النمو السكاني الصفري في نموذج خطي لديناميكية السكان

الدكتور مطانيوس مخول

كلية الاقتصاد ـ جامعة دمشق

الملخص

يؤدي النموذج الخطي المتقطع للنمو السكاني (نموذج LESLIE) دوراً هاماً في ديناميكية السكان النظرية والتطبيقية. وبمناقشة موجزة لهذا النموذج يمكننا معرفة الحالة التي يمكن أن يتزايد بها السكان الإناث في مجتمع سكاني ما متوقف عن النمو، فيما إذا انخفضت معدلات الخصوبة العمرية_النوعية وبشكل تناسبي مباشر عن مستوى الإحلال (معدل إعادة التكاثر الصافي NRR=1) لجيلين متعاقبين وتحت افتراض ثبات الوفاة بمرور الزمن.

توصل (Keyfitz) عام ١٩٧١ إلى وضع سكاني مقارب لنموذج سكاني ديناميكي مستمر الذي وضعه (Lotka)، لنفترض ثبات الوضع الأولي للسكان فتعطي النتيجة حداً أدنى للمجتمع السكاني المتوقف نهائياً، والذي يكون تركيبه العمري ذا نمو سكاني صفري، مع الأخذ بالحسبان الفترة الزمنية، والتي بها يقترب الوضع المفترض من وضع المجتمع السكاني المتوقف.

وأخيراً سنوضح التحليل الجبري للنمو الصفري من خلال نموذج العمليات العشوائية المتعددة.

مقدمة:

تعد الدراسة الكمية للمجتمعات السكانية إحدى وظائف الديمغرافيا، أما الرياضيات السكانية فإنها تهتم بإنشاء النماذج الرياضية الوصفية، كما أنها تبحث في إيجاد الإجابات عن التساؤلات الديمغرافية التي لا يمكن الحصول عليها مطلقاً بواسطة التحليلات الفعلية، إذ أن سلسلة العقبات التي تحدث وتتموضع في إطار نماذج الرياضيات السكانية تشكل عائقاً في تطور التحليل الديمغرافي، وهنا تبرز مقدرة مصمم النماذج الديمغرافية في إنشاء النماذج المرتبطة بالواقع بشكل كافٍ، هذا من جهة، وفي إمكانية استخلاص النتائج العملية من خلال تركيب رياضي بسيط لتلك النماذج من جهة أخرى.

سنهتم هنا بتزايد المجتمع السكاني حتى دخوله النهائي بالنمو الصفري، فيما إذا توافرت الشروط المباشرة لذلك، وبعد مناقشة عامة لسبات (لركود) النمو السكاني وعرض لأهم مفاهيم النموذج الخطي الديناميكي. كما نولي اهتمامنا بالمتغير المتقطع للعلاقة العائدة إلى (Keyfitz, 1971)[1] وذلك لوضع سكاني متوقف نهائياً عن النمو والذي يشهد فيه تراجعاً بمعدلات الخصوبة إلى مستوى المحافظة على البقاء، ومن ثم نبين كيفية تقدير السلوك الانتقالي للنمو الصفري[٢]، ولاسيما تقدير الفترة الزمنية التي انقضت بسبب السبات الديمغرافي (الركود الديمغرافي) لتراجع الخصوبة وحتى التحولات النهائية للوضع السكاني المتوقف[٣]. وأخيراً سنعرض النموذج الخطي الجبري لديناميكية السكان ذا العمليات العشوائية المتعددة لما في ذلك من أهمية كبيرة في التحليل الجبري للركود المدروس للنمو السكاني.

سبات النمو السكاني:

من الحكمة لدى تقدير تطور المجتمعات السكانية أن نجري الإسقاطات السكانية التي تمكننا من تحديد ما ستؤول إليه هذه المجتمعات السكانية في تطورها المستقبلي إذا ما أخذنا بالحسبان الشروط الحيوية السائدة حالياً نفسها، فمثلاً سيتضاعف عدد سكان مجتمع ما ذو معدل نمو سكاني ٣,٥% خلال عشرين سنة و(١٦) ضعفاً خلال ثمانين سنة عن الوضع الحالي لعدد الأطفال المولودين أحياء[٤]. فمثل هذه الاسقاطات تبين إذا كانت ثمة حاجة لمراقبة المواليد أم لا، وكيف ومتى؟

واستناداً للدراسات التي أجراها كل من (Keyfitz 1971, Frejka 1968-1973) سنولي اهتمامنا بشمول تراجع معدلات الخصوبة الخاصة، وانطلاقاً من المقولة الآتية: "بافتراض أن خصوبة المجتمع السكاني_مقاسة بمعدلات الخصوبة العمرية والنوعية_ تنخفض فوراً إلى مستوى تصل به مباشرة إلى وضع المحافظة على البقاء لجيل الأهل"، وهذا يعني أن معدل إعادة التكاثر NNR[5] يكون مساوياً للواحد الصحيح، وهنا يجدر بنا التساؤل: عن الوضع الذي يشغله التركيب النهائي للمجتمع السكاني

المتوقف حالياً؟ وما الطريقة المتعلقة بمؤشرات النمو السكاني الحالي للوصول للمجتمع السكاني المتوقف عن النمو؟.

لدى معالجة الافتراض المعروض أعلاه يتبين أن عدد سكان أي مجتمع سكاني سيتضاعف خلال عشرين سنة فيما إذا كان معدل نموه السنوي ٣,٥%، وإذا بقيت معدلات الخصوبة العمرية-النوعية ثابتة كما هي الآن، الأمر الذي شأنه أن يستبدل الجيل الأنثوي نفسه بنفسه بشكل متعاقب ومباشر[٦]، وهنا لا يمكن لأحد أن يتوقع تحققاً واضحاً لتراجع مفاجئ للخصوبة، لأن الدراسات أجمعت تحت افتراض ثبات وعدم تغير الوفاة_ على أن المجتمعات السكانية يجب أن تكون عند الحد الأدنى لنموها أو أن تكون متوقفة نهائياً عن النمو، كما أنها أعزت السبب لهذا التغير أو الاضطراب بالنمو السكاني[٧] إلى ظاهرة الركود (السبات) الديمغرافي، غير أن ارتفاع عدد الإناث في سن الإنجاب نسبياً والذي ساد بسبب الخصوبة العالية في الماضي، وكذلك تراجع معدلات الخصوبة العمرية _النوعية لفترة زمنية طويلة[٨]، أديا إلى ارتفاع كل من معدل المواليد الخام ومعدل النمو السكاني، الأمر الذي لا يمكن به الوصول إلى مجتمع سكاني متوقف عن النمو.

لمحة موجزة عن النموذج الديمغرافي الخطي LESIE:

سنعرض في هذه الفقرة بعض الحقائق الأساسية عن النموذج الخطي لديناميكية السكان، إذ نجد تصورات أولية لدى كل من:

Leslie (1954), Keyfitz (1968), Goodman (1967), Feichtinger (1971), Pollard (1973), Feichinger und Deistler (1973) Dinkel, R. Hans (1989) Deistler, M. (1993)

سنربط في النموذج الخطي المتقطع لديناميكية السكان لجنس ما_ أوضاع التركيب العمري للإناث في كل اللحظات الزمنية المتعاقبة مع بعضها بعضاً، ونشترط هنا الترتيب في فئات عمرية أحادية x- $=[x,x+1]$، (أي طول الفئة العمرية فيها سنة واحدة فقط) والمقياس الزمني المتناظر لها من السنوات $t=0,1,2....$ كأن نقول عن امرأة ما في الفئة العمرية x- إنها تلك المرأة التي عمرها x- السنوات حيث إن x هو متحول العمر ويأخذ القيم $x = 0,1,2...w$ والذي يقيس العمر بالسنوات الكاملة (علماً بأن $w+1$ هو أعلى عمر ممكن).

ليكن لدينا $e_t=(e_{ot},....,e_{wt})$ شعاع الوضع في اللحظة الزمنية t[9] . وتعطي مركبات الشعاع e_{xt} عدد الإناث من العمر x- في اللحظة t، حيث p_x[10] هو احتمال أن تبقى امرأة من عمر x- على الأقل

للعمر -(x +1)، و F_x متوسط عدد المواليد الإناث اللاتي ولدن من امرأة عمرها -x في اللحظـة t وفي العام (t, t + 1) = -t واللاتي ما زلن على قيد الحياة في t + 1.

لقد اشترطنا ارتباط كل من احتمالات البقاء العمرية P_x ومعدلات الخصوبة العمريـة F_x[11] بـالعمر وعدم ارتباطهما بالتقويم الزمني، وبناء عليه يمن تلخيص المعدلات الحيوية في مصفوفة ليسلي المربعة الشكل

(انظر Vogel, F.; Grünewald, w. ١٩٩٦) كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 \ldots\ldots & F_w \\ P_0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ 0 & P_1 & 0\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . \quad . & . \\ 0 & 0 & 0 \quad P_{w-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (١)$$

وهذا مطابقٌ تماماً للعلاقات الخطية:

$$e_{t+1} = A.e_t \quad t = o.1.2\ldots \qquad (٢)$$

أو

$$e_t = A^t e_0, \ t = 0,1,2,\ldots \qquad (٣)$$

أما احتمالات البقاء العمرية فيمكننا تقديرها من جدول وفاة لمجتمع سكاني متوقف L_x، [12] أي:

$$P_x = L_{x+1} / L_x, \ x = 0,1,\ldots, w\text{-}1 \qquad (٤)$$

وتكون معدلات التكاثر الصافية لإناث المجتمع السكاني معطاة من خلال:

$$NRR = \sum_x \pi_x b \qquad (٥)$$

حيث إن:

$$r_x = L_x / l_0 \qquad (٦)$$

b_x^0

وهي احتمالات البقاء للمواليد الجدد (وعلى الأقل) حتى الفئة العمرية - X وأن

هي معدلات الخصوبة العمرية الأنثوية(١٣)، فالعلاقة (٥) تطابق التعريف المعطى لـ NRR في الحاشية (٥).

واعتماداً على ما سبق نحصل على:

$$R_0 = \sum_{x=0}^{w} P_{0x} F_x \qquad (7)$$

حيث إن:

$$P_{0x} = \begin{cases} 1 & \text{عندما} \quad x = 0 \\ P_0 P_1 \ldots P_{x-1} & \quad x = 1,2,..,w \end{cases} \qquad (٨)$$

وهي احتمال البقاء على قيد الحياة من -0 وحتى -X، لنرمز الآن لـ R_0 المعرف بالعلاقة (٧) كمعدل تكاثر صافٍ مصحح ومتقطع، فهو يعطينا العدد المتوقع من الفتيات في الفئة العمرية -0، واللاتي سينجبن مواليد إناثاً جدداً وخلال حياتهن الإنجابية، إذ يراعى هنا أن R_0 تقدير حقيقي وغير متحيز لـ NRR (انظر الحاشية رقم (١١)).

ومن العلاقات (٦) و(٨) نلاحظ أن احتمالات البقاء r_x و P_{0x} مرتبطان بالعلاقة:

$$P_{ox} = \frac{L_x}{L_0} = \frac{I_0}{L_0}\ \frac{L_x}{I_0} = \frac{I_0}{L_0}\ \pi_x \qquad (٩)$$

فعندما يكون $L_0 > l_0$ نجد أن:

$$P_{0x} > r_x \qquad (١٠)$$

وهذا يعني أن احتمالات البقاء على قيد الحياة لجيل المواليد P_{0x} أكبر من احتمالات البقاء على قيد الحياة لجيل الأمهات r_x، وخلافاً لمعدلات الخصوبة العمرية الأنثوية

$b^{0}_{x}+$ فإن F_x تكون ممزوجة بالوفاة، و F_x هي تقدير طبيعي غير متحيز لـ $b^{0}_{x}+$ الحقيقيـة،

وهذا يعني أن F_x معدلات الخصوبة العمرية أقل من معدلات الخصوبة العمرية الأنثوية $b^{0}_{x}+$:

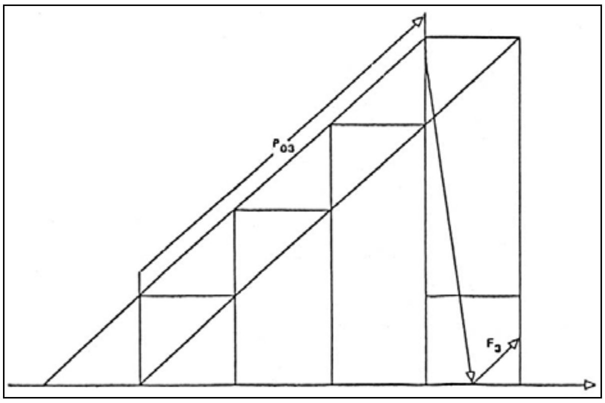
$$F_x < NRR \qquad (١١)$$

ويأخذ العلاقتين (١٠) و (١١) بالحسبان في أثناء التطبيق العملي، نجد أن:

$$R_0 < NRR \qquad (١٢)$$

أي أن معدل التكاثر الصافي المصحح والمتقطع R_0، (انظر الشـكل ١). وفـي النمـوذج المسـتمر (التكاملي) لديناميكية السكان يحظى $NRR = \int_0^{\infty} \ell(x)m(x)dx$ بأهمية مركزية، حيث تعني $\ell(x)$ دالة البقاء على قيد الحياة لمجتمع مستمر، و $m(x)dx$ عدد المواليد الإناث اللاتي يتوقـع أن تنجبهن المرأة في العمر انظر

(Dinke , R. Hans (1989), Keyfity, 1968, P. 102)



الشكل (١) عرض معدلات التكاثر الصافية المصححة R_0 في النموذج المتقطع موضحة في مخطط Lexis

توضيح الرسم:

إن $R_0 = \sum_{x=0}^{w} P_{0x} F_x$ هي مجموع حاصل جداء P_{0x}. وإن P_{0x} تعني احتمال البقاء على قيد الحياة للفئة العمرية - x وبجداء P_{0x} بالقيمة الحتمية المتوقعة لـ F_x يكون العدد المتوقع للمواليد الإناث في العمر - 0 لأم في العمر - x، ومن ثم نأخذ مجموعهم (انظر Feichtinger, 1973 b) وهنا في هذا الشكل وضحنا العملية لأجل $x = 3$.

وبشكل مشابه لذلك _ والذي لا نراعيه في معارفنا للرياضيات السكانية _ نحصل على معدل التكاثر الصافي بالعلاقة (٧) للنموذج المتقطع بالعلاقة (١)، وبه نضع المواليد الأحياء من خلال الخلف في العمر - 0، إذ يصبح من الصعب جداً وصف أثر التركيب الحيوي الحاصل في مصفوفة ليسلي A بشعاع الوضع e_t، لأنه وكما نعلم بأن المجتمعات السكانية تظهر على الأقل نمواً أسياً لحظياً يطرح بدقة المشكلة بالنسبة لتركيب عمري خاص $e_t = u$، وهذا ما يوافق جداء أثر A في الحجم المقياس λ:

$$e_{t+1} = Au = \lambda u = \lambda e_t \qquad (١٣)$$

حيث إن u المعطى في العلاقة (١٣) يسمى بالديمغرافيا تقليدياً بتركيب مستقر، وأن العلاقة (١٣) تظهر لأن المسألة بالنسبة لوجود تركيب عمري مستقر تؤدي إلى قيم مميزة وأشعة مميزة لمصفوفة الإسقاط A، إن القيم المميزة لـ A هي الحلول المعروفة للعلاقة المميزة للمصفوفة:

$$\det (a - \lambda l) = 0 \qquad (١٤)$$

(حيث إن 1 مصفوفة أحادية البعد)، إذ يمكن كتابة العلاقة المميزة (١٤) من أجل

λ #:

$$f(\lambda) = \sum_{x=0}^{w} p_{0x} F_x \lambda^{-(x+1)} = 1 \qquad (١٥)$$

هذا ويمكننا إثبات أن العلاقة (١٤) تأخذ تماماً وتحت الشروط العامة قيماً صفرية وموجبةً λ لمضاعف جبري واحد والذي قيمته تتجاوز أية قيمة مميزة أخرى من A. (λ القيمة المميزة السائدة لمصفوفة ليسلي A) وللمزيد انظر (Feichtinger, 1971, Kap.7).

ليكن لدينا الآن الشعاع U شعاع القيم المميزة لـ λ والمضروب بـ A من اليمين، وليكن أيضاً v' شعاع القيم المميزة لـ λ والمضروب بـ A من اليسار، أي:

$$Au = \lambda u \quad \lambda \qquad \text{و} \quad A = \nu' \qquad \nu'\lambda \qquad (١٦)$$

واستناداً للتركيب البسيط لمصفوفة ليسلي A يمكننا التوصل مباشرة وبسهولة إلى u v:

$$Au = (U_x) \quad \text{حيث} \quad u_x = P_{0x}\lambda^{-x} \qquad (١٧)$$

$$v = (v_x) \quad \text{حيث} \quad v_x = \frac{\sum_{j=0}^{w} F_j u_j}{u_x \sum_{j=0}^{w} (j+1) F_j u_j} \qquad (١٨)$$

لنضع بشكل اعتباطي $u_0 = 1$ فنحصل على درجة الحرية الثانية من خلال القيمة العددية:

$$u = 1\,\nu' \qquad (١٩)$$

فالقيمة العكسية للمركبات الصفرية لشعاع القيم المميزة اليسرى تكون مساوية لمتوسط عمر الأم لفتيات في فئة عمرية 0– للمجتمع السكاني u.

$$\frac{1}{v_0} = \frac{\sum_{j=0}^{w} (j+1) F_j u_j}{\sum_{j=0}^{w} F_j u_j} \qquad (٢٠)$$

تشمل العلاقة (٢٠) لحالة متقطعة مشابهة لمتوسط عمر الأم لدى ولادتها لخلفها الأنثوي في النمـوذج المستمر (للمزيد انظر Keyfitz, 1968)، لأن العامل $j + 1$ (بدلاً من j) يسبب الحقيقة المـذكورة سابقاً بحيث يراعى ذلك في النموذج المتقطع بدلاً من المواليد في العمر - 0.

القيمة المميزة السائدة λ هي عامل النمو[١٤] لمجتمع سكاني مستقر ووفق العلاقة (١٣) والعلاقة (١٦) يتحدد التركيب العمري المستقر من الشعاع الذاتي الأيمن المعطى بالعلاقة (١٧)، ومن المهم جـداً، أن يكون u مرتبطاً ارتباطاً واضحاً بواقع نسب الوفاة، أما الخصوبة فهي مرتبطة فقط وبشكل غير مباشر بعامل النمو المستقر λ.

لنتذكر إذاً مفهوم المجتمع السكاني المتوقف، فهو مجتمع ذو تركيب مستقر خاص عامل نموه يسـاوي $\lambda = \lambda^* = 1$، حيث إن التركيب العمري مرتبط فقط باحتمالات البقاء على قيد الحياة (جدول الوفاة لمجتمع سكاني):

$$u^*_x = P_{0x} \qquad (٢١)$$

استنتج الفريد جون لوتكا A. J. Lotka النتيجة الآتية والتي احتلت أهمية مركزية في علـم السـكان (للمزيد انظر Keyfitz, 1968): إذا ما سادت معدلات حيوية ثابتة زمنياً فإن النسب العمرية تبقـى ثابتة لفترة طويلة، وهذا يعني أنه يؤلف وبشكل مقارب لتركيب عمري مستقر. وبعبـارة أخـرى: إن شعاع الوضع يتزايد بمقارب أسي وبعامل نمو مستقر λ، حيث إن التركيب العمري المستقر مسـتقل عن التركيب العمري الأولي ومعطى من خلال القيمة المميزة السائدة λ والمرتبطـة بشـعاع القـيم المميزة u والمضروبة من اليمين بمصفوفة ليسلي A. أما الوضع السكاني الأولي e_0 فيتـأثر بـ ـ $e_0\,\nu'$ للأوضاع المطلقة لـ e_0، وعليه استطاع لوتكا كتابة تلك النتيجة بالعلاقة الآتية:

$$\frac{e_t}{\lambda_t} \to (\nu' e_0)u \qquad \text{عندما } t\to\infty \qquad (٢٢)$$

وهذا يعني أن المركبة e_t / λ^t تنتهي إلى الطرف الأيمن من العلاقة(٢٢).

المجتمع السكاني المتوقف والناشئ عن النمو الصفري:

ونستنتج مما سبق حالة مشابهة لعلاقة Keyfitz المتقطعة للحجم النهائي للمجتمع السكاني المتوقـف (للمزيد انظر التحليلات المستمرة لـ (Keyfitz, 1971)، لنضع الآن النمـوذج الخطـي المتقطـع لديناميكية السكان ولجنس ما (وليكن الإناث) مع مصفوفة ليسلي للمعدلات الحيوية F_x و P_x المعطـاة بالعلاقة (١)، ولنفترض أن المعدلات الحيوية تبقى ثابتة لكل اللحظات الزمنية المختارة $t>0$ بحيـث تكفي بالضبط على استمرار بقاء النوع وعليه نستنتج النمو الصفري والذي يوصف من خلال عامـل النمو المقارب:

$$\lambda^* = 1^{(15)} \qquad (٢٣)$$

وعندما يقترب وبشكل كلي عامل النمو المتأثر بالتركيب العمري من القيمة الحدية واحد، فإن معدلات التكاثر الصافية تبدي زيادة غير متأثرة بذلك، وكذلك عندما تكون $t = 0$ فإن معدلات التكاثر الصافية غير المصححة والأولية السائدة R_0 تحدد بشكل غير مباشر قبول سلوك إعادة التكاثر المعطى بـ ـ:

$$R_0^* = 1 \qquad (٢٤)$$

لنناقش الآن، كيف يمكن لمعدلات النمو المتأثر الصافية أن تنحدر من R_0 إلى R^*_0، وعليه نفتـرض هنا بأن الوفاة تبقى كما هي عليه، أما الخصوبة فتتناقص وبشكل منتظم وبمقدار $1/R_0$:

$$f^*_x = F_x / R_0 \qquad (٢٥)$$

من أجل $t>0$ تعطى المعدلات الحيوية السائدة P_x و F_x لمصفوفة ليسلي ما لآتي:

$$A^* = \begin{bmatrix} F_0^* & F_1^* & \cdots & F_w^* \\ P_0 & . & & \\ & P_1 & & \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & P_{w-1} \end{bmatrix} \qquad (٢٦)$$

ولدى معرفة كل من (e_{x0}) و A^* يمكننا حل معضلة معرفة المجتمع السكاني المتوقف نهائياً وعددياً، غير أننا لا نهتم بإسقاط العدد لوساطة طريقة المركبات وحسب، وإنما بمعالجة تحليلية تتضح من خلال طريقة تبعية الوضع المتوقف لمؤشرات المجتمعات السكانية.

وبالاستناد للعلاقات (٢٤) و (٢٥) نكتب:

$$R^*_0 = \sum_x p_{0x} F_x^* = \frac{1}{R_0} \sum_x P_{0x} F^*_x = 1 \quad (24a)$$

وحسب العلاقة (١٥) يمكن أن نكتب العلاقة المميزة من A^* بـ:

$$f^*(\lambda) = \sum_x P_{0x} F^*_x \lambda^{-(x+1)} = 1 \qquad (٢٧)$$

وبمقارنة العلاقة (٢٧) مع العلاقة (24a) $1 = \lambda^*$ يعمل بها، ويكون عامل النمو السائد متوقفاً زكما أشرنا إلى ذلك سابقاً.

ولكي نحسب:

$$e = \lim_{t \to \aleph} e_t \qquad (٢٨)$$

نطبق شكلاً خاصاً من العلاقة (٢٢) وتحت اعتبار شرط الثبات في العلاقة (٢٣) ينتج:

$$e = (v^{*\prime} e_0) u^* \qquad (٢٩)$$

حيث تعني u^* و v^* الأشعة المميزة اليمنى واليسرى المرتبطة بالمصـفوفة A^* عنـدما $\lambda^* = 1$، ولأجل $v^* = (v_x)$ من العلاقات (١٨) و (٢١) و (٢٣):

$$v^{*}_{x} = \frac{\sum_{j=0}^{w} P_{0j}F_j}{P_{0x}\sum_{j=0}^{w}(j+1)P_{0j}F_j} \qquad (٣٠)$$

ومن العلاقة (٣٠) ينتج مدلول ناتج القياس:

$$v^{*\prime}e_0 = \sum_x v^{*}_{x} e_{0x} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{w}(j+1)P_{0j}F_j}\sum_{x=0}^{w}\frac{e_{0x}}{P_{ox}}\sum_{j=x}^{w}P_{0j}F_j \qquad (٣١)$$

لا نهتم هنا بالتركيب e فقط، وإنما بالوضع الكلي N للمجتمع السكاني المتوقف نهائياً، لأن هذا الوضع ينشأ من الشعاع e من خلال جمع مركبات الوضع، إذ نستنتج من العلاقات (٢١) و (٢٩):

$$N = (v^{*\prime}e_0)\sum_j u_j = (v^{*\prime}e_0)\sum_j P_{0j} \qquad (٣٢)$$

وتعطي العلاقتان (٣١) و(٣٢):

$$N = \frac{R_0\sum_j P_{0j}}{R_0\sum_j (j+1)P_{0j}F_j}\sum_x \frac{e_{0x}}{P_{0x}}\sum_{j=x} P_{0j}F_j \qquad (٣٣)$$

لنأخذ الآن فقط خط الكسر الأول من العلاقة (٣٣):

$$\sum_{i=0}^{w} P_{0i} = \sum_{i=0}^{w}\frac{L_i}{L_0} \qquad (٣٤)$$

حيث إن المقدار المعطى بالعلاقة (٣٤) هو تقدير للأجل المتوقع للمواليد الجدد (٠) e، وبنـاء علـى العلاقات (٢٥) و (٢٠) ينتج:

$$\frac{\sum (j+1)P_{0j}F_j}{R_0} = \frac{\sum (j+1)P_{0j}F_j}{\sum P_{0j}F_j} = \frac{\sum (j+1)P_{0j}F^{*}_{j}}{\sum P_{0j}F_j}$$

كما يعطى متوسط عمر الأم للفتيات في الفئة العمرية 0– في المجتمع السـكاني المتوقـف بالعلاقـة (٢١):

$$\mu = \frac{\sum (j+1)u^{*}{}_{j}F_{j}}{\sum u^{*}{}_{j}F_{j}}$$

وبذلك يكون:

$$\mu = \frac{\sum (j+1)P_{0j}F_{j}}{\sum P_{0j}Fj} = \sum_{j} (j+1)P_{0j}F^{*}{}_{j} = \frac{\sum (j+1)P_{0j}F_{j}}{R_{0}} \qquad (٣٥)$$

ومن العلاقات (٣٣) و(٣٤) و(٣٥) ينتج:

$$N = \frac{e(0)}{\mu}\frac{1}{R_{0}}\sum_{x}\frac{e_{0x}}{P_{0x}}\sum_{j=x}P_{0j}F_{j} \qquad (٣٦)$$

ونتيجة مقارنة العلاقة (٣٦) مع العلاقة (٧) يلاحظ توافقٌ بينهما، إلا أن تقييم العلاقـة (٣٦) يتطلـب تحليلاً عددياً، هذا وبالاستناد إلى Keyftz (1971, P: 75) نضع الشرط الإضافي الآتي:

e_0 وضع المجتمع السكاني الأولي وهو مستقر[١٧]، وهذا يعني:

$$e_{0x} = e_{00}P_{0x}\lambda^{*-} \qquad (٣٧)$$

(حيث إن λ عامل النمو لمجتمع سكاني أولي مستقر)؛

$$N = \frac{e(0)}{\mu}\frac{1}{R_{0}}e_{00}\sum_{x}\lambda - x\sum_{j=x}^{w}P_{0j}F_{j} \qquad (٣٨)$$

هذا ويمكننا كتابة المجموع المضاعف في العلاقة (٣٨) بشكل آخر:

$$\sum_{x=0}^{w}\lambda - x\sum_{j=x}^{w}P_{oj}F_{j} = \sum_{J=X}^{w}P_{0j}fj\frac{1-\lambda^{-(i+1)}}{1-\lambda^{-1}} \qquad (٣٩)$$

وهنا يشار لعدم الأخذ بالحسبان لشكل ١=λ وذلك بسبب كون المجتمع السكاني الأولي متوقفاً، واعتماداً على العلاقات (٣٨)و(٣٩) ينتج:

$$N = \frac{e(0)}{\mu}\frac{1}{R_{0}}\frac{\lambda}{\lambda-1}e_{00}\left[\sum_{i}P_{0i}F_{i}\lambda^{-(i-1)}\right] \qquad (٤٠)$$

لنأخذ بالحسبان العلاقتين (٧) و(١٥) فنحصل:

$$N = \frac{e(0)}{\mu(\lambda-1)} e_{00} \lambda \frac{R_0 - 1}{R_0} \qquad (٤٠)$$

ولما كانت معطيات المجتمع السكاني الأولي مستقرة فسيكون:

$$e_{01} = \lambda e_{00} \qquad (٤١)$$

ولأجل الوضع الكلي الأولي $N_0 = \sum_x e_{0z}$ والذي يمكننا تلخيصه كمعدل للمواليد الخام، والذي به سنصحح النموذج المتقطع:

$$b = \frac{e_{01}}{N_0} = \frac{\lambda e_{00}}{N_0} \qquad (٤٣)$$

في b يكون عدد الأطفال المولودين دون السنة بالزمن ١- هذا يعني عدد الأطفال المولودين في المجال الزمني (٠,١) والذين بالمتوسط يبقون على قيد الحياة ½ سنة بالنسبة لوضع الإناث في اللحظة $t = 0$.

فالنسبة الهامة N/N_0 للمجتمع السكاني المتوقف نهائياً N إلى الوضع الأولي N_0 تكون مستوية وبالاستناد للعلاقتين (٤١) و(٤٣):

$$\frac{N}{N_0} = \frac{b e(0)}{(\lambda-1)\mu} \frac{R_0 - 1}{R_0} \qquad (٤٤)$$

وبالاستناد للعلاقة:

$$\lambda - 1 = \lim_{t\to\infty} \frac{e_{x,t+1} - e_{xt}}{e_{xt}} \quad \text{لأجل جميع القيم} \times \qquad (٤٥)$$

يكون ١-λ معدل النمو السنوي للمجتمع السكاني المستقر، حيث إن:

b معدل المواليد الخام

e(0) الأجل المتوقع ← جميعها منسوبة بالنسبة للزمن قبل تناقص الخصوبة

λ-١ معدل النمو الطبيعي السنوي

R_0 معدل التكاثر الصافي

λ متوسط عمر الأم لدى ولادة أطفالها في المجتمع السكاني المتوقف؛

ونشير هنا إلى تشابه بين العلاقة (٤٤) والعلاقة (٩) لدى (١٩٧١) Keyfitz؛ ماذا لـو حاولنـا أن نضع لدى التاريخ المتزايد للزمن (مجال زمني للمدة h حيث $h = 0$) ولدى تركيب عمري N/N_0 من العلاقة (٤٤) مقابل القيمة المعطاة من قبل Keyfitz في التحليل المستمر؟

عملية التحول الزمني لمستوى المجتمع السكاني المتوقف:

توصلنا في الفقرة السابقة للمستوى الحالي للمجتمع السكاني المتوقف نهائياً عندما كان معـدل التكـاثر الصافي مساوياً للواحد الصحيح، ونريد الآن تحليل عملية التحول (التذبذب) الزمني والتي تؤدي أخيراً إلى النمو الصفري. لذلك نقبل ثانية بافتراض أن معدل التكاثر الصافي في اللحظـة الزمنيـة $t = 0$ يكون مساوياً للواحد الصحيح وأنه يبقى على هذا المستوى، فعندما نقدر انحراف الوضع السكاني عـن المستوى المتوقف.

لقد اشترطنا في النموذج الخطي وحسب العلاقة (٢) أن $A^* = A$، وحسب العلاقة (٢٩) نعـد $\tilde{e}_t$ انحرافاً لتقدير السكان الخطي e_t عن عنصر التثقيل e:

$$\tilde{e}_t = e_t - e = (A^{8t} - \lim_{t\to\infty} A^{8t})e_{0t}\, t = 1,2... \qquad (٤٦)$$

إضافة إلى ما سبق، نفترض ومن أسس الخاصة الرياضية أن A^* لها فقط قيم مميزة لمضاعف مساوٍ للواحد الصحيح، وهذا يكون ممكناً في التطبيق الديمغرافي (انظر Keyfitz 1968, P51)، وبـذلك نحصل على مصفوفة غير نظامية T، وعليه يكون:

$$A^* = T\,A\,T^{-1} \qquad (٤٧)$$

حيث إن $A = \mathrm{diag}\,(\lambda^*_{1,\ldots,}\lambda^*_{w+1})$ مصفوفة قطرية من القيم المميزة لـ λ^*_1 والمرتبة حسـب قيمتها المطلقة للمصفوفة A^*. إذ رمزنا هنا λ^*_1 للقيم المميزة السائدة للمصفوفة A^* ذات المضاعف المساوي للواحد الصحيح، وعليه:

$$\lambda^*_1 = 1 > \left|\lambda^*_1\right| \geq \left|\lambda^*_{i+1}\right| \quad \text{عندما } i \geq ٢ \qquad (٤٨)$$

ومن ذلك ينتج:

$$\lim_{t\to\infty} A^t = \lim_{t\to\infty} \mathrm{diag}(1, \lambda_2^{*t}\lambda_3^{*t}\ldots, \lambda_{w+1}^{*t}) = \mathrm{diag}(1,0,\ldots,0) \qquad (٤٩)$$

وباستبدال العلاقتين (٤٧) و(٤٩) في العلاقة (٤٦) ينتج:

$$\tilde{e}_t\, T\left[A^t - diag(1,0...,9)\right]T^{-1}e_0$$
$$= T diag(0,\lambda_2^t,\lambda_3^t,...,\lambda_{w+1}^t)T^{-1}e_0 \qquad (٥٠)$$

ونستنتج من ذلك، أن التحليل الكامل لعملية التحول الزمني $\lim\ e_t = e$ يتطلب معرفة جميع القـيم المميزة والأشعة المميزة المتعلقة بـ A^* ومن دون معرفة هذه القيم المميزة والأشعة المميزة كدالات للمؤشرات الحيوية لا يمكننا الانحراف للوضع الكلي المسقط من المستوى المتوقف وبذلك يكون:

$\|X\| = \sum_{i=1}^{w+1}|X_i|$ الشكل المطلق للشعاع X[١٨] و $\|A\| = \max_k \sum_{i=1}^{w+1} a_{ik}$ الشكل المائل المـرتبط بذلك (شعاع عمودي)، ومن العلاقة (٥٠) ينتج:

$$\left\|\tilde{e}_t\right\| \le \|T\|\left\|diag(0,\lambda_2^{*t},...,\lambda_{w+1}^{*t})\right\|\left\|T^{-1}\right\|\|e_0\| = C\left|\lambda_2^*\right|^t \qquad (٥١)$$

وبثوابت غير مرتبطة بـ t:

$$0 = c(e_0) = \|T\|\left\|T^{-1}\right\|\|e_0\| \qquad (٥٢)$$

ومن ثَم الدقة $e > 0$ معطاة، عندما يمكننا اختيار T_0 ، لأنه ولأجل جميع $t \ge t_0$ اللحظات الزمنيـة يقع الوضع الكلي للمجتمع السكاني $\|e_t\|$ في مجال -ε εεεεمن حد المستوى المتوقف $= \|e\|$ N ، وبذلك يكون:

$$t_0 = t_0(\varepsilon, e_0) = (\log\varepsilon - \log c)(\log\left|\lambda_2^*\right|)^{-1} \qquad (٥٣)$$

ونقول بوضوح تام: إن العلاقة (٥١) هي علاقة أسية بمرور الزمن لمجال محدد والذي فيه يجـب أن يؤخذ الفرق الكلي المسقط وحد المستوى، فبذلك نحصل على تقدير للظاهرة من خلال المقادير تبعاً للقيم المميزة الثابتة λ_2^* لمصفوفة الإسقاط A^*.

٦- النموذج الخطي العشوائي لديناميكية السكان:

لقد اتخذنا في الفقرات السابقة إحدى وجهات النظر الاحتمالية الشائعة: حيث رمزنا بـ P_x لاحتمـال البقاء على قيد الحياة وهذا يعالج بالواقع فقط نموذجاً جبرياً، لتبدأ من الشعاع الجبـري $n_0 = (n_{i0})$ للأوضاع الأولية، فكل امرأة في الفئة العمرية –x باللحظة t تبلغ (تصل) الفئة العمرية – (x+1)

باحتمال P_x وعندما تساهم إلى الوضع $n_{x+1,t+1}$ إذ ستنجب في اللحظة t- وباحتمـال F_{xj} الفتـاة j والتي ستبقى على الأقل على قيد الحياة حتـى اللحظـة t + 1. (انظـر Hartung, J,: Elpet B., 1992) وبمطابقة الرمز F_x والمستخدم في العلاقة (١) نعرف الآن: $F_x = \sum_j jF_{xj}$ كقيمة متوقعة للتوزيع الاحتمالي $\{F_{xj}\}$.

وعلاوة على التجانس الزمني لهذه الاحتمالات نضع الافتراض المستقل والمحدد الآتي: "جميع الإنـاث سيبقين على قيد الحياة أو سيلدن فتاتهن مستقلين عن بعضهن البعض".

فالأوضاع n_{xt} باللحظةt لإناث الفئة العمرية x- هي متغيرات عشوائية خاضعة لتوزيع ثنائي البعد أو متعدد الأبعاد، فعلى سبيل المثال يكون $n_{x+1,t+1}$ خاضعاً لتوزيع ثنائي البعد بمؤشرات n_{xt} و P_x، إذ سبق لنا الإشارة إلى هذا النموذج في مواضع عـدة (للمزيـد انظـر: Pollard, 1966; Sykes, 1969; Feichtinger, 1971; Schweder, 1971).

وبهذا الأسلوب تتم العملية العشوائية ذات البعد (w+1)- فالأوضاع $\{n_t\}_{t=0, 1, 2, ...}$ تبين الصفة الماركوفية (متغير العملية العشوائية المتعددة لنموذج سكاني ديناميكي خطي) انظر: (Harris, 1963, Chap.ll, Feichtinger und Deistler, 1973; Hartung, J.; Elpelt B. 1992) فـي المصفوفة $A = [a_{ij}]$ المربعة البعد (w+1)- ستؤدي إلى العزوم الأولى المحتملة لهذه العملية، أي:

$$a_{ij} = E\,(n_{j,t+1}/\, n_t = \varepsilon_j) \qquad (٥٤)$$

حيث ε_j ترمز للأشعة الأحادية j- ذي البعد w+1 ولاسيما عندما تكون مصفوفة ليسـلي A شـكلاً خاصاً لمصفوفة العزوم الأولى لـ A وعندما يؤدي تحليل القيمة المميزة السائدة λ من A دوراً هاماً لنحصل على القيمة المتوقعة:

$$E\,(n_t) = A^t n_o \qquad (٥٥)$$

٧- نقد التحليل الجبري للنمو الصفري من وجهة نظـر نمـوذج العمليـات العشوائية المتعددة:

لقد توصلنا في الفقرة الرابعة ـ وانطلاقاً من المجتمع السكاني الأولي ـ إلى المجتمع السكاني المتوقف في نموذج جبري، عندما بقيت الشروط الحيوية ثابتة والتي بينت الثبات أو الاستقرار ـ إذ أظهرنا هذا التحليل وبشكل طبيعي في الفقرة السادسة لدى دراسة السلوك المتوقع للعملية العشوائية المتعددة.

وحسب نظرية العمليات العشوائية المتعددة تظهر القيمة المتوقعة e_t لعملية عشوائية $\{n_t\}$ في الشكل الآتي $\lambda^* = 1$ وهي غير ممثلة لسياق العملية العشوائية، وعليه يكون الآتي:

$$P\{\lim_{t\to\infty} n_t = 0\} = 1 \qquad (٥٦)$$

هذا يعني أن العملية من الاحتمال ١ عند شعاع الوضع ٠ (انظر Harrris ١٩٦٣)، لأنه وتحت هذا الافتراض سينقرض المجتمع السكاني بشكل أكيد (عند احتمال =١). وهنا يمكننا الشك في حقيقة نموذج العمليات العشوائية المتعددة ـ لأن الخاصية المعروفة لدى (Harris, 1963, P.41) وتحت شـروط النظامية الموجبة ـ لاسيما عندما تكون هذه الخاصية غير متوازنة لكل عوامل النمو λ (λ هي القيمة المميزة السائدة لـ A) التي تطرأ على الحدث "المجتمع السكاني سينقرض أو سينفجر" عنـد احتمـال مساوٍ للواحد الصحيح، أما عندما لا تكون λ ذات قيمة موجبة لنمو متـوازن، فعنـدها تكـون هـذه الخاصية لنموذج العمليات العشوائية المتعددة في تناقض واضح حول النمو وكمـا هـو الحـال لـدى المجتمعات السكانية الحقيقية. وبهذا يجب ملائمة المؤشرات الحيوية مع الشروط البيئية بشكل مـرتبط ومستقر ولكل وضع سكاني، إذ إن كل من (Harris (1963,P.9 وكـذلك (Ney (1972, p.8 و Athreya قد ذكروا هذه الحقيقة: "إن العمليات العشوائية المتعددة وغيرها لا تعرض نماذج ملائمـة للمجتمعات السكانية البيولوجية، لأن الحصول على وصف لتطورات الوضع الحقيقية يشترط التجـانس الزمني لاحتمالات البقاء على قيد الحياة لهذه العملية وإهمال علاقتها بالبيئة ولاسيما في عملية النمـو بالذات...".

ويمكن أن يكون هذا الانتقاد الموجه بالنسبة لنموذج العمليات العشوائية المتعددة موجهاً أيضاً بالنسـبة للنموذج الجبري من ليسلي، وذلك لأن متغير العملية العشوائية المتعددة هو فقط ذلك التعميم الطبيعـي، وعليه يكون سواء نموذج العمليات العشوائية المتعددة أم النموذج الجبري من النماذج المستخدمة تحت شروط ما وبحذر شديد لوصف أو لتقدير تطورات المجتمعات السكانية، ولكن إذا لم تغير بالاتجاهـات الممكنة ـ وبدقة: إذا قمنا بإسقاط الافتراضات عن استمرار بقاء الوضع في المستقبل ـ فإننا نسـتنتج سواء من تحليل Keyfitz أم من تحليلنا، أن التحليل العشوائي يظهر: "أن المجتمع السكاني سينقرض بالتأكيد لدى البقاء المستمر للشروط الحيوية وعلى مستوى إحلال محدد A. كما في المستوى السكاني المستقر والمعطى لدينا بالعلاقة (٤٤) أو لدى Keyfitz (١٩٧١)، إلا أن هذا المستوى له أهمية حقة لاسيما في إطار الإسقاطات السكانية".

ونلخص مما سبق بالآتي:

- لا يمكن للمجتمعات السكانية ذات معدلات النمو المرتفعة أن تصل إلى مجتمعات سكانية متوقفة عن النمو بسبب ارتفاع عدد الإناث في سن الإنجاب نسبياً والناجم عن ارتفاع الخصوبة العالية في الماضي حتى ولو بقيت معدلات الخصوبة العمرية ـ النوعية ثابتة لفترة طويلة وتحت افتراض ثبات الوفاة وعدم تغيرها.
- إن التركيب العمري في المجتمع السكاني المتوقف يكون مرتبطاً فقط باحتمالات البقاء على قيد الحياة (جدول الوفاة).
- اعتماداً على العلاقات (٢٣)، (٢٤)، (٢٥) وتحت الافتراضات الموضوعية للمجتمع السكاني المتوقف (استمرار ثبات كل من معدلات الخصوبة ومعدلات الوفاة والتركيب العمري)، نلاحظ الآتي:

١- معدل النمو = الصفر فإن $R_0 = 1$.

٢- معدل النمو أكبر من الصفر فإن $R_0 < 1$ وإن $NRR > 1$.

٣- ارتباط معدل النمو بكل من 0 ومتوسط عمر الأم عند الولادة.

٤- معدلات إعادة تكاثر الإناث غير متطابقة معها لدى الذكور نظراً لزواج الرجال بعمر متأخر.

وعليه يمثل المجتمع السكاني المستقر نموذجاً ملائماً يسمح بتوضيح بعض العلاقات بين المقادير المرتبطة بمجتمع سكاني من جهة، وكذلك يمثل الحالة القصوى التي يتجه نحوها أي مجتمع سكاني خاضع للدراسة انطلاقاً من تاريخ معين لقوانين وفاة وخصوبة غير متغيرة من جهة أخرى، أي عندما تكون شروط النموذج السكاني المستقر محققة (ثبات كل من الخصوبة والوفاة العمرية ـ النوعية ولفترة زمنية طويلة) فإنه بالإمكان استبدال علاقات النموذج السكاني المستقر بالمشاهدات التجريبية في تلك الشروط المحددة، ولكننا يجب أن نشير إلى بعض الميزات والمساوئ لدى تقدير المؤشرات الديمغرافية بوساطة النموذج المستقر **ومن هذه الميزات:**

١- ترتب البيانات المعروفة عن المجتمع السكاني الفعلي بوصفها بيانات مجتمع سكاني مستقر، إلا أن أهمية هذه الحقيقة تكون ممكنة غالباً فقط عند معرفة البيانات الناقصة.

٢- نتيجة التماثل التركيبي يستفاد من مؤشرات النموذج السكاني المستقر بوصفها قيماً تقديرية لكل المؤشرات الموافقة للمجتمعات السكانية الفعلية.

أما المساوئ فهي:

١- إن تقريب المجتمع السكاني الفعلي المستقر لا يمكن أن يكون محققاً لأن شروط تطابق الثبات غير محققة، لأننا نقبل بثبات الخصوبة والوفاة دوماً ونهمل الهجرات.

٢- إذا تحقق الثبات في المجتمع السكاني الفعلي، فإن المتوافرة عنه ناقصة، (كمـا فـي إحصـاءات البلدان النامية - نقصان الإحصاءات أو الإحصاءات المتحيزة لحركة السـكان كعـدم تسـجيل المواليد الإناث)، ومن ثَمّ لا يمكن لمؤشرات المجتمع السكاني المستقر أن تكون تقديرات ممكنـة ومطابقة للمجتمعات الفعلية.

٨- الخاتمة:

من خلال استعراضنا لكل من النموذجين الخطي الديناميكي المتقطع والخطـي الـديناميكي المسـتمر استطعنا أن نبين بعض الحقائق الأساسية التي يجب مراعاتها عند وضع كل منهما فمثلاً:

النموذج الخطي الديناميكي المتقطع انطلقنا من تحليل لوضع سكاني متوقف نهائياً عن النمو وفي حالة يكون فيها تراجع لمعدلات الخصوبة العمرية - النوعية إلى مستوى المحافظة على البقـاء، لأن هـذا التحليل يمكّننا من:

- تقدير السلوك الانتقالي إلى النمو الصفري؛
- تقدير الفترة الزمنية المرافقة لتراجع معدلات الخصوبة؛
- معرفة التحولات النهائية التي تطرأ على الوضع السكاني المتوقف.

أما النموذج الخطي الديناميكي المستمر فقد انطلقنا من تحليل ثبات الوضع السكاني الأولـي وتركيبـه العمري ذي النمو الصفري وتحت شرط بقاء المعدلات الحيوية (خصوبة، وفاة) ثابتة لفترة زمنية طويلة نسبياً، الأمر من شأنه أن يصبح تركيبه العمري مقرباً لتركيب عمري لمجتمع سكاني مستقر، وليؤكـد الحقيقة الآتية " إن التركيب العمري لمجتمع سكاني مستقر مستقل تماماً عن التركيب العمري الأولـي ذي النمو الصفري، فيما إذا بقيت المعدلات الحيوية ثابتة زمنياً وذلك لأن شـعاع التركيـب العمـري للوضع الأولي سيتزايد بمقارب أسي وبعامل نمو مستقر λ".

هذا بالإضافة إلى أهمية تطبيق كل من النموذجين وإمكانية التفريق بينهما في أثناء التطبيق والتحليـل، ولاسيما في معرفة مدى الترابط بينهما عند التوصل السكاني الكلي والنهائي N انطلاقاً مـن وضـع سكاني متوقف نهائياً عن النمو، لأن هذا يعتمد بشكل أساسي على:

- متوسط عمر المرأة لدى ولادتها لخلفها الأنثوي؛
- الأجل المتوقع للمواليد الإناث الجدد؛

- معدلات التكاثر الصافية.

لذا لا بد لنا من دراسة كل من النموذجين كلاً إلى حدة مرة، ولاكهما معاً مرة ثانية لما في ذلـك مـن أهمية كبرى لاسيما في مجال الإسقاطات السكانية والمستخدمة كثيراً وفي مجلات عـدة، لمـا لهـذه الأخيرة من أهمية أيضاً.

الهوامش

١- انظر Feichtinger 73a و Pollrad 73.

٢- النمو الصفري ويطلق عليه المعدل الصميم للنمو الطبيعي، وهو معدل نمو طبيعي مرتبط بظروف الخصوبة والوفاتية في فترة معينة, وقد يمثل معدل النمو الطبيعي في الحالة المستقرة القصـوى التي قد يبلغها ذلك المجتمع السكاني إذا استمرت تلك الظروف على ما هي عليه إلى ما لا نهاية. وحين يحسب معدل صميم للنمو الطبيعي، يكون الهدف إبدال معدل النمو الطبيعي الفعلـي وهـو معدل يتأثر بالبنية العمرية للسكان بمعدل لا يستمد قيمته إلا من الظروف الصـميمية للخصـوبة والوفاتية في الفترة المعينة. ويرتبط هذا المعدل بمعدل التكاثر الصافي الآني R_0 وبمتوسط عمر الأم عند الولادة لاسيما في المجتمعات السكانية المستقرة.

٣- المجتمع السكاني المتوقف هو مجتمع سكاني مستقر ذو معدل نمو مساوٍ للصفر، كما أنه نمـوذج مغلق تؤثر فيه ظروف الوفاة العمرية والنوعية الثابتة بشكل إذ تسيطر في كـل سـنة معـدلات المواليد والوفيات نفسها ومن ثم ينتج عن ذلك شكل لهرم الأعمار مطابق لشكل منحنـى البقـاء ومعدلات المواليد الخام مساوية لمقلوب الأجل المتوقع عند الولادة، وعدد السكان ثابت يسـاوي حاصل جداء الولادات السنوية بالأجل المتوقع عند الولادة. (Rinne ، Horst ١٩٩٦).

* المجتمع السكاني المستقر هو مجتمع سكاني مالتوسي ذو خصوبة لا تتغير وهو أيضاً مجتمع سكاني مغلق ذو بنية عمرية لا تتغير وتعود تسميته إلى ألفريد لوتكا التي أوجدها مالتوس، ويتميز هذا المجتمع بثبات البنية العمرية وثبات جدول الوفاة. (للمزيد انظر Dinkeg, R. Hans ١٩٨٩).

٤- تظهر مدينة مكسيكو حالياً معدل نمو سنوياً بحوالي ٣,٥%، وهذا يوافق بالواقع تضـاعف لعـدد سكانها خلال عشرين سنة و١٦ ضعفاً في حوالي ثمانين سنة.

٥- يفهم تحت NRR عدد المواليد الإناث الأحياء اللاتي يتوقع أن تنجبهم فتاة حديثة الولادة خـلال حياتها، فيما إذا بقيت شروط الوفاة والخصوبة عما هي عليه، ونشير هنا إلى أننا نحسب في هذا المفهوم فقط المواليد الإناث.

٦- انظر Kyefitz 1971, P.71.

٧- عزم النمو السكاني.

٨- ارتفاع مواليد السنة يعود أولاً إلى العمر الإنجابي للجيل - وهذه العملية تتضح جيداً من خـلال مخطط لكسيس Lexis-Diagramm.

٩- تعد في الرياضيات السكانية وبشكل مألوف - أشعة عمودية، فمنقول المصـفوفات أو الأشـعة نظهرها بشكل مائل أو تميزها بخط مائل يشبه علامة الفتحة باللغة العربية.

١٠- في النموذج المحدد نعالج بدقة التكرارات النسبية، (انظر٧).

١١- ونشير هنا إلى أن F_x مصححة باحتمال البقاء لمنتصف الستة للمواليد الجدد، فمثلاً فتاة مولـودة في ١٠ كانون الثاني من عام ما وتوفيت في ٢٠ تشرين الثاني من العام نفسه، فهي لا تظهر في مقارنة الوضع للنموذج المتقطع.

١٢- انظر(٢)، l_0 الوضع الأولي في جدول الوفاة.

١٣- b^{0}_{x+} توضح عدد الإناث اللاتي أُنجبن من أمهاتهن في العمر -x لمجتمع سكني ما فـي إحـدى السنوات بالنسبة لمتوسط وضـع الإنـاث فـي العمـر -x لهـذا المجتمـع السـكاني، انظـر Feichtinger,1973, p.97.

١٤- عامل النمو في اللحظة الزمنية t يكون معرفاً بشكل عام بـ

$$\sum_x e_{x,t} / \sum_x e_{x,t-1}.$$

١٥- كل المقادير ذات النجمة تنسحب على المجتمع السكاني ولأجل t>0.

١٦- كتب Keyfitz (1971, p.72): هذه ليست الطريقة الوحيدة لأن تكون NNR= 1، وهذا من غير الممكن حدوثه:

"…this not the only way an NRR of 1 can be constituted, and not even the most probable way…."

١٧- البلدان النامية - فأي تحليل يتطلب أهمية خاصة - تظهر تركيب عمري مستقر تقريباً.

١٨- لقد اخترنا هذا الشكل، لأنه يعطي وبشكل غير مباشر الوضع الكلي والمنطلق لشعاع ما، وهذا ما يطابق ما أوضحناه، وتعريف هذا الشكل يكون مشروحاً على سـبيل المثـال فـي zurmuhl (1964).

المراجع

- Athreya, K. B. and Ney, P. E.; 1972, Branching Processes, (Springer), Berlin.

- Deistier, Mantred (1 993), Das lineare populations dynamishe Modell, in der Zeitschrift für . Bevölkerungswissenschaft. Heft 4.

- Dinkel, R. Hans (1989), Demographie, Band I, Bevölkerungsdynamik, Verlag Franz Vahlen München.

- Feichtigger, G.; 1971, Stochastische Modelle demographischer Prozesse. In: Lecture Notes in OR and Mathematical Systems (M. Beckmann and H. P. Künzel, eds.) vol, 44 (Springer), Berlin.

- Feichtinger, G., und M. Deistler; 1973, Bemerkugen über lineare Modelle der Populationsdynamik. Operations-Research-Verfahren (R. Henn, Hrsg.) XV, 40-62 (Hain, (Meisenheim/Glan.

–Feichtinger, G.; 1973a, Bevölkerungsstatistik. De Gruyter Lehrbuch. (De Gruyter), Berlin.

– Feichtinger,G.; 1973b, Bemerkungen über Wahrscheinlichkeitsmodelle für rekurrente demographische Prozesse. Diskussionspapier des Institute für Unternehmensforschung der TH wien.

– Frejka, T.; 1968, Reflections on the demographic conditions needed to establish a U.S. stationary Population growth, Population Studies 22, 379-397.

– Frejka, T.; 1973, The Future of Population Growth, Alternative Paths to Equilibrium, (Wiley, (New York.

–Goodmann, L. A.; 1967, On the age-sex composition of the Population that would result from given fertility and mortality conditions, Demography 4, 423-441.

- Harris, T. E.; 1963, The Theory of Branching Processes, (Springer), Berlin.

- Hartung, Joachim; Elpelt Bärbel (1 992), Multivariate Statistik, Lehr - und Handbuch der angewandten Statistik, 4. durchgerechnekn Auflage, R. Oidenbourg veriag München, Wien.

- Keyfitz, N.; 1968, Introduction to the Mathematics of Population. (Addison-Wesley), Reading, Massachussetts.
- Keyfitz, N.; 1971, On the momentum of Population growth, Demography 8, 71-80.
- Leslie, P. H.; 1945, on the use of the matrices in certain population mathematics, Biometrika 33, 183-212.
- Pollard, J. H.; 1966, On the use of direct matrix product in analysing stochastic population models. Biometrika 53, 397-415.
-Poilar, J. H.; 1073, Mathematical Models for the Growth of Human populations. Cambridge at the University Press.
- Rinne, Horst (1996), Wirtschafts - und Bevölkerungsstatistik, R. Oidenbourg Veriag München Wien.
- Schweder, T.; 1971, The precision of Population projections studies by multiple prediction methods. Demography 8, 441-450.
- Sykes, Z. M.; 1969, Some stochastic versions of the matrix model for population dynamics. Journal of the American Statistical Association 64, 111-130.
- Vogel, F. ; Grünewaid, W. (1996), Kleines Lexikon der Beö1kerungs - und Sozialstatistik, R. Oidenbourg Veriag München, Wien.
- Zurmühl, R.; 1964, Matrizen und ihre technischen Anwendungen, (Springer), Berlin.