تمارين عن المحاضرة الرابعة

تمرين: أثبت صحة المساواتين التاليتين:

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\quad,\quad \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

الحل:

لدينا من تعريف التابع الأسي العقدي:

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

بما أنّ iz ، $-iz$ تنتميان إلى $\mathbb{C}$ لأجل كل z فإنّ:

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{(iz)^n}{n!}+\cdots$$

$$e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}=1-iz-\frac{z^2}{2!}+i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+..+\frac{(-iz)^n}{n!}+..$$

بجمع المتسلسلتين طرفاً لطرف:

$$e^{iz}+e^{-iz}=2-2\frac{z^2}{2!}+2\frac{z^4}{4!}+\cdots+2(-1)^n\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

بقسمة الطرفين على 2:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\cos(z)$$

بطرح المتسلسلتين الناتجتين السابقتين:

$$e^{iz}-e^{-iz}=2iz-2i\frac{z^3}{3!}+2i\frac{z^5}{5!}+..+2i(-1)^n\frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

وبالتقسيم على $2i$:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sin z$$

تمرين:

أثبت $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

الحل: أثبتنا في التمرين السابق أنّ:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

وبالتالي فإنّ

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

تمرين: أثبت أنّ

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_1)\sin(z_2)$$

الحل:

$$\cos(z_1)\cos(z_2) = \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \times \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{iz_2-iz_1} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{4}$$

$$\cos(z_1)\cos(z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} \ldots (1)$$

بشكلٍ مماثل نجد أنّ:

$$\sin(z_1)\sin(z_2) = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \times \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} - e^{iz_2-iz_1} - e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{-4}$$

$$\sin(z_1)\sin(z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{-4} \ldots (2)$$

بطرح (2) من (1):

$$\cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) = \frac{2e^{i(z_1+z_2)} + 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{4} = \cos(z_1 + z_2)$$

بنفس الأسلوب تماماً نثبت المتطابقة:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) \pm \cos(z_1)\sin(z_2)$$

تمرين: أثبت أنّ

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$

الحل: "بالاستفادة من المتطابقة السابقة"

سنضع $z_1 = z_2 = z$ وبالتالي بالتعويض نجد

$$\sin(z+z) = \sin z \cos z + \sin z \cos z$$

$$\sin(2z) = 2\sin z \cos z$$

حاول بنفس الأسلوب إثبات المتطابقة

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1 = 1 - 2\sin^2(z)$$

...انتهت التمارين...