مفردات المقرر

الفصل الأول. الفضاءات الاقليدية.

- تعاريف الفضاءات
- متتاليات التقارب
- المجموعات المتراصة والمترابطة
- النهايات والاستمرار.

الفصل الثاني الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات
- المشتق الجزئي
- المشتق الاتجاهي
- خواص الدوال القابلة للاشتقاق

الفصل الثالث. تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقية لعدة متغيرات
- نظرية القيمة الوسطى
- نظرية تايلور
- نظرية القيم الصغرى والعظمى

الفصل الرابع.

معالجة عددية لحساب التفاضلي للدوال المتجهية.

الفصل الخامس

حساب التكاملات المضاعفة.

م

الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ المألوف.

تعريف

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنرمز لـ $\mathbb{R}^n$ بالجداء الديكارتي للمجموعة $\mathbb{R}$ في نفسها n مرة.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

ولنزود $\mathbb{R}^n$ بعمليتي الجمع (الداخلية)، والضرب (الخارجية) بعدد حيث

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

فإن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \; ; \; y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

2) $\alpha . x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha . x_n)$

عندئذٍ نرى:

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ فضاء شعاعي أو فضاء متجهي.

النظيم.

هو دالة معرفة على فضاء متجهي X.

مستقرة $\mathbb{R}$، ونرمز له بالرمز. $\| . \|$. بمعنى أنه.

$$\| . \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \| x \|$$

وتحقق الشروط الأربعة التالية.

1) $\forall x \in X \quad : \quad \| x \| \geq 0$

2) $\forall x \in X \quad : \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ صفر الفضاء

3) $\forall x \in X \; ; \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$$

4) $\forall x, y \in X \; ; \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وتسمى متراجحة المثلث.

ومتى يكون نظيم يجب أن يحقق الشروط السابقة.

عندئذٍ ندعو $(X, \|.\|)$ فضاء منظم.

مثال.

لنعرف على الفضاء التجريبي $\mathbb{R}^n$ الدالة التالية:

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

برهن أن $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء منظم.

الحل.

يجب أن نبرهن الشروط الأربعة.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; ; \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1 $|x_i| \geq 0 \; ; \; (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0 \Rightarrow \|x\| \geq 0$$

2 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0$

أعداد كلها موجبة ؛ إجباري سيكون كلهم أصفار ، وبالتالي يكون

$\Leftrightarrow |x_i| = 0 \; ; \; (i = 1, 2, \dots, n)$

$\Leftrightarrow x_i = 0 \; ; \; i = (1, 2, \dots, n)$

$\Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

3 $$\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha . x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha| . |x_i|$$

$$= |\alpha| . \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| . \|x\|$$

4 برهان متراجحة المثلث.

$$\|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$$

نستخدم المتباينة المطلقة وسوف نأخذ المجموع للطرفين.

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \quad ; \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

إذن $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضاء منظم.

مثال وظيفة.

ليكن $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهي ولنعرف الدالة.

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

اثبت أنه نظيم على $\mathbb{R}^n$.

نتيجة يمكن تعريف أكثر من نظيم على نفس الفضاء المتجهي.

مثال وضيفة.

نفرض أن $(\ell^{\infty}, +, .)$ فضاء متجهي حيث أن ℓ^{∞} مجموعة كل المتتاليات الحقيقية والمحدودة أي إذا كانت

$$x = \{x_i\}_{i\geq 1} \in \ell^{\infty}$$

فإن.
$$|x_i| \leq C_x$$

وأن.

ℓ^{∞} مزودة بعمليتي الجمع والضرب التاليين.

$$x + y = \{x_i + y_i\}_{i\geq 1} = \{x_i\}_{i\geq 1} + \{y_i\}_{i\geq 1}$$

وأن.

$$\alpha . x = \{\alpha . x_i\}_{i\geq 1} = \alpha . \{x_i\}_{i\geq 1}$$

برهن أن
$$\|x\| = \sup_{i\in \mathbb{N}^*} |x_i|$$

تحدد نظيماً على ℓ^{∞} ، نثبت أن $(\ell^{\infty}, +, .)$ فضاء متجهي.

نتيجة. كل ما يتشوف ℓ^{∞} هي مجموعة كل المتتاليات المحدودة.

مثال وضيفة.

ليكن $X = C[a,b]$ فضاء كل الدوال الحقيقية بالنسبة للمتغير الحقيقي t والمستمرة على المجال المغلق $[a, b]$. ولنعرف عليه الدالتين

$$\forall t \in [a,b] \quad : \|x\|_1 = \max |x(t)|$$

2) $\|x_2\| = \int_a^b |x(t)| \, dt$

وبرهن أن .

$(X, \|.\|_1)$; $(X, \|.\|_2)$

فضاءين منظمين .

نتيجة .

$C[a,b]$ فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على المجال المغلق $[a,b]$

الجداء الداخلي .

ليكن X فضاء متجهي نعرف الجداء الداخلي بأنه دالة منطلقها الجداء الديكارتي $X \times X$ ، ومستقرها $\mathbb{R}$ ونرمز لها بالرمز $\langle , \rangle$ أي أن .

$$\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

حيث تحقق الشروط (المسلمات) الخمسة التالية .

1 $\forall x \in X$; $\langle x, x \rangle \geq 0$

2 $\forall x \in X$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$

3 $\forall x, y \in X$; $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4 $\forall x, y \in X$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha . \langle x, y \rangle$$

5 $\forall x, y, z \in X$; $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

عندئذٍ ندعو الفضاء $(X, \langle , \rangle)$ فضاء الجداء الداخلي .

مثال:

نعرف على $\mathbb{R}^n$ الدالة التالية:

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

برهن أن هذه الدالة هي دالة جداء داخلي.

الحل:

لنحقق الشروط:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \langle x, x \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_i^2 = 0 \; ; \; (i = 1, \dots, n)$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \; ; \; (i = 1, \dots, n)$$

حيث أن x هو عبارة عن الشعاع الصفري.

$$\Leftrightarrow x = (0, 0, \dots, 0) \in 0_{\mathbb{R}^n}$$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \, x_i = \langle y, x \rangle$$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot x_i) \cdot y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$= \alpha \cdot \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (\alpha \cdot y_i) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$$

اذن :

$$\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$$

5 $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot z_i + y_i \cdot z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i$$

$$= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y + z \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i + x_i \cdot z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i$$

$$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

اذن الدالة المعرفة تشكل جداء داخلي .

ملاحظة . يمكن تعريف اكثر من جداء داخلي على الفضاء نفسه

مثال وظيفة .

لنعرف على $X = C[a,b]$ الدالة $<,>$ كما يلي .

$$<,> : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto <x,y> = \int_a^b x(t).y(t)\,dt$$

برهن أن هذه الدالة هي دالة جداء داخلي على $C[a,b]$.

أنتهت م٢ .