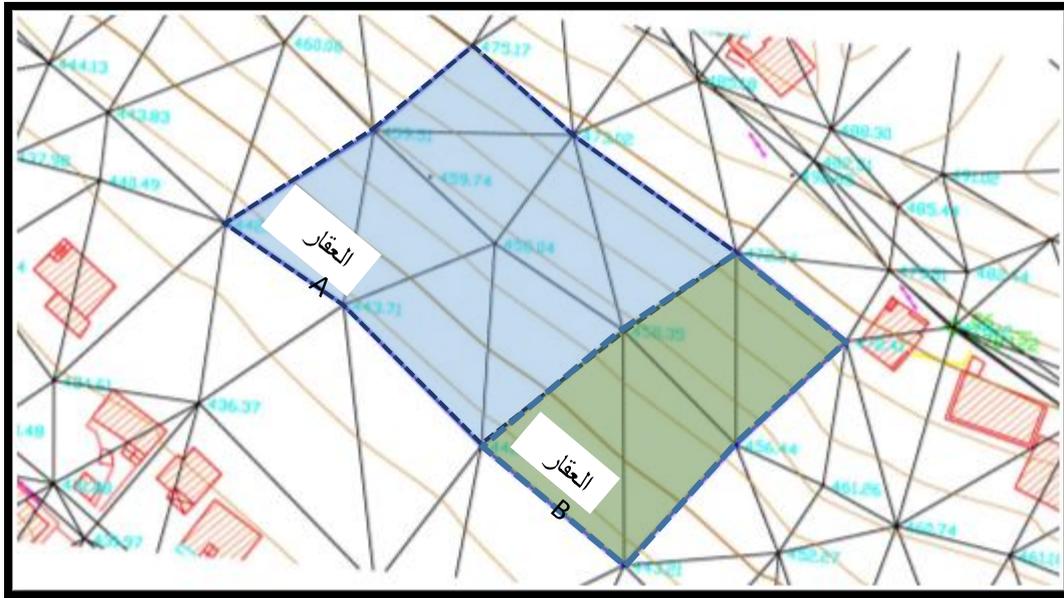
شبكة المثلثات غير النظامية (TIN)، الحصول على الإحداثي $z(h)$ [9].

- في بعض الحالات القليلة حيث لا يتوافر أي من المسحين العقاري أو الطبوغرافي، من المجدي إجراء المسح الموحد (العقاري الطبوغرافي) لهذه المناطق.
- تقسم العقارات إلى مثلثات فراغية غير متقاطعة تستند رؤوس هذه المثلثات إلى نقاط رؤوس العقارات ونقاط تبدل الميل ضمنها.
- تُستقرأ الإحداثيات الثلاثية لنقاط رؤوس المثلثات الفراغية، وتُشكّل جداول بالإحداثيات المستقرأة.
- تحسب مساحات المثلثات المائلة (الفراغية) ضمن العقار وفق العلاقة (22)، وتحسب تبعاً لذلك المساحة المائلة للعقار.

كمثال تطبيقي على ذلك نحسب المساحة المائلة للعقار المفترض B المبين في الشكل (6) الآتي:

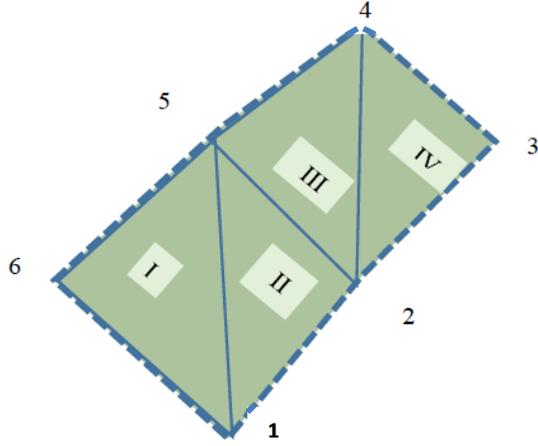
لنتمكن من استخدام المخططات الطبوغرافية الرقمية المرسومة وفق برامج رسومية من بيئة CAD في حساب المساحات المائلة للعقارات [7]، [12] يجب:

- رقمته المخطط العقاري إن لم يتوافر مخطط عقاري رقمي للمنطقة المشمولة بالمسح الطبوغرافي.
- دمج المخطط العقاري المرقم أو الرقمي مع المخطط الطبوغرافي الرقمي. عندها يصبح المخطط العقاري شريحة من شرائح المخطط المدمج الجديد. تجدر الإشارة إلى أنه في الحالة العامة يمكن الوصول إلى انسجام مقبول في أثناء عملية الدمج، وذلك لأن المخططين يستندان إلى الأساس الجيوديزي (نقاط المثلثات العقارية) ذاتها.
- تتيح الشريحة العقارية الحصول على الإحداثيات المستوية (x, y) ، كما تتيح شريحة السطح المبني من



الشكل (6) مخطط طبوغرافي يبيّن الشرائح الآتية: الأبنية السكنية، نقاط التسوية غير المباشرة، شبكة المثلثات غير النظامية (TIN)، خطوط التسوية، حدود العقارين A, B

يشكل هذا الفرق في المساحة نسبة 9.65% من مساحة العقار، وهي نسبة كبيرة. نشير إلى أن العقار واقع في منطقة جبلية ذات انحدار شديد.



الشكل (7) العقار B

يقع هذا العقار ضمن منطقة سكنية، حيث يتوافر مخطط طبوغرافي للمنطقة، إذ يمكن الحصول من خلال مكاملة المخططين العقاري والطبوغرافي الحصول على البيانات الإحداثية المطلوبة لحساب المساحة المائلة للعقار. بحيث تحقق عملية المكاملة التجانس والملائمة بين الإحداثيات المستوية والإرتفاعية. نلاحظ أن العقار يتكون من أربعة مثلثات فراغية أشير إليها ب: (I, II,III, VI) الشكل (7)، وهو جزء من الشكل (6).

ووفقا للعلاقة (22) ومن الجدول (5) نلاحظ: بلغت المساحة المائلة للعقار B بحدود 2251.32 m^2 ، في حين أن المساحة الأفقية المستوية تبلغ 2033.95 m^2 أي بفرق يقارب 217.37 m^2 .

الجدول (5) إحداثيات نقاط رؤوس المثلثات الفراغية، حساب مساحات هذه المثلثات

رقم المثلث في شبكة TIN	رقم النقطة	الإحداثيات الخاصة بنقاط العقار			$\left(\sum_{i=1}^3 (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^3 (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^3 (z_i x_{i+1} - z_{i+1} x_i) \right)^2$	$P = 0.5 \sqrt{P_{xy}^2 + P_{yz}^2 + P_{zx}^2}$	
		X (m)	Y (m)	Z (m)					
I	1	-287339.6	100259.26	442.53	1463145	147979.1	91357.24	652.3958	
	5	-287289.38	100263.54	456.44					
	6	-287309.49	100237.74	443.21					
IV	2	-287313.52	100284.57	458.35	540796.7	46086.39	124124.2	421.6062	
	3	-287293.34	100301.83	472.51					
	4	-287269.3	100285.95	471.92					
II	1	-287339.6	100259.26	442.53	1344315	80856.34	186371.5	634.7327	
	2	-287313.52	100284.57	458.35					
	5	-287289.38	100263.54	456.44					
III	2	-287313.52	100284.57	458.35	927869.5	79942.64	169777	542.5839	
	4	-287269.3	100285.95	471.92					
	5	-287289.38	100263.54	456.44					
							المساحة المائلة	2251.319	m^2
							المساحة الأفقية	2033.95	m^2
							الفرق	217.3686	m^2
							النسبة المئوية	9.6 %	
							زاوية الميل الوسطية	33	gr

النتائج وتوصيات

(حساب مساحات المناطق الجبلية أو الهضبية الحراجية أو المشجرة، ...).

- تختلف المساحات المائلة للعقارات وقطع الأراضي عن المساحات المستوية لها في المناطق الهضبية والجبلية بمقدار غير مهمل وبنسبة كبيرة، تتعلق بميل المنطفة.
- تنسيق، اليوم، طرائق إنتاج المخططات الطبوغرافية والعقارية والتقانات والبرمجيات المستخدمة إمكانية حساب المساحات المستوية والمائلة بدقة كبيرة. كما يمكن التعامل بسهولة مع البيانات جميعها المتعلقة بالعقارات ومنها توافر مساحة مائلة للعقار، خصوصاً من منظور المفاهيم العالمية الجديدة والمستقبلية للعقار (3D Cadaster)[8].
- من الضروري حساب المساحات الفراغية في مديريات المصالح العقارية كلها اعتماداً على صيغة TIN التي أصبحت متوافرة ومعمولاً بها في نظم المعلومات الجغرافية (GIS)[12].
- في بعض الحالات القليلة حيث لا يتوافر أي من المسحين العقاري أو الطبوغرافي، من المجدي إجراء المسح الموحد لهذه المناطق.
- إن رقمنة المخططات العقارية المتوافرة حالياً ورقياً سيشجع إمكانيات جديدة في التعامل مع هذه المخططات لجهة رفع دقة حساب المساحات للعقارات، مع إمكانية حساب المساحات المائلة في مناطق النشاط العمراني والاقتصادي، التي تعد الأكثر قيمة مادية.
- مع أن استثمار العقارات في المناطق شديدة الميول سواء في النشاط السكني أو الاستخدام الزراعي للأرض يجري من خلال الاستثمار الأفقي لسطح الأرض (يقوم الفلاحون بإنشاء المصاطب الزراعية، ...)، إلا أنه وفي حالات الميول الأقل، وكذلك في بعض الحالات يستلزم حساب المساحات المائلة لقطع الأراضي

المراجع REFERENCES

- [10] Брынь М. Я. Оточности вычисления площади пространственного треугольника //Изв.вузов.Геодезияи аэрофотосъемка 2001 № 1
- [11] KAWFMAN, J. Cadastre 2014: a vision for future cadastral systems. Representative of FIG, Chair Working Group 7.1 FIG, 1998.
- [12] EFENBERG, W. Spatial cadastral information systems. The maintenance of digital cadastral maps, PhD, Department of Geomatics, The University of Melbourne, 2001.

Received	2016/06/02	إيداع البحث
Accepted for Publ.	2016/08/30	قبول البحث للنشر

- [1] زوباري علي، المساحة العقارية؛ جامعة تشرين، كلية الهندسة المدنية، 2013-2014.
- [2] تعيين القيمة الفعلية لمساحة قطعة من الأرض بالاعتماد على الأرصاء الحقلية. استاشينكوف، ستيرنيكوف، مجلة الجيوديزيا والفوتوغرامتريا، موسكو، 2001، العدد 4.
- [2] Асташенков Г. Г. Стрельников Г.Е. "Определение фактического значения площадей наклонного участка местности по данным полевых измерений" //Изв.вузов. Геодезия и аэрофотосъемка 2001 № 4.
- [3] حول تقييم دقة المساحات للمثلثات الفراغية. برين، فيسيلكن، مجلة الجيوديزيا والفوتوغرامتريا، موسكو، 2005، العدد 2
- [3] Брынь М.Я. Веселкин П.А "О точности вычисления площади пространственного треугольника". //Изв.вузов.Геодезия и аэрофотосъемка 2005. № 2
- [4] تقرير دورافور حول الأعمال الجيوديزية المنجزة في دول المشرق تحت الانتداب (سورية ولبنان)، المقدم في استوكهولم 1930 والمترجم من قبل د. عمر الخليل وم. منصور شرابية، لصالح المديرية العامة للمصالح العقارية. دمشق، 2014
- [5] منظومة مبادئ ورؤى CADASTER 2014، الموقع الرسمي للإتحاد الدولي للمساحين (FIG) على شبكة الإنترنت.
- [6] مقدسي سامي، حساب المساحات في جملة الاحداثيات الفراغية، ندوة العلوم المساحية، 2000، دمشق، نقابة المهندسين المركزية بدمشق
- [7] B. Gorte. Segmentation of TIN-structured surface models. In Proceedings of Joint Conference on Geo-spatial Theory, Processing and Applications, Ottawa, Canada, July 2002.
- [8] E. Mitrofanova. The needs and possibilities for three-dimensional determination of real estate in Ukraine. In Proceedings International Workshop on 3D Cadastres, Delft, the Netherlands, November 2001.
- [9] J.E. Stoter and B.Gorte. Height in the cadastre, integrating point heights and parcel boundaries. In Proceedings FIG Working Week, Paris, France, April 2003.