علاقة فضاء الجداء الداخلي مع مفهوم الفضاء النظيم.

ليكن X فضاء جداء داخلي وليكن لدينا الدالة.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

عندئذٍ هذه الدالة تحدد تنظيماً على X.

وتحقق هذا النظيم متراجحة كوشي شفارتز التالية.

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| \qquad \dots(*)$$

البرهان.

برهان متراجحة كوشي: نميز حالتين.

1 $x = 0_X$ فإن.

$$\mathcal{L}_1 = \langle x, y\rangle = \langle 0_X , y\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}} . 0_X , y\rangle$$
$$= 0_{\mathbb{R}} \langle 0_X , y\rangle = 0_{\mathbb{R}}$$

الطرف الأول من المتراجحة.

$$\mathcal{L}_2 = \|x\|.\|y\| = \|0_X\|.\|y\| = \|0_{\mathbb{R}} . 0_X\|.\|y\| = 0_{\mathbb{R}} . \|y\| = 0_{\mathbb{R}}$$

2 إذا كان $x \neq 0_X$ عندئذٍ لنأخذ التركيب التالي. $y - \alpha x$

$$\|y - \alpha x\|^2 \geq 0$$

$$0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \langle y - \alpha x , y - \alpha x\rangle$$
$$= \langle y, y\rangle + \langle -\alpha x , y\rangle + \langle y, -\alpha x\rangle + \langle -\alpha x , -\alpha x\rangle$$
$$= \|y\|^2 - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 . \|x\|^2$$

عندئذ α اختياري، لنختار α العدد التالي.

$$\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$$ وبالتالي فإن.

$$0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \|y\|^2 - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle x,x\rangle^2}\cdot\|x\|^2$$

وبتوحيد المقامات نجد

$$0 \leq \|y\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2}$$

$$0 \leq \|y\|^2\cdot\|x\|^2 - \langle x,y\rangle^2$$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2$$

وبجذر الطرفين نجد.

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

نتيجة. الشرط اللازم والكافي كي تنقلب المتراجحة إلى مساواة هو أن
يكون y, x مرتبطان خطياً أو $x = 0_X$.

والآن لنبرهن أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم

1. $\forall x \in X \;;\; \langle x,x\rangle \geq 0$
$$\Rightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0 \Rightarrow \|x\| \geq 0$$

2. $\forall x \in X \;;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0$
$$\Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall x \in X$

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x , \alpha x \rangle}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 . \langle x , x \rangle} = |\alpha| . \sqrt{\langle x , x \rangle}$$
$$= |\alpha| . \|x\|$$

4. $\forall x , y \in X$

$$\|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$$

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y , x+y \rangle}$$
$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle$$
$$= \langle x , x \rangle + 2 \langle x , y \rangle + \langle y , y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2 \langle x , y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x , y \rangle$$

حسب كوشي شفارتز ... (*) ...

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 . \|x\| . \|y\|$$
$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

جذر الطرفين
$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

إذاً الشروط الاربعة محققة كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم لكن العكس ليس بالضرورة ؛ إلا إذا تحققت مساواة متوازي الأضلاع.
تدل البرهنة السابقة على أنه يمكن أن نولد (نستخلص) من جداء داخلي نظيم، ومنه أن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم ولكن العكس غير صحيح بالضرورة وليس كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي إلا إذا تحققت المساواة التالية

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 [\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

إثبات المساواة.

لنأخذ الطرف الأول.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y , x-y \rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle$$

بجمع الطرفين نجد

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle\right]$$

$$= 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = L_2$$

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم ولكن العكس ليس بالضرورة.

لنعطي مثال على ذلك.

ليكن $X = \mathbb{R}^2$ ولنعرف الدالة. $\|x\| = |x_1| + |x_2|$

$; \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

لنبرهن أن هذه الدالة تحدد نظيماً على $\mathbb{R}^2$، هذا النظيم غير مولد من جداء داخلي ; لنتحقق من مساواة متوازي الأضلاع.

$$x = (1, -1) \quad ; \quad y\,(1,1) \in \mathbb{R}^2$$

$$x+y = (2, 0) \quad ; \quad x-y = (0, -2)$$

$$\|x+y\| = |2| + |0| = 2 \Rightarrow \|x+y\|^2 = 4$$

$$\|x-y\| = |0| + |-2| = 2 \Rightarrow \|x-y\|^2 = 4$$

لدينا.

$$\|x\| = |1| + |-1| = 2 \Rightarrow \|x\|^2 = 4$$

$$\|y\| = |1| + |1| = 2 \Rightarrow \|y\|^2 = 4$$

$$L_1 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8 \quad ; \quad L_2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] = 2(8) = 16$$

وبالتالي فإن المساواة غير محققة لأن $L_1 \neq L_2$ إذاً ليس كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي.

الفضاء المتري.

لتكن X مجموعة ما ولنأخذ الجداء الديكارتي $X \times X$ نعرف على هذا الجداء الدالة d كما يلي:

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

وتحقق الشروط التالية:

1) $\forall x, y \in X \quad ; \quad d(x, y) \geq 0$

2) $\forall x, y \in X \quad ; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\forall x, y \in X \quad ; \quad d(x, y) = d(y, x)$

4) $\forall x, y, z \in X \quad ; \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

وتسمى متراجحة المثلث.

وندعو d بدالة مسافة على المحور الحقيقي $\mathbb{R}$.

والفضاء (X, d) هو فضاء متري.

مثال:

لنعرف على الفضاء $\mathbb{R}^n$ الدالة. $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

برهن أن $(\mathbb{R}^n, d)$ هي فضاء متري.

الحل:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

1 $|x_i - y_i| \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$$
$$\Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

2 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$

$$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = 0$$
$$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

حسب خواص القيمة المطلقة.

$$\Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y$$

3. $$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(y,x)$$

4. $$d(x,z) \overset{?}{\leq} d(x,y) + d(y,z)$$

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq$$

حسب خواص القيمة المطلقة.

$$|x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left[|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$$

$$\Rightarrow \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

ملاحظة

من الممكن أن ندخل دالة مسافة على فضاء متجهي ويبقى أسمه فضاء متري.

ملاحظة.

كل نظيم على فضاء متجهي X يولد متريًا d معرفًا بالأداة التالية

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

ويسمى d متري مولد من نظيم فكل فضاء منظم هو فضاء متري

وكل جداء داخلي هو منتظم وكل منظم هو متري

ليس كل فضاء متري هو منظم إلا إذا تحققت المساواة.

مبرهنة.

إذا كان d متري "مولداً" من تنظيم على فضاء متجه X فإن.

1. $d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad ; \forall x,y,z \in X$
2. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| . d(x,y) \quad ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

الاثبات.

1. $d(x+z, y+z) = \|x+z-y-z\| = \|x-y\| = d(x,y)$
2. $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha (x-y)\|$

حسب خواص التنظيم.

$= |\alpha| . \|x-y\| = |\alpha| . d(x,y)$

يترتب على هذه المبرهنة بأنه إذا لم يحقق المتري d إحدى المساواتين فلا يمكن أن يكون هذا المتري مولد من تنظيم.

مثال وظيفة. (1)

ليكن d متري مولد من تنظيم، لنعرف المتري التالي $\tilde{d}$.

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \; x = y \\ 1 + d(x,y) & ; \; x \neq y \end{cases}$$

برهن أن $\tilde{d}$ فضاء متري وغير مولد من تنظيم.

مثال (2).

ليكن S مجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة وغير محدودة نعرف دالة المسافة.

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

حيث $x = \{x_i\} \; ; \; y = \{y_i\}$ أثبت أن d متري على S وهذا المتري غير مولد من تنظيم.

التمرين 2م