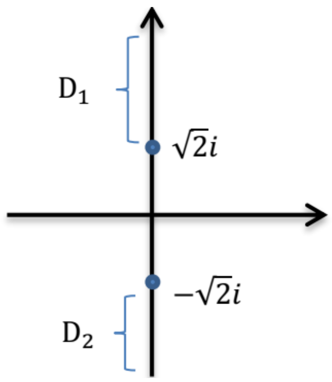
المحاضرة الثامنة

تمرين: هل يوجد لـ $f(z) = \frac{2z}{z^2+2}$ تابع أصلي على المنطقة $G = \mathbb{C} \setminus A$، حيث:

$$A = \{z = iy : |y| \geq \sqrt{2}\}$$

بعبارةٍ أخرى: هل يوجد فروع تحليلية لـ $\log(z^2+2)$ على المنطقة G؟



الحل:

إذا وجد تابع أصلي لـ f على G فإنّه سيكون فرعا تحليليا لـ $\log(z^2+2)$ على G.

من الواضح أن:

$$A = \{z = x + iy : x = 0 , y \geq \sqrt{2} \vee y \leq -\sqrt{2}\}$$

وبالتالي فإنّ $A = D_1 \cup D_2$ (انظر الشكل جانباً)

إنّ نقاط تفرع التابع $\log(z^2+2)$ هي حلول $z^2+2=0$ أي هما النقطتان: $z = \sqrt{2}i$ و $z = -\sqrt{2}i$. نلاحظ أنّه في المنطقة G لا يمكن الانطلاق من أي نقطة z والعودة إليها بدورة كاملة حول أي من نقطتي التفرع دون قطع أحد نصفي المستقيمين D_1, D_2 (أي دون الخروج من المنطقة G). وبالتالي هناك فروع تحليلية لـ $log(z^2+2)$ على G، المشتق لكلٍ منها $\frac{2z}{z^2+2}$، وجميع هذه الفروع ستكون توابع أصلية للتابع f على G.

تمرين: عيّن منطقة تحليلية التابع $f(z) = Log\ (z^2+2)$، ثمّ عيّن مشتق fعلى تلك المنطقة. (حيث Log هو الفرع الرئيسي التحليلي لـ log).

الحل:

ليكن $g(z) = z^2 + 2$، $G = \mathbb{C} \setminus A$. فإذا أثبتنا أن $g(G) = \mathbb{C} \setminus Ox^-$ فإن التابع $f(z) = Log(\ g(z))$ سيكون تحليلياً على G لأن g تحليلي على $\mathbb{C}$ (كثير حدود) وبالتالي على G ، Log تحليلي على $\mathbb{C} \setminus Ox^-$ وبالتالي على $g(G)$.

وذلك حسب المبرهنة: "إذا كان r تحليلياً على X وh تحليلياً على $g(X)$ فإنّ $h \circ r$ تحليلي على X."

وبالتالي إذا أخذنا منطقة يكون g تحليلياً عليها فإنّ f سيكون قابلاً للاشتقاق عند $z \in \mathbb{C}$ إذا كان $g(z) \notin Ox^-$. فإذا أثبتنا التكافؤ التالي تم المطلوب:

$$g(z) \in \mathbb{C} \setminus Ox^- \Leftrightarrow z \in G = \mathbb{C} \setminus A$$

وهذا يكافئ:

$$g(z) \in Ox^- \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2 + 2xyi \in \mathbb{R}^-$$

$$\Leftrightarrow \; x^2 - y^2 + 2 \leq 0 \ldots (2) \quad , \qquad xy = 0 \ldots (1)$$

من (1) إمّا $x = 0$ أو $(y = 0 \wedge x \neq 0)$.

إذا كانت $y = 0$ فإنّ (2) تصبح بالشكل $x^2 + 2 \leq 0$ وهذه المتراجحة مستحيلة الحل.

إذا كانت $x = 0$ و $y \neq 0$، فإنّ (2) تصبح بالشكل $-y^2 + 2 \leq 0$ والأخيرة تكافئ $|y| \geq \sqrt{2}$. بالنتيجة:

$$g(z) \in Ox^- \Leftrightarrow z \in A = \left\{z = iy : |y| \geq \sqrt{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \{\, g(z) \in \mathbb{C} \backslash Ox^- \Leftrightarrow z \in G = \mathbb{C} \backslash A\}$$

وبالتالي f تحليلي على G ولا يمكن أن يكون تحليلياً أي نقطة لا تنتمي إلى G (لأن f غير معرف عند أي نقطة A . ومنه فمنطقة تحليلية f هي G ، وإن:

$$\forall z \in G : f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2z}{z^2 + 2}$$

وبذلك يتم المطلوب.

...انتهت المحاضرة الثامنة...